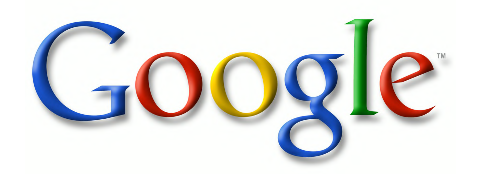
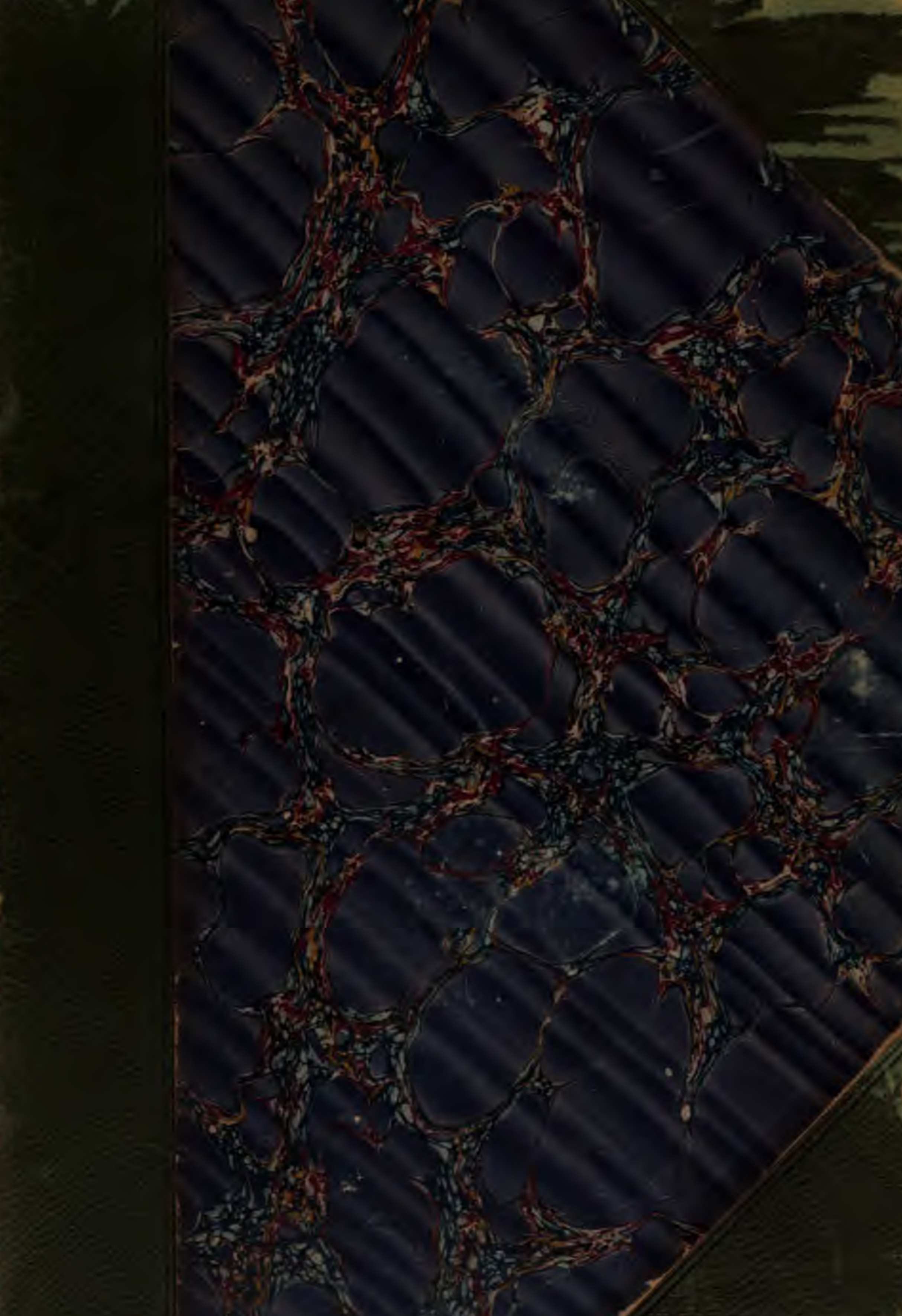
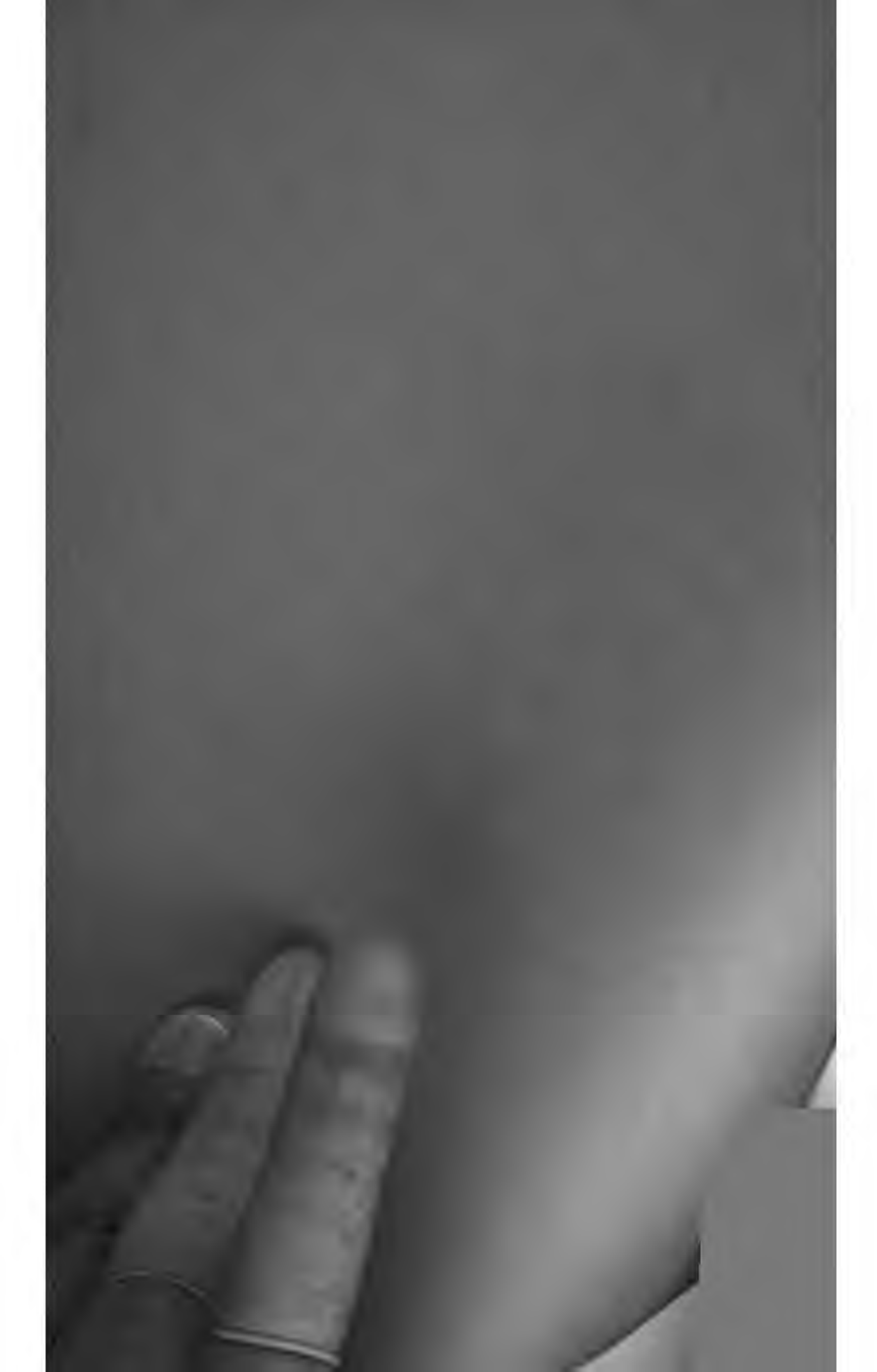
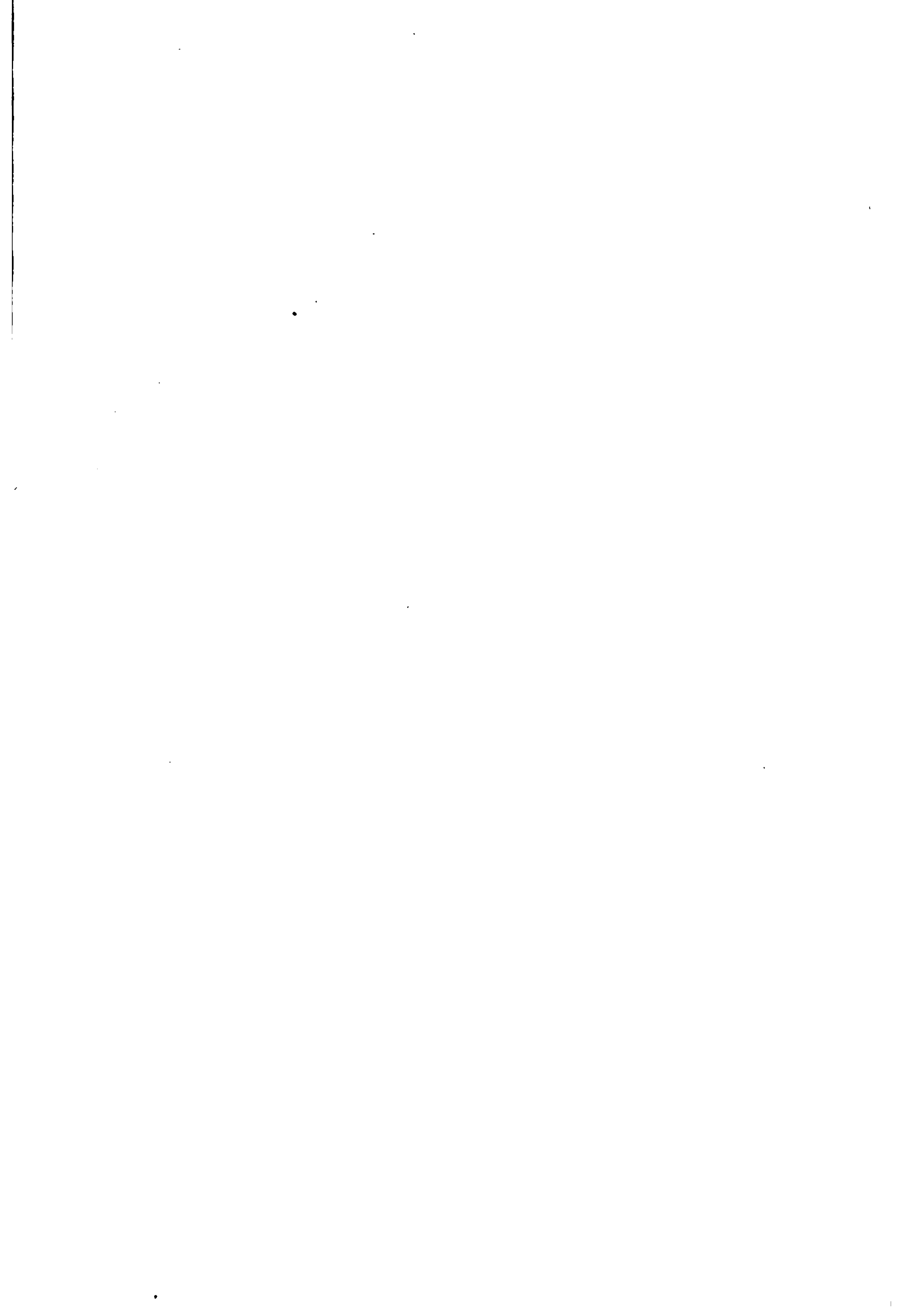
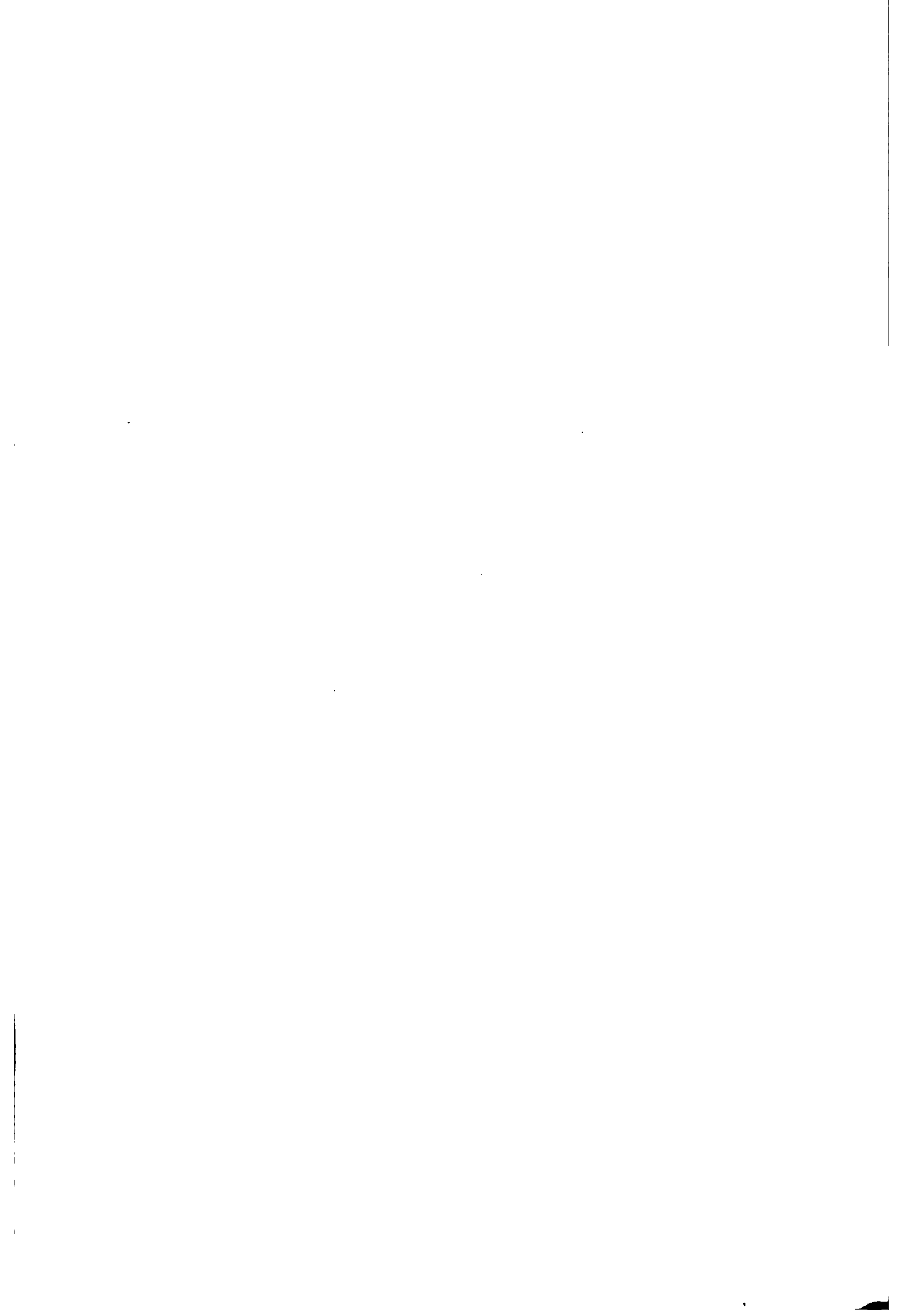
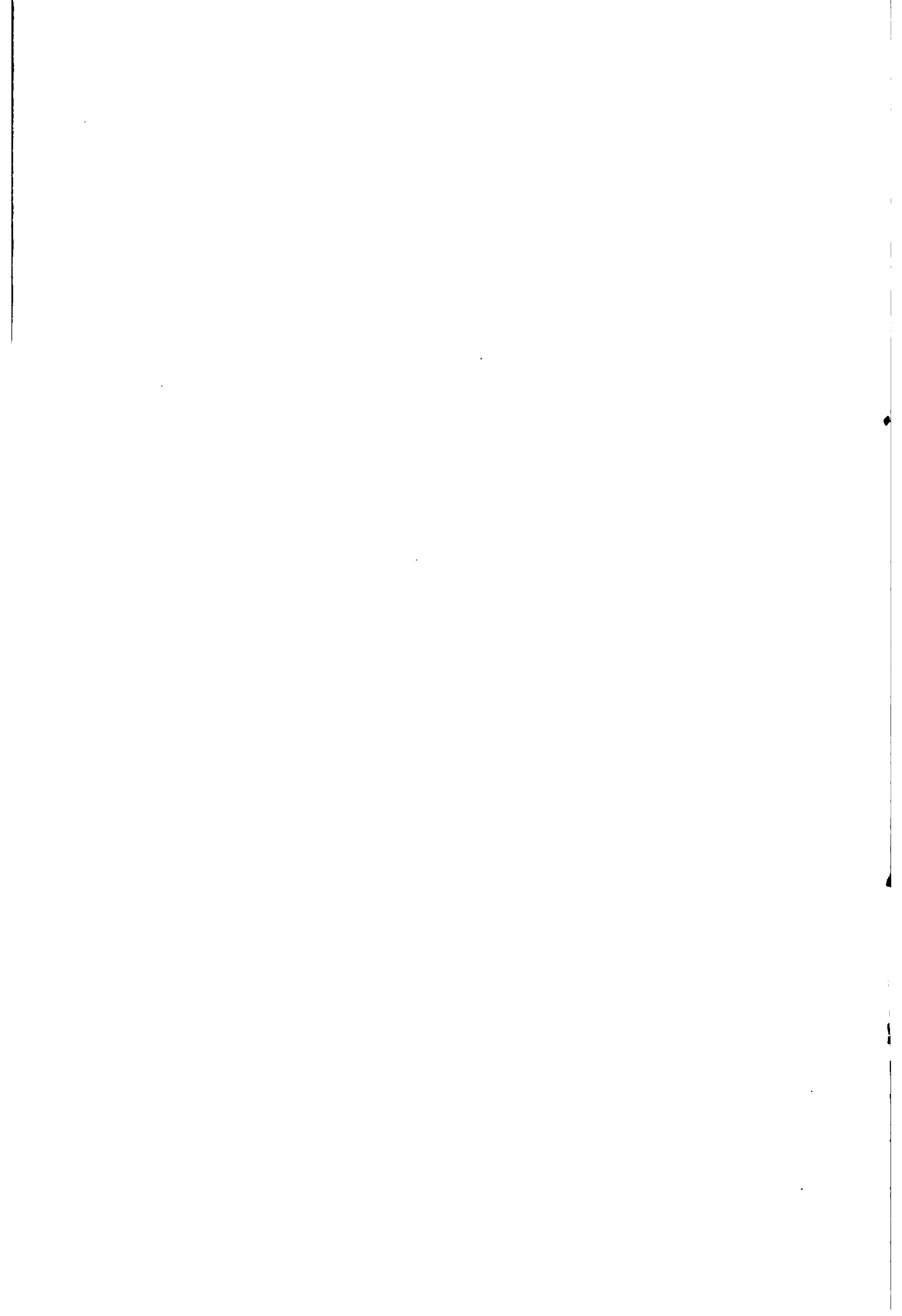












Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1891.

Nro. 1—11.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1891.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1891.



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

25. Februar. № 1. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Februar.

Riecke legt eine Abhandlung des Herrn Privatdocenten Dr. Nernst vor: „Ueber das Henry'sche Gesetz.“

Voigt legt: „Beiträge zur Hydrodynamik“ vor.

Klein legt die Abhandlung des Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen.“ 4. Mittheilung.

de Lagarde spricht über Inhalt und Bedeutung seiner „Septuagintastudien II und III“, die im Band 37 der Abhandlungen erscheinen werden.

Frensdorff legt einen Aufsatz vor: „Eine Krisis in der K. Gesellschaft der Wissenschaften.“

Ueber das Henry'sche Gesetz.

Von

W. Nernst.

In der Abhandlung, welche der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in der Sitzung vom 2. August vorgelegt wurde, habe ich den Satz aufgestellt, daß jeder Molekülgattung zwischen zwei Phasen eines inhomogenen Systems ein konstantes Theilungsverhältnis zukomme, unabhängig insbesondere, welche anderen Stoffe (in nicht zu großer Konzentration) zugegen sind. Von den Folgerungen, welche sich

aus diesem Satze für die Vertheilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln ergeben, konnte ich bereits durch die Berechnung älterer Versuche und durch eine Anzahl eigener Messungsreihen nachweisen, daß sie an der Erfahrung eine zahlenmäßige Bestätigung finden. Inzwischen habe ich nach einer in der erwähnten Mittheilung bereits angedeuteten Methode auch den Fall experimentell untersucht, daß ein Stoff sich zwischen einer flüssigen und einer gasförmigen Phase vertheilt, worüber im Folgenden nach einigen theoretischen Betrachtungen über diesen Fall zu berichten mir gestattet sei.

Die Anwendung obigen Satzes auf die Vertheilung von Stoffen zwischen Lösungsmittel und dem mit diesem in Berührung befindlichen Gasgemische, d. h. auf die Abhängigkeit des Partialdrucks, mit welchem ein in Lösung befindlicher Stoff in dem über der Lösung lagernden Gasgemische vorhanden ist, von der Konzentration jener, führt zu folgenden Gesetzmäßigkeiten.

1) Der Partialdruck eines gelösten Stoffes über einer Lösung ist bei konstanter Temperatur der Konzentration desselben in der Lösung direkt proportional, wenn derselbe in Lösung und im Gaszustande gleiche Molekulargröße besitzt; unter dieser Bedingung gilt mit andern Worten Henry's Gesetz.

2) Befindet sich der gelöste Stoff im Dissociationszusstande, so gilt der Satz für jede einzelne Molekülgattung, die in der Reaktionsgleichung der Dissociation vorkommt.

3) Es finde im allgemeinsten Falle zwischen den gleichzeitig in einem beliebigen Lösungsmittel gelösten und verflüchtigten Stoffen eine Reaktion nach dem Schema

$$n_1 A_1 + n_2 A_2 + \ldots = n_1' A_1' + n_2' A_2' + \ldots$$

statt, d. h. es treten n_1 Moleküle vom Körper A_1, n_2 Moleküle vom Körper A_2 u. s. w. zusammen, um n_1' Moleküle vom Körper A_1', n_2' Moleküle vom Körper A_2' u. s. w. zu bilden; Gleichgewicht sei eingetreten, wenn die Partialdrucke der einzelnen Molekülgattungen $p_1, p_2 \ldots, p_1', p_2' \ldots$ und ihre Konzentrationen in der Lösung $c_1, c_2 \ldots, c_1', c_2' \ldots$ betrogen. Dann liefert die Anwendung des Guldberg-Waage'schen Gesetzes der chemischen Massenwirkung, welche in gleicher Weise für das gasförmige und flüssige System gemäß den von van 't Hoff in seiner Schrift: „Lois de l'équilibre chimique dans l'état dilué, gazeux ou dissons“ (Stockholm 1885) entwickelten Grundsätzen zu erfolgen hat, die beiden

Gleichungen

$$\frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots}{p_1'^{n_1'} p_2'^{n_2'} \dots} = K \tag{1}$$

$$\frac{c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots}{c_1'^{n_1'} c_2'^{n_2'} \dots} = K' \tag{2}$$

worin K und K', die Reaktionskoefficienten, nur von der Temperatur in der bekannten Weise abhängen. Der eingangs erwähnte Satz liefert uns eine Anzahl Gleichungen

$$c_1 = p_1 k_1, \; c_2 = p_2 k_2, \; \dots \; c_1' = p_1' k_1', \; c_2' = p_2' k_2' \; \dots \tag{3}$$

worin $k_1, k_2 \dots, k_1', k_2' \dots$ die Löslichkeitskoefficienten der einzelnen Molekülgattungen bedeuten, die wiederum nur von der Temperatur abhängen, und zwar in einer aus der Lösungswärme derselben leicht zu berechnenden Weise.

Aus (1) bis (3) erschließen wir

$$K = K' \frac{k_1'^{n_1'} k_2'^{n_2'} \dots}{k_1^{n_1}, k_1^{n_2} \dots}. \tag{4}$$

Dies Resultat ist vielleicht nicht ohne weiter gehende allgemeine Bedeutung. In den meisten Fällen lassen sich die Löslichkeitskoeffizienten einer Molekülgattung gegenüber einem beliebigen Lösungsmittel direkt bestimmen, und es wird bei Kenntnis dieser ermöglicht, vorherzusagen, wie eine Anzahl Stoffe in einem beliebigen Lösungsmittel auf einander einwirken, wenn ihre Reaktionsfähigkeit im Gaszustande bekannt ist, und umgekehrt.

Es muß jedoch betont werden, daß die Gleichungen (3) nur für elektrisch neutrale Moleküle gültig sind; für eine bestimmte Ionengattung nämlich kann der Theilungskoefficient im allgemeinen nicht unabhängig von der Gegenwart anderer Ionen sein, weil infolge Ausbildung elektrischer Doppelschichten an der Grenzfläche der verschiedenen Phasen die einfache Superposition der Gleichungen (3) aus dem gleichen Grunde aufhört, wie die Salze sich bei der Diffusion in wässeriger Lösung wegen der hierbei auftretenden Potentialdifferenzen beeinflussen. Außerdem wird vorausgesetzt, daß die betreffenden Stoffe weder in Lösung noch im Gaszustande in zu großer Konzentration vorhanden sind.

Satz 1) ist der bekannte van 't Hoff'sche Satz; nimmt man zur Bestimmung des Partialdruckes die van 't Hoff'sche Dampfdruckformel zu Hülfe, so gelangt man zu der von Planck[1]) ge-

1) M. Planck, Zeitschr. physik. Chem. 2. 405 (1888).

gebenen Theorie der Dampfspannungen von verdünnten Lösungen flüchtiger Stoffe; die von Planck gemachte Voraussetzung, daß der Dampf des Lösungsmittels in großem Ueberschuß im Vergleich zu dem des gelösten Stoffes zugegen ist, kann man ohne Weiteres fallen lassen, da sie weder nothwendig ist noch eine merkliche Vereinfachung mit sich bringt. Von der weiteren Beschränkung in Planck's Theorie, daß nämlich der gelöste Stoff als solcher und im Gaszustande gleiche Molekulargröße besitzt, kann man sich mittelst des Satzes 2) befreien; durch wiederholte Hinzuziehung des Satzes 3) schließlich kann ohne weiteres eine allgemeine Theorie für die Dampfspannung einer Lösung gegeben werden, die beliebige Stoffe (in nicht zu großer Konzentration) enthält, zwischen denen außerdem beliebige chemische Einwirkungen stattfinden können. Die Formeln die sich bei Anwendung des Satzes 2) ergeben werden, (bezüglich des experimentell noch nicht untersuchten Satzes 3) mögen obige Andeutungen genügen) haben neuerdings eine strenge thermodynamische Begründung durch Herrn Professor Riecke erfahren[1]; die unten mitzutheilenden Messungen sind also gleichzeitig dazu geeignet, der Riecke'schen Betrachtungsweise dieser und verwandter Probleme eine neue experimentelle Bestätigung zu verleihen.

Zur Messung des Partialdruckes, mit welchem der gelöste Stoff über der Lösung vorhanden war, bediente ich mich des Beckmann'schen Siedeapparates[2], dessen Theorie sich unschwer auch für den Fall erweitern läßt, daß der gelöste Stoff in merklicher Weise an der Verdampfung theilnimmt. Es seien in N Molekülen des Lösungsmittels n Moleküle eines fremden Stoffes gelöst, welche letzteren einheitlich sein können oder nicht, und im letzteren Falle mit einander beliebig reagieren mögen. Sei B der Barometerstand, P der Partialdruck des Lösungsmittels und p derjenige des gelösten Stoffes, so ist

$$p = B - P$$

und, wenn P_0 den Dampfdruck des reinen Lösungsmittels bei der betreffenden Temperatur bedeutet, so wird mit Einführung der van 't Hoff'schen Dampfdruckformel

$$\frac{P_0 - P}{P_0} = \frac{n}{N+n} \tag{5}$$

1) E. Riecke, Gött. Nachr. 1890 No. 14.

2) E. Beckmann, Zeitschr. f. physik. Chem. 4. 532 (1889).

$$p = B - P_0 \frac{N}{N+n}. \tag{6}$$

Es sei nun t die Aenderung, welche der Siedepunkt des Lösungsmittels durch Hinzufügen der n Moleküle des gelösten Stoffes erfahren hat und die bei nicht flüchtigen Stoffen immer positiv ist, bei flüchtigen aber sowohl positiv wie negativ sein kann; bedeutet α ferner die Zunahme des Dampfdruckes des Lösungsmittels, welche einer Temperatursteigerung um 1^0 entspricht, so wird

$$P_0 = B + \alpha t$$

und demgemäß

$$p = B\left[\frac{n}{N+n} - \frac{\alpha t}{B}\frac{N}{N+n}\right]. \tag{7}$$

α kann entweder den Dampfdrucktabellen direkt entnommen oder aus der Clausius'schen Dampfdruckformel mittelst der Verdampfungswärme berechnet werden; man erhält auf dem letzteren Wege

$$\alpha = \frac{BMw}{2T^2} \text{ mm Quecksilber} \tag{8}$$

worin M das Molekulargewicht, w die Verdampfungswärme in g-cal und T die absolute Siedetemperatur des Lösungsmittels bedeuten. Handelt es sich um größere Aenderungen des Siedepunktes, so muß natürlich berücksichtigt werden, daß dann der Dampfdruck mit der Temperatur nicht mehr linear variiert; im Folgenden, wo diese Aenderung immer nur nach Bruchtheilen eines Grades zählen wird, ist dies nicht erforderlich.

Für nicht flüchtige Substanzen wird $p = 0$ und es resultiert aus (7) die von Arrhenius abgeleitete und von Beckmann verificierte Formel, welche das Molekulargewicht einer nicht flüchtigen Substanz aus der Siedepunktserhöhung zu berechnen gestattet. Bei Anwendung flüchtiger Substanzen als gelöster Stoffe wird Proportionalität zwischen Konzentration und Temperaturänderung, die in einer Erhöhung oder Erniedrigung des Siedepunktes bestehen kann, nur dann stattfinden, wenn p und Konzentration proportional sind, d. h. wenn dem gelösten Stoffe als solchem und als Gas gleiche Molekulargröße zukommt. Ist dies nicht der Fall, so finden (genügende Flüchtigkeit der gelösten Substanz vorausgesetzt), sofort die grellsten Abweichungen von dieser Proportionalität statt.

Als Beispiel von Stoffen, die in Lösung und als Gas gleiche Molekulargröße besitzen, untersuchte ich Benzol und Chloroform in ätherischer Lösung mittelst des Beckmann'schen Siedeapparats. Thatsächlich waren denn auch die beobachteten Siedepunktserhöhungen der angewandten Konzentration proportional und um 20, bez. 10 % in beiden Fällen kleiner, als sich aus dem Molekulargewichte beider Substanzen unter Annahme von Nichtflüchtigkeit berechnen würde.

Wir gehen jetzt zu den Messungen über, welche mit Anwendung einer Substanz ausgeführt sind, die in Lösung und als Gas in merklich verschiedenem Molekularzustande sich befindet. Als Lösungsmittel wurde Benzol verwandt, als gelöste Substanz diente Essigsäure, die nach den Gefrierpunktsbestimmungen sowie nach den Resultaten, welche nach der Siedemethode mit anderen einbasischen organischen Säuren, wie Benzoesäure, Salicylsäure u. dgl. erhalten sind und einen sicheren Analogieschluß gestatten, bei den hier in Betracht kommenden Konzentrationen zum weitaus größten Theile in Benzollösung bimolekular ist; in Dampfform hingegen, wo ihr Dissociationszustand nach einer von Gibbs berechneten Formel sich sehr genau für alle Drucke und ein großes Temperaturintervall berechnen läßt, werden wir sie, den Bedingungen der Temperatur und der Druckverhältnisse entsprechend, erheblich stärker in die normalen Moleküle dissociiert vorfinden.

Bei Ausführung der Messungen wurde das Hauptaugenmerk auf Anwendung möglichst wasserfreier Substanzen gerichtet, weil Gegenwart selbst nur geringer Spuren von Wasser die Dampfspannung der Lösungen aus mancherlei Gründen erheblich beeinflussen muß. Demgemäß gelangte nur über Natiumdraht längere Zeit getrocknetes Benzol und durch mehrmaliges Ausfrieren vor jedem Versuch frisch gereinigte Essigsäure zur Verwendung. Es gelang so in der That, in fünf Versuchsreihen gut miteinander stimmende Resultate zu erhalten; zur Kontrolle des Apparats wurde außerdem eine Bestimmung mit einer kaum flüchtigen Substanz (Diphenylamin) gemacht, die folgendes befriedigende Resultat lieferte:

Tab. I.

Diphenylamin in Benzollösung.

m	t	M
1·51	0·229	175
3·11	0·463	179
5·61	0·828	181

m bedeutet die Anzahl g gelöster Substanz auf 100 g Benzol, *t* die beobachtete Siedepunktserhöhung und *M* das nach der Formel

$$M = 26{\cdot}7\ \frac{m}{t}$$

berechnete Molekulargewicht, welches sich nur wenig höher, der geringen Flüchtigkeit des Diphenylamins entsprechend, als das theoretische, 169, ergiebt.

Die Essigsäure wurde in der von Beckmann für Flüssigkeiten vorgeschlagenen Weise [1]) in das siedende Benzol successive eingeführt; auffallend war, daß sich, besonders bei größeren Konzentrationen, der Siedepunkt der Lösung etwas träge konstant einstellte, wie wenn es einiger Zeit bedurfte, damit das Gleichgewicht zwischen der in Lösung und im Gaszustande befindlichen Essigsäure sich herstellte. Gleichwohl dürften die nun mitzutheilenden Zahlen fast durchweg, besonders da sie großentheils das Mittel aus mehreren gut mit einander stimmenden, unabhängigen Versuchsreihen sind, bis auf weniger als 0·01° sicher sein. Der Barometerstand schwankte bei allen Versuchen nur so wenig um 750 mm, daß er unbedenklich für alle Messungen diesem Mittelwerthe gleichgesetzt werden kann, um so mehr, als ein außerdem bei einem ungewöhnlich niedrigen Barometerstande, 730 mm, ausgeführter Kontrollversuch keine merkliche Beeinflussung dieser großen Schwankung des äußeren Druckes auf die beobachteten Siedepunktsänderungen des Benzols durch Zusatz von Essigsäure erkennen ließ. Die Korrektion, welche infolge der durch die Verdampfung der Essigsäure bedingten Konzentrationsänderung anzubringen ist und sich aus der unten zu gewinnenden Kenntnis ihres Partialdrucks und der Angabe, daß das Volum der Lösung und dasjenige des Dampfraumes je ca. 50 cc betrug, leicht berechnet, liegt vollkommen innerhalb der Versuchsfehler.

Tab. II.

Essigsäure in Benzol.

m	*t*	*m*	*t*	
0·150	−0·070	4·13	−0·066	
0·663	−0·139	5·00	+0·032	
1·64	−0·152	6·83	+0·063	Barometerstand = 750 mm
1·87	−0·155	7·53	+0·118	
2·60	−0·132	8·42	+0·180.	

1) Beckmann l. c. 548.

Wie man sieht, ist von Proportionalität zwischen Konzentrationen und Siedepunktsänderung t gar nicht die Rede; vielmehr findet beim anfänglichen Zusatz eine Erniedrigung, beim weiteren eine Erhöhung des Siedepunktes statt und wir dürfen aus dem bloßen Anblick der Zahlen das erwartete Resultat schließen, daß nämlich Essigsäure in den beiden Phasen des untersuchten Systems sicherlich in merklich verschiedenem Molekularzustande sich befindet. Die strenge Berechnung wird uns sofort lehren, daß auch quantitativ der absonderliche Verlauf der Zahlen der von der Theorie geforderte ist.

Die Berechnung des Partialdruckes p der Essigsäure im Dampfraume geschieht nach Formel (7); α, die Aenderung des Dampfdruckes des Benzols, welche einer Aenderung um 1^0 entspricht, beträgt in der Nähe das dem Drucke von 750 mm entsprechenden Temperaturpunktes der Dampfspannungskurve 22·0 mm, wie sich aus der Formel (8)

$$\alpha = 750 \frac{78 \cdot 93{\cdot}4}{2 \cdot 353^2}$$

berechnet. Die Anzahl Moleküle n der Essigsäure, welche auf N Moleküle Benzol enthalten sind, ergiebt sich aus m, welche Größe die Anzahl g Essigsäure auf $N = \frac{100}{78}$ Moleküle Benzol (78 = Molekulargewicht des Benzols im Gaszustande) bedeutet, und dem Molekularzustande der Essigsäure im Benzol. Wie schon hervorgehoben, ist das Molekulargewicht der Essigsäure in Benzol $= 2 \times 60 = 120$ zu setzen (60 Molekulargewicht der Essigsäure bei hoher Temperatur und niederem Druck im Gaszustande), und bedeutet x den Dissociationskoefficienten der Doppelmoleküle, so wird

$$n = \frac{m}{120}(1 + x) .$$

Da Essigsäure bei den hier in Betracht kommenden Konzentrationen nur wenig dissociiert ist, so spielt x die Rolle einer Korrektionsgröße, deren angenäherte Kenntnis wir uns aus den Gefrierpunktsbeobachtungen dieses Stoffes in Benzol sowie besonders aus den Messungen verschaffen, welche Beckmann[1]) an der Benzoesäure, die sich sicherlich analog der Essigsäure verhält, angestellt hat. Wir schließen daraus, daß letzterer Stoff bei dem $m = 0{\cdot}663$ entsprechenden

1) E. Beckmann, Zeitschr. f. physikal. Chem. 6. 440 (1890).

Gehalte zu rund 10 % dissociiert ist. Für die anderen Konzentrationen berechnet sich dann der Dissociationskoefficient aus der Gleichung der Dissociationsisotherme $\frac{m x^2}{1-x} = \frac{0{\cdot}663 \cdot 0{\cdot}1^2}{0{\cdot}9}$.
Setzen wir also

$$\frac{\frac{m}{120}(1+x)}{\frac{100}{78}+\frac{m}{120}(1+x)} = \frac{m(1+x)}{154{\cdot}4 + m(1+x)} = \nu \tag{9}$$

wo wir x im Nenner unbedenklich vernachlässigen können, so wird

$$p = 750\,\nu - 22{\cdot}2\,t\,(1-\nu) \text{ mm Quecksilber.} \tag{10}$$

Wir berechnen so folgende Partialdrucke der Essigsäure, welche den einzeln Konzentrationen entsprechen und unter p ber. 1 verzeichnet sind.

Tab. III.

Partialdruck des Essigsäuredampfes über dessen Lösung in Benzol bei 80°.

m	x	p ber. 1	p ber. 2	Δ	ξ
0·150	0·20	2·4	2·6	2·24	0·87
0·663	0·10	6·6	6·5	2·44	0·70
1·64	0·065	11·8	11·6	2·61	0·60
1·87	0·061	12·9	12·6	2·63	0·58
2·60	0·055	16·1	15·7	2·71	0·54
4·13	0·042	21·8	21·4	2·81	0·48
5·00	0·038	23·6	23·9	2·83	0·47
6·83	0·033	31·4	31·1	2·96	0·40
7·53	0·031	33·5	33·4	2·99	0·38
8·42	0·029	36·4	36·5	3·02	0·36

Was die Genauigkeit der nach Formel (10) berechneten Werthe von p anlangt, so ist zu beachten, daß ein Fehler von 0·01° in der Bestimmung von t in p mit einem Fehler von 0·2 mm Quecksilber eingeht; es darf wohl betont werden, daß einem Versuche, auf gewöhnliche Weise den Dampfdruck einer Lösung so genau zu messen, kaum überwindliche Schwierigkeiten gegenüberstehen, wie ich überhaupt der Meinung bin, daß mit Hülfe des ausgezeichneten Siedeapparates von Beckmann sich Absorptionskoefficienten häufig einfacher und viel genauer werden bestimmen lassen, als

nach irgend einer anderen Methode. Der Partialdruck des Benzols ergiebt sich natürlich zu 750 $-p$.

Man ersieht aus Tab. III sofort, daß Proportionalität zwischen m und p im Sinne des Henry'schen Gesetzes in der gewöhnlichen Fassung nicht einmal angenähert stattfindet; wohl aber muß das Gesetz nach dem eingangs aufgeführten Satze gelten, wenn man eine bestimmte Molekülgattung, etwa die normale, welche der Formel CH_3COOH entspricht, in Betracht zieht.

In Lösung ist nun die Anzahl normaler Moleküle

$$m\sqrt{\frac{(1-x)}{m}} = \sqrt{m(1-x)}$$

proportional. Für den Gaszustand berechnet sich der Dissociationskoefficient ξ aus der Dampfdichte Δ zu

$$\xi = \frac{4{\cdot}146 - \Delta}{\Delta} \tag{11}$$

wo 4·146 der dem Werte $\xi = 0$ entsprechende Grenzwert der Dampfdichte der Essigsäure darstellt; für die Abhängigkeit der Dampfdichte von Temperatur und Druck hat Gibbs[1]) folgende Formel gegeben:

$$\log \frac{2{\cdot}073(\Delta - 2{\cdot}073)}{(4{\cdot}146 - \Delta)^2 p} = \frac{3520}{T} - 11{\cdot}349 \tag{12}$$

worin T die absolute Temperatur bedeutet, welcher Ausdruck sich den zahlreichen Messungen von Bineau, Naumann, Horstmann u. A. gut anschließt.

Wenn wir $T = 273 + 80$ einsetzen (80° Siedepunkt des Benzols), so wird

$$\frac{\Delta - 2{\cdot}073}{(7{\cdot}146 - \Delta)p^2} = 0{\cdot}0201$$

eine Gleichung, welche die bekannte Form der Dissociationsisotherme besitzt und deren Berechnung zu den in Kolumne V verzeichneten Werthen von Δ und mit Hinzuziehung von Gl. (11) zu den in Kolumne VI verzeichneten Werthen von ξ führt.

Die Anzahl normaler Moleküle in der Volumeinheit des Dampfes der Essigsäure ist nun proportional dem Produkte aus der in der Volumeinheit befindlichen Masse des Dampfes und seinem Disso-

1) W. Gibbs, Sil. Journ. 18. 371 (1879).

ciationskoefficienten, also proportional dem Ausdruck

$$\varDelta p \frac{4{\cdot}146 - \varDelta}{\varDelta} = p(4{\cdot}146 - \varDelta).$$

Die Gültigkeit des Henry'schen Gesetzes in der eingangs dargelegten Fassung verlangt also Proportionalität zwischen den Ausdrücken

$$\sqrt{m(1-x)} \quad \text{und} \quad p(4{\cdot}146 - \varDelta).$$

Thatsächlich finden wir denn auch, daß die nach Formel

$$p = 14{\cdot}4 \frac{\sqrt{m(1-x)}}{4{\cdot}146 - \varDelta} \text{ mm Quecksilber} \tag{13}$$

berechneten, in Kolumne IV der Tabelle III verzeichneten Druckwerthe mit dem unmittelbaren Ergebnis des Experiments in ausgezeichneter Weise übereinstimmen. Diese Messungen im Verein mit den über die Vertheilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln angestellten beweisen wohl zur Genüge, daß der Satz über die Konstanz der Theilungskoeffizienten einer bestimmten Molekülgattung zwischen zwei Phasen zu mit der Erfahrung völlig stimmenden Resultaten führt.

Der Proportionalitätsfaktor 14·4 entspricht (bei Berücksichtigung des in Gl. (13) befolgten Maaßsystems) dem Löslichkeitskoeffizienten der (CH_3COOH)-Moleküle; natürlich kann in gleicher Weise auch der Löslichkeitskoefficient der $(CH_3COOH)_2$-Moleküle gefunden werden. Vernachlässigt wurde in den obigen Rechnungen die bei den geringen Temperaturänderungen jedenfalls nur äußerst geringe Aenderung des Löslichkeitkoefficienten mit der Temperatur.

Einen zweiten Fall, der in genau der gleichen Weise behandelt werden kann, verdanke ich der gütigen Mittheilung von Herrn Professor Dr. Beckmann in Leipzig, welcher bei Zusatz von Wasser zu siedendem Aether folgende Siedepunktserniedrigungen erhielt:

Tab. IV.

Wasser in Aether.

m	t	
0·429	−0·206	
1·032	−0·206	Barometerstand = 752 mm
1·315	−0·324.	

Man sieht auch hier, daß zwischen m und t durchaus keine Proportionalität stattfindet, daß also Wasser unter den Bedingungen des Versuchs in Aether gelöst und als Gas nicht in gleichem Molekularzustande sich befindet. Im Wasserdampfe kommen nach Avogadro's Gesetz nun fast ausschließlich H_2O-Moleküle vor, wenn auch der ein wenig größer als dem Molekulargewichte 18 entsprechend gefundene Werth der Dampfdichte auf Bildung von Doppelmolekülen in sehr geringer Anzahl hindeutet. Es muß demnach das Wasser im Aether in einem anderen Molekularzustande wie dem normalen vorkommen.

Dies Resultat können wir auf einem unabhängigen zweiten Wege bestätigen. Bei der dritten Beobachtung nämlich war der Aether mit Wasser gesättigt; der Werth $m = 1{\cdot}315$ ist von mir mit Hülfe der von Walker[1]) neulich bis zu 30° gemessenen Löslichkeit des Wassers in Aether mittelst einer kleinen Extrapolation bis auf 35·2° berechnet worden. Nun können wir den Partialdruck des Wasserdampfes über mit Wasser gesättigten Aether anderweitig berechnen; er ist nämlich gleich dem Partialdruck des Wasserdampfes über mit Aether gesättigten Wasser bei der gleichen Temperatur und dieser ergiebt sich, indem wir beachten, daß durch die 9 % Aether, welche vom Wasser bei 35·2° gelöst werden, der Dampfdruck des reinen Wassers bei dieser Temperatur, 40·0 mm, um 2·5 % erniedrigt wird, zu 39·0 mm. Der Partialdruck des Aethers war nun bei dem dritten Versuch gleich $752{\cdot}0 - 39{\cdot}0 = 718$ mm; der Dampfdruck des reinen Aethers würde bei einer Temperaturerniedrigung um 0·324°

$$752 - 26{\cdot}7 \times 0{\cdot}324 = 743{\cdot}4 \text{ mm Quecksilber}$$

betragen, weil der Dampfdruck des Aethers in der Nähe von 35·5° für 1° Temperaturerniedrigung um 26·7 mm sinkt. Aus der van 't Hoff'schen Dampfdruckformel finden wir, daß

$$\frac{743{\cdot}4 - 713}{713} = 0{\cdot}0426$$

beträgt, d. h. daß beim dritten Versuch auf 100 Molekele Aether 4·26 Wassermoleküle gelöst waren.

Wäre nun Wasser im Aether in Gestalt von Doppelmolekülen vorhanden, so müßte die relative Dampfspannungserniedrigung

$$\frac{1{\cdot}315 \cdot 74}{36 \cdot 100} = 0{\cdot}0270$$

1) Walker, Zeitschr. physik. Chem. 5. 196 (1890).

betragen, und sie würde doppelt so groß sein, wenn Wasser im Aether in Gestalt von normalen Molekülen gelöst wäre. Aus dem obigen Werth berechnet sich nun, daß bei dieser Konzentration der Dissociationskoeffizient 0·58 beträgt.

Für die beiden geringeren Konzentrationen läßt sich der Partialdruck des Wasserdampfes über der Lösung wiederum auf zwei Wegen berechnen; zunächst aus den beobachteten Siedepunktserniedrigungen nach Gl. (7), wo x für die betreffenden beiden Konzentrationen nach der Gleichung der Dissociationsisotherme zu ermitteln ist; sodann mit Hülfe des Vertheilungssatzes, demzufolge p der Anzahl der normalen Wassermoleküle proportional, also gleich

$$39{\cdot}0 \frac{m x}{1{\cdot}315 \cdot 0{\cdot}58}$$

sein muß. Auf diese Weise gelangen wir zu

Tab. V.

Partialdruck des Wasserdampfes über dessen Lösung in Aether bei 35·3°.

m	x	p ber. 1	p ber. 2
1·315	0·58	39·0	39·0
1·032	0·62	31·7	32·8
0·429	0·76	17·0	16·8

Die Uebereinstimmung zwischen den auf zwei Wegen berechneten p-Werthen kann wohl als genügend angesehen werden. Jedenfalls setzen es die obigen Zahlen außer Zweifel, daß Wasser in Aether gelöst zum größeren Theile aus normalen Molekülen besteht, weil andernfalls die Abhängigkeit der beobachteten Siedepunktserniedrigungen von der Konzentration eine gänzlich andere sein müßte.

Den obigen Messungen entnehmen wir gleichzeitig das praktische Resultat, daß auch bei Anwendung flüchtiger Stoffe als gelöster Körper der Beckmann'sche Siedeapparat sichere Auskunft über den Molekularzustand derselben zu liefern und uns gleichzeitig in den Besitz ihrer Absorptionskoefficienten zu setzen im Stande ist.

Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß, obwohl die von mir gewählte Fassung des Vertheilungssatzes an molekulare

Vorstellungen anknüpft, er gleichwohl von diesen unabhängig ist, und daß alle Folgerungen aus ihm auch dann bestehen bleiben würden, wenn man Avogadro's Satz für Lösungen als nicht gültig annähme. Mit der Bezeichnung, ein Stoff hat in zwei verschiedenen Phasen gleiche Molekulargröße oder nicht, ist nämlich im Obigen wie früher bei ähnlicher Gelegenheit[1]) keine andere Vorstellung verbunden, als daß der betreffende Stoff in diesen beiden Phasen unter Partialdrucken steht, die sich wie seine Konzentrationen verhalten oder nicht, oder, allgemeiner ausgedrückt, daß die Aenderungen der freien Energie einer bestimmten Menge des Stoffes bei gleicher procentischer Konzentrationsänderung in beiden Phasen gleich sind oder nicht. Der methodische Verstoß, welchen ich hierdurch gegen das Grundprinzip der Naturwissenschaft, niemals mit einem größeren Aufwand an Hypothese zu operieren, als unbedingt für den vorliegenden Zweck erforderlich, begangen habe, möge im Hinblick darauf entschuldigt werden, daß durch Hinzuziehung molekularer Vorstellungen die Darstellung an Anschaulichkeit und der Ausdruck an Kürze ungemein gewinnt.

Physikal. Inst. Göttingen. Februar 1891.

---

1) Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. 6. 17 (1890).

Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

(Vierte Mittheilung[1]).

Vorgelegt von F. Klein.

In zwei voraufgegangenen Mittheilungen sind für rationale Raumcurven R_n^3 die Hyperosculationsebenen „α^4", die Schmiegungsberührebenen „$\alpha^3\beta^2$" und die Trefftangenten „$(\alpha^2\beta)$" bezüglich der Coincidenzen ihrer Stellen α untersucht worden.

---

1) Vgl. diese Nachrichten. 1888 No. 5, 1890 No. 10, 1890 No. 15.

Im Nachfolgenden sollen die zwei noch übrigen Elementarsingularitäten einer Raumcurve, nämlich die Tritangentialebenen „$\alpha^2\beta^2\gamma^2$" und die Quadrisecanten „$(\alpha\beta\gamma\delta)$" in demselben Sinne ihre Erledigung finden, sowohl in ihren Beziehungen zu einander, wie zu den drei ersterwähnten Singularitäten.

Man wird wiederum die Discriminanten und Resultanten der binären Formen, welche, gleich Null gesetzt, die Werthe α zu Wurzeln besitzen, in Elementarfactoren auflösen, welche in dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereiche der Größen δ irreducibel sind.

Zu dem Zwecke sind vorerst die Grade der gemeinten Elementarfactoren in den δ festzustellen.

Hierzu erweisen sich indessen die bisher angewandten Hülfsmittel als nicht völlig zureichend, insofern bei einer Reihe von Zerlegungen immer je ein Factor übrig bleibt, für den eine directe Gradbestimmung auf unüberwindliche Schwierigkeiten zu stoßen scheint.

Man kann jedoch diese Schwierigkeiten umgehen sobald man die früher auseinandergesetzte Methode des Projicirens in geeigneter Weise mit dem Chasles'schen Correspondenzprincip verknüpft. Dadurch gelingt es, zwischen der jedesmal gesuchten Gradzahl und anderen, bereits bekannten eine Relation herzustellen.

Es möge das Verfahren an dem Beispiel der Discriminante der Tritangentialebenen -Form $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ ausführlicher erläutert werden.

Wie die geometrische Anschauung zeigt, existiren hier fünf verschiedene Möglichkeiten für ein (durch je eine einzige Bedingung herbeigeführtes) Zusammenrücken zweier Berührstellen.

Erstlich können zwei der Tritangentialebenen in der Weise consecutiv werden, daß die drei Berührungspunkte auf deren Schnittlinie zu liegen kommen (sodaß die letztere eine Trisecante der Curve R_m^3 wird).

Sodann können sich vier solcher Ebenen zu einer einzigen, viermal berührenden Ebene vereinigen. Des Weiteren zwei solcher Ebenen zu einer einmal osculirenden und noch zweimal berührenden.

Viertens kann eine Coincidenz zweier Berührstellen ein und derselben Tritangentialebene eintreten, sodaß die letztere einmal hyperosculirt und außerdem noch einmal berührt.

Endlich kann es noch vorkommen, daß durch eine Tangente

der Curve zwei verschiedene Ebenen gehen, welche je noch zweimal berühren.

Man hat demnach, bei der eingeführten Bezeichnungsweise, für die Discriminante $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ den Zerlegungsansatz:

$$D[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]^a [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]^b [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^c [\alpha^4\beta^2]^d [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]^e$$

wo die Exponenten a, b, c, d, e zu bestimmende ganze positive Zahlen sind.

Nun lassen sich die Grade der vier ersten Elementarfactoren, wie auch der Discriminante selbst, unter Benutzung der früher angegebenen Hülfsmittel finden (vgl. die weiter unten aufgestellte Tabelle) und es ist nur der letzte Factor rechterhand, dem man so nicht beikommen kann.

Zuvörderst denken wir uns wiederum im vierdimensionalen Raume eine punktallgemeine R_n^4 nebst einer beliebigen Geraden g und fragen: Von wieviel Punkten P auf g läßt sich die R_n^4 so in eine R_n^3 projiciren, daß die letztere der invarianten Bedingung $\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2] = 0$ genügt? Die Anzahl derartiger Punkte P ist zugleich der Grad der in Rede stehenden Invariante in den δ.

Man construire nunmehr auf der Curve R_n^4 folgende Correspondenz. Durch irgend eine Tangente $((\alpha_1^2))$ lassen sich $2(n-4)(n-5)$ Räume M_3 legen, welche die Curve noch zweimal berühren. Diese Räume M_3 treffen die Gerade g in ebensoviel Punkten Q. Von jedem solchen Punkte Q gehen, außer der jeweils ihn ausschneidenden M_3 noch $\frac{1}{3}(n-3)(n-4)(n-5) - 1$ weitere aus, welche die R_n^4 gleichfalls dreimal berühren. Ein Berührungspunkt der letzteren Art heiße β.

Dadurch entsprechen irgend einer Stelle α auf R_n^4 im Ganzen $2(n-4)(n-5)\{4(n-3)(n-4)(n-5) - 3\}$ Stellen β und umgekehrt, und es müssen demnach doppelt so viele Coincidenzen $\alpha = \beta$ existiren.

Diese Coincidenzen zerfallen in vier getrennte Klassen.

Die erste besteht aus Tripeln α_1, α_2, α_3, in denen eine M die R_n^4 berührt und deren Verbindungsebene $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zugleich g trifft. Jede Stelle α repräsentirt eine einfache Coincidenz.

Die zweite enthält die Quadrupel α_1, α_2, α_3, α_4, in denen eine M_3 die R_n^4 berührt. Eine derartige Stelle α zählt aber als Coincidenz sechsfach. Denn durch eine Tangente $((\alpha_1^2))$ gehen zunächst die drei M_3: $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2$, $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2$, $\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2$. Greift man aus diesen etwa die erste heraus, so passiren durch den Treffpunkt Q auf g außer

ihr noch zwei M_3, welche die Curve in α_1 und zudem noch zweimal berühren, nämlich $\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_4^2$, $\alpha_1^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2$.

Die dritte Klasse umfaßt diejenigen Stellen α, wo eine M_3 osculirt und überdies noch zweimal, etwa in γ und δ, berührt. Coincidenzen dieser Klasse sind siebenfach zu rechnen. Zuvörderst entfällt von den durch eine Tangente $((\alpha^2))$ legbaren Tritangential-M_3 der R_n^4 nur eine einzige in die vorliegende: $[\alpha^3\gamma^2\delta^2]$ (wie an dem Beispiel einer R_6^4 leicht direct bestätigt werden kann), dagegen durch den Treffpunkt Q auf g außer jener noch eine zweite, wie aus dem früher studirten Verhalten der Discriminante $D[\alpha^3\beta^2]$ hervorgeht.

Andererseits lehrt das für die Discriminante der zu einer R_n^3 gehörigen Doppeltangentenform $[\alpha^2\beta^2]$ Hergeleitete, daß von den Tritangential-M_3 der R_n^4, welche sich in einer Tangente $((\gamma^2))$ schneiden, genau zwei mit $\alpha^3\gamma^2\delta^2$ zur Deckung kommen, während von dem Treffpunkt Q auf g das Nämliche gilt, wie oben. Trotzdem zählt die Coincidenz γ wiederum dreifach (wegen des Hineinrückens einer Verzweigung).

Wiederholt man die letzte Betrachtung für die Stelle δ, so erkennt man in der That, daß unsere Coincidenz $1 + 3 + 3 = 7$-mal zählt.

Der letzten Klasse endlich gehören die Stellen α an, für welche es zwei getrennte M_3: $\alpha^2\gamma^2\delta^2$, $\alpha^2\gamma_1^2\delta_1^2$ giebt, deren gemeinsame Ebene die Gerade g trifft.

Offenbar sind das doppelt zählende Coincidenzen. Projicirt man der Reihe nach für jede Klasse die R_n^4 von einem entsprechenden Punkte Q auf g, so ist die Projectionscurve R_n^3 der Art, daß für sie jeweils der erste, zweite, dritte und fünfte Elementarfactor der für $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ angesetzten Zerlegung verschwindet.

Entnimmt man jetzt der Tabelle C die Grade der drei erstgenannten Factoren, so bestimmt sich vermöge des Correspondenzprincips der Grad des letzten:

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2,\ \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2] = 2(n-4)(n-5)\{4(n-3)(n-4)(n-5)-3\} \\ -3(n-2)(n-4)(n-5) \\ -21(n-4)(n-5)(n-6) - 8(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \\ = 2(n-4)(n-5)(4n^3-52n^2+228n-345).$$

Das gefundene Ergebniß läßt sich noch auf eine zweite Art begründen, indem man sich eine ähnliche Correspondenz, statt auf der Curve R_n^4, auf der Geraden g bildet.

Durch einen Punkt P auf g gehen $\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)$ M_2 von Typus $\alpha^2\beta^2\gamma^2$; man lege durch die Tangente $((\alpha^2))$ die weiteren M_2: $\alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2$, welche g in Punkten Q treffen mögen. So entsprechen jedem Punkte P $4(n-3)(n-4)(n-5)\{2(n-4)(n-5)-1\}$ Punkte Q u. umg., sodaß die Anzahl der Coincidenzen $P = Q$ doppelt so groß ist.

Man hat wiederum vier Klassen von Coincidenzen. Entweder wird die R_n^4 von der Tangente $((\alpha^2))$ aus in eine R_n^3 mit Selbstberührung projicirt — solcher Stellen α giebt es $2(n-4).2(n-3)(n-5)$ — oder von einem Punkte $P = Q$ aus in eine R_n^3 mit einer M_2: $\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta_d^2$ resp. $\alpha^3\beta^2\gamma^2$ oder endlich mit einem M_2-Paare: $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, $\alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2$. Diese vier Arten von Coincidenzen zählen der Reihe nach einfach, $4.3.2 = 24$ fach, $3+3 = 6$ fach, $1+1 = 2$ fach. Somit liefert das Correspondenzprincip als Grad der Invariante $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$ die obige Zahl:

$$4(n-3(n-4)(n-5)\{2(n-4)(n-5)-1\} - 8(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$
$$- 18(n-4)(n-5)(n-6) - 4(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$= 2(n-4)(n-5)(4n^3-52n^2+228n-345)$$

q. e. d.

Nunmehr lassen sich die unbekannten Exponenten a, b, c, d, e des Zerlegungsansatzes:

$$D[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]^a [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]^b [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^c [\alpha^4\beta^2]^d [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]^e$$

durch Auflösung einfacher diophantischer Gleichungen ermitteln. Nach Gleichsetzung der beiderseitigen Grade und Weglassung des gemeinsamen Factors $2(n-4)(n-5)$ kommt:

$$8(n-3)(n-4)(n-5) - 2 = \left(a - \frac{3\varepsilon}{2}\right)(n-2) + \frac{b-12\varepsilon}{3}(n-6)(n-7)$$
$$+3\left(c - \frac{7\varepsilon}{2}\right)(n-6) + 4e(n-3)(n-4)(n-5) - 3e + 4d.$$

Der Coefficient von n^3 ist links 8, rechts $4e$, mithin $e = 2$. Setzt man dies ein, so bleibt:

$$0 = (a-3)(n-2) + \frac{b-24}{3}(n-6)(n-7) + 3(c-7)(n-6) - 4(1-d).$$

Da der Coefficient von n^2 verschwinden muß, so gilt $b = 24$. Für $n = 6$ ergiebt sich $4(a-3) = 4(1-d)$, oder $a + d = 4$, während für $n = 2 : 3(7-c) = 1-d$ wird.

Von den drei Möglichkeiten $a = 3$, $d = 1$; $a = d = 2$; $a = 1$, $d = 3$ sind die beiden letzteren auszuschließen, da sie keinen ganzzahligen Werth von c zulassen würden.

$d = 1$ hat aber $c = 7$ zur Folge.

Demnach existirt nur das einzige Lösungssystem:

$$a = 3, \quad b = 24, \quad c = 7, \quad d = 1, \quad e = 2.$$

Was die weiteren Zerlegungen unserer Discriminanten und Resultanten angeht, so möge nunmehr eine kürzere Fassung gestattet sein.

Für die Discriminante der Quadrisecantenform besteht die vorläufige Zerfällung:

$$D[(\alpha\beta\gamma\delta)] = [(\alpha\beta\gamma\delta)^2]^a \, [(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]^b \, [(\alpha^2\beta\gamma)]^c \cdot$$
$$+ [((\alpha\beta))]^{d \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2}} \cdot [(\alpha\beta\gamma\delta), \; (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]^e$$

wo die Zahl d ev. auch rational sein könnte.

Der erste Factor entspricht der Erscheinung, daß zwei Quadrisecanten consecutiv werden (ohne sich jedoch zu schneiden); die übrigen sind ohne Weiteres zu interpretiren. Der Grad des fünften Factors wird wieder indirect vermöge einer geeigneten Correspondenz auf der Curve R_n^4 gewonnen, und nimmt den Werth an:

$$\tfrac{4}{3}(n-2)(n-3)(n-4)\left\{\tfrac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4) - 1\right\}$$
$$- (n-1)(n-2)(n-4)(n-5)$$
$$- \tfrac{5}{4}(n-2)(n-3)(n-4)^2(n-5) - \tfrac{1}{8}(n-1)(n-2)^2(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$= \tfrac{1}{72}(n-2)(n-4)(n-5)(n-6)(8n^3 - 41n^2 + 30n + 111).$$

Durch Gradvergleichung und Weglassung des Factors $(n-2$ $(n-4)$ gelangt man jetzt zur Identität:

$$\tfrac{2}{3}(n-3)\left\{\tfrac{1}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)-1\right\} = \frac{a-2e}{2}(n-1)(n-5)$$

$$+\frac{b-30e}{24}(n-3)(n-4)(n-5)+2c(n-3)+\frac{2d-e}{8}(n-1)(n-2)(n-5)$$

$$+\frac{e}{9}(n-2)(n-3)^2(n-4)-\frac{4e}{3}(n-3).$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten von n^5 giebt $e = 2$. Damit verwandelt sich die Identität in:

$$0 = \frac{a-4}{2}(n-1)(n-5)+\frac{b-60}{24}(n-3)(n-4)(n-5)$$

$$+\frac{d-1}{4}(n-1)(n-2)(n-5)$$

$$+2(c-1)(n-3).$$

Für $n = 5$ schließt man $c = 1$, sodann für $n = 1 : b = 60$, endlich für $n = 2 : a = 4$, was von selbst $d = 1$ zur Folge hat.

Es resultirt daher das einzige Werthsystem:

$$a = 4, \quad b = 60, \quad c = 1, \quad d = 1, \quad e = 2.$$

Von den zehn Resultanten der fünf Singularitätenformen sind uns drei bereits von früher her bekannt; weitere drei stellen sich als irreducibel heraus, sodaß nur noch vier Zerlegungen in Betracht kommen.

Dies sind erstens $R[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$; zweitens $R[\alpha^3\beta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$; drittens $R[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\beta)]$, viertens $R[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]$.

Erstens. $R[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]^a . [\alpha^4\beta^2]^b$.

$$12(n-3)(n-4)(n-5) = 4a(n-4)(n-5)(3n-11)+8b(n-4)(n-5).$$

$$a = 1, \quad b = 1.$$

Zweitens. $R[\alpha^3\beta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^3\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]^a . [\alpha^4\beta^2]^b . [\alpha^2\beta^2\gamma^2]^c$.

$$20(n-3)(n-4)^2(n-5) = 4a(n-4)(n-5)(5n^2-38n+74)$$

$$+8b(n-4)(n-5)+6c(n-4)(n-5)(n-6).$$

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 2.$$

Drittens. $R[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\beta)] = ((\alpha\beta))^{a(n-3)(n-4)} . [(\alpha^2\beta\gamma)]^b . [(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\varepsilon)]^c$.

$$(n-2)^2(n-3)^2(n-4) = \frac{a}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$
$$+ 2b(n-2)(n-3)(n-4) + c(n-\tfrac{1}{2})(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$
$$a = 1,\ b = 2,\ c = 1.$$

Viertens $R[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]^a \cdot [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\delta)]^b$.

$$8(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 12a(n-2)(n-4)(n-5)$$
$$+ 8b(n-2)(n-4)(n-5)(n-6).$$
$$a = 2,\ b = 1.$$

Im dritten Falle ist der letzte Elementarfactor, in den beiden ersten jedesmal der erste indirect untersucht worden, wiederum mit Hülfe von Correspondenzen auf der R_n^4.

In den folgenden drei Tabellen stellen wir noch einmal alle Ergebnisse übersichtlich zusammen; in der ersten die fünf Singularitätenformen mit ihren Graden in α, wie in den δ, in der zweiten die Zerlegungen der fünf Discriminanten und zehn Resultanten, in der letzten endlich der 24 Elementarfactoren Gewichte (aus denen vermöge Streichung des Factors $2(n-3)$ die bez. Grade hervorgehen), geordnet nach dem Grade in n.

Tabelle A.

Die fünf Singularitätenformen.

		Grad in α.	Grad in den δ.
Ebenen	$[\alpha^4]$	$4(n-3)$	1
„ „	$[\alpha^3\beta^3]$	$6(n-3)(n-4)$	$2(n-4)$
„ „	$[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$	$4(n-3)(n-4)(n-5)$	$2(n-4)(n-5)$
Gerade	$[(\alpha^2\beta)]$	$2(n-2)(n-3)$	$n-2$
„ „	$[(\alpha\beta\gamma\delta)]$	$\frac{1}{6}(n-2)(n-3)^2(n-4)$	$\frac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)$.

Tabelle B.

Die Zerlegungen der fünf Discriminanten und zehn Resultanten.

Discriminanten.

$$D[\alpha^4] = [(\alpha^3)] \cdot [\alpha^5] \cdot$$
$$D[\alpha^3\beta^3 = [(\alpha^3)]^{(2n-8)(2n-9)}[\alpha^5] \cdot [\alpha^4\beta^2] \cdot [\alpha^3\beta^3]^6 \cdot [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^2 \cdot [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$$
$$D[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]^3 [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2)^{24} [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^7 [\alpha^4\beta^2] \cdot [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]^2 \cdot$$
$$D[(\alpha^2\beta)] = [(\alpha^3)] \cdot [(\alpha^2\beta\gamma)]^2 [((\alpha\beta))]^2 [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)] \cdot$$
$$D[(\alpha\beta\gamma\delta)] = [(\alpha\beta\gamma\delta)^2]^4 [(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]^{60} [(\alpha^2\beta\gamma)] [((\alpha\beta))]^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} [(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]^2 \cdot$$

Resultanten.

$$R\{[\alpha^4], [\alpha^3\beta^2]\} = [\alpha^4\beta^2]\cdot[(\alpha^3)]^{2(n-4)}\cdot[\alpha^5]^2\cdot$$
$$R\{[\alpha^4], [\alpha^2\beta^2\gamma^2]\} = [\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]\cdot[\alpha^4\beta^2]$$
$$R\{[\alpha^4], [(\alpha^2\beta)]\} = [\alpha^4, (\alpha^2\beta)][(\alpha^3)]^2\cdot$$
$$R\{[\alpha^4], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^4, \alpha\beta\gamma\delta)]\cdot$$
$$R\{[\alpha^3\beta^2], [\alpha^2\beta^2\gamma^2]\} = [\alpha^3\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2][\alpha^4\beta^2]^2\cdot[\alpha^3\beta^2\gamma^2]^2$$
$$R\{[\alpha^3\beta^2], [(\alpha^2\beta)]\} = [(\alpha^3)]^{2(n-4)}[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]^2\cdot[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\gamma)]$$
$$R\{[\alpha^3\beta^2], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^3\varepsilon^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$$
$$R\{[\alpha^2\beta^2\gamma^2], [(\alpha^2\beta)]\} = [(\alpha^2\delta), \alpha^2\beta^2\gamma^2]\cdot[(\alpha^2\beta), \alpha^2\beta^2\gamma^2]^2$$
$$R\{[\alpha^2\beta^2\gamma^2], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^2\varepsilon^2\zeta^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$$
$$R\{[(\alpha^2\beta)], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [((\alpha\beta))]^{(n-3)(n-4)}[(\alpha^2\beta\gamma)]^2\cdot[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\varepsilon)].$$

Tabelle C.

Gewichte der 24 Invarianten.

1. $[\alpha^5]$ — $10(n-3)(n-4)$
2. $[(\alpha^3)]$ — $6(n-2)(n-3)$
3. $[\alpha^4\beta^2]$ — $16(n-3)(n-4)(n-5)$
4. $[\alpha^3\beta^3]$ — $9(n-3)(n-4)(n-5)$
5. $[\alpha^4, (\alpha^2\beta)]$ — $12(n-2)(n-3)(n-4)$
6. $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ — $14(n-2)(n-3)(n-4)$
7. $[((\alpha\beta))]$ — $(n-1)(n-2)(n-3)$
8. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$ — $12(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$
9. $[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$ — $8(n-3)(n-4)(n-5)(3n-11)$
10. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ — $4(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
11. $[(\alpha^2\gamma), \alpha^3\beta^2]$ — $20(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
12. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$ — $4(n-2)(n-3)^2(n-4)$
13. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]$ — $24(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
14. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$ — $\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)(n-5)(n-7)$
15. $[\alpha^3\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$ — $8(n-3)(n-4)(n-5)(5n^2-38n+74)$
16. $[(\alpha^2\delta), \alpha^2\beta^2\gamma^2]$ — $16(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$
17. $[\alpha^4, (\alpha\beta\gamma\delta)]$ — $\frac{10}{3}(n-2)(n-3)^3(n-4)$
18. $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$ — $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

19. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$ $4(n-3)(n-4)(n-5)(4n^3-52n^2+228n-345)$

20. $[\alpha^3\varepsilon^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$ $\frac{16}{3}(n-2)(n-3)^3(n-4)^2$

21. $[(\alpha^2\varepsilon), (\alpha\beta\gamma\delta)]$ $(2n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)(n-5)$

22. $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$ $\frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4)^2)(n-5)$

23. $[\alpha^2\varepsilon^2\zeta^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$ $4(n-2)(n-3)^3(n-4)^2(n-5)$

24. $[(\alpha\beta\gamma\delta),(\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$ $\frac{1}{36}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(8n^3-41n^2+30n+111)$.

Man bemerkt, daß die an den Gewichtszahlen der früher berechneten zehn Invarianten gemachten Beobachtungen zum Theil auch für die neu hinzutretenden dreizehn Bildungen gültig bleiben, zum Theil aber auch verloren gehn.

Nach wie vor ist der Grad in n um die Einheit größer, als die Anzahl der jedesmal links stehenden, von einander verschiedenen Argumente. Dem Auftreten der linearen Factoren $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ... entspricht es, daß das bez. singuläre Ereigniß bei Curven von der Ordnung 1, 2, 3 . . . noch nicht eintreten kann, während umgekehrt das Fehlen des Factors $n-1$ resp. $n-2$ ein Zeichen dafür ist, daß die Gerade resp. der Kegelschnit die gemeinte Singularität (in uneigentlichem Sinne) zuläßt.

Dagegen stößt man jetzt in einigen Fällen auch auf rationale Factoren von der Form n a, wo a nicht mehr ganzzahlig ist, wie $n-\frac{11}{3}$ (No. 9) und $n-\frac{1}{2}$ (No. 21), weiterhin auf quadratische und cubische Factoren der Art (No. 15, 19, 24), die einer Zerspaltung in rationale Linearfactoren widerstehn. Endlich kann auch da, wo nur Factoren vom Typus $n-1$, $n-2$, $n-3$ . . . eingehen, die Symmetrie nach der Mitte hin aufgehoben sein, wie bei No. 20, 23.

Wir gehen dazu über, nach Anleitung der letzten Mittheilung auch für die neu gewonnenen Zerlegungen die Vielfachheit der einzelnen Elementarfactoren unmittelbar aus dem Verhalten der Anfangsglieder der Singularitätenformen selbst zu erkennen. Indessen mag die Vorführung der Fälle, in denen der betr. Exponent die Einheit übersteigt, genügen.

Handelt es sich also z. B. um die Singularität $\alpha^4\beta^2$, so mache man die linken Seiten der Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind, damit dieselbe in der canonischen Form $0^4\beta^2$ eintrete, mit einer beliebig kleinen Größe ε proportional, und entwickele die betheiligten Singularitätenformen nach aufsteigenden

Potenzen von α soweit, als die successiven Coefficienten den Factor ε (ein oder mehrmals) zulassen. So hat man hier:

$$[\alpha^4] = \varepsilon + \ldots; \; [\alpha^3\beta^2] = \varepsilon + a\varepsilon\alpha + \ldots; \; [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon + b\varepsilon\alpha + \ldots$$

sodaß die Resultante der ersten und zweiten, wie der ersten und dritten Form, ferner die Discriminanten der beiden letzten Formen mit der ersten Potenz von ε vergleichbar werden, und allein die Resultante der beiden letzten Formen mit der zweiten Potenz von ε. Damit weiß man zugleich, daß der Elementarfactor $[\alpha^4\beta^2]$ überall nur einmal auftritt, ausgenommen die Zerlegung von $R\{[\alpha^3\beta^3], [\alpha^2\beta^2\gamma^2]\}$, wo er sich zum Quadrat erhebt.

Danach sollen die noch in Frage kommenden Vielfachheiten der Reihe nach kurz erledigt werden.

No. 8. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$. Zunächst kommt, bei Verlegung von α nach der Stelle Null:

$$[\alpha^3\beta^3] = \varepsilon^2 + a\varepsilon\alpha + \ldots; \; [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon + b\varepsilon a + \ldots$$

Somit steigt ε in der Discriminante der ersten, wie in der Resultante beider Formen bis zum zweiten Grade an. Dagegen ist für die Discriminante von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ die erste Potenz von ε erst ein einzelner Beitrag. Die beiden weiteren Beiträge erzielt man, wenn man nunmehr β resp. γ zur Stelle Null macht. Dann wird:

$$[\alpha^2\beta^3\gamma^2] = \varepsilon^2 + \varepsilon c\beta + \ldots, \; [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^2 + \varepsilon d\gamma + \ldots$$

es muß indessen, wie eine genauere Untersuchung lehrt, ganz wie bei $n = 2$, beidemal die dritte Potenz von ε als Factor berücksichtigt werden. So entsteht durch Zusammenfassung die $1 + 3 + 3 = 7^{\text{te}}$ Potenz von $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$, wie die Tabelle B bestätigt.

No. 10. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$. Jede der drei Stellen α, β, γ ist gleichberechtigt. Man hat etwa für $\alpha = 0$:

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon + a\varepsilon\alpha + \ldots$$

und die Discriminante wird also ε zur ersten, somit allgemein den Factor $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ zur $3 . 1 = 3^{\text{ten}}$ Potenz enthalten.

Dieselbe Betrachtung ist fast wörtlich für die Invariante No. 18: $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$ zu wiederholen; ihre Vielfachheit in der Discriminante von $[(\alpha\beta\gamma\delta)]$ muß die $4 . 1 = 4$fache sein.

No. 12. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$. Für $\alpha = 0$ sind die Entwickelungen:

$$[(\alpha^2\beta)] = \varepsilon^2 + a\varepsilon\alpha + \ldots; \; [\alpha\beta\gamma\delta)] = \varepsilon + b\varepsilon\alpha + \ldots,$$

und der Factor $[(\alpha^2\beta\gamma)]$ tritt in der That bei $D[(\alpha^2\beta)]$ und $R\{[(\alpha^2\beta)],\ [(\alpha\beta\gamma\delta)]\}$ doppelt, bei $D[\alpha\beta\gamma\delta)]$ nur einmal auf.

No. 14. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$.

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^3 + a_1\varepsilon^2\alpha + a_2\varepsilon\alpha^2 + \ldots$$

Die Discriminante wird mit ε^6 vergleichbar. Wegen der Gleichberechtigung der vier Argumente ist der Exponent von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$ in der Zerlegung von $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ gleich $4.6 = 24$.

Ganz analog gestaltet sich die Untersuchung von No. 22: $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$. Die Entwickelung von $[(\alpha\beta\gamma\delta)]$ beginnt mit ε^4, die Discriminante ist noch durch ε^{12} theilbar, also allgemein durch die $5.\ 12 = 60^{\text{te}}$ Potenz von $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$.

No. 19. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2,\ \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$.

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^2 + a\varepsilon\alpha + \ldots$$

Die Discriminante läßt ε, also auch die Invariante doppelt als Factor zu. Ganz analog für No. 24: $[(\alpha\beta\gamma\delta),\ (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$.

Eine besondere Stellung nimmt der Elementarfactor No. 7: $[((\alpha\beta))]$ ein, insofern er zu Exponenten Veranlassung giebt, die von der Ordnung n der Curve abhängig sind. Es hat das darin seinen Grund, daß durch einen Doppelpunkt $((\alpha\beta))$ einer R_n^3 $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Quadrisecanten $(\alpha\beta\gamma\delta)$ an dieselbe gehen. Es gilt:

$$[(\alpha^2\beta)] = \varepsilon + a\varepsilon\alpha + \ldots;\ [(\alpha\beta\gamma\delta)] = \varepsilon^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)} + b\varepsilon^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)-1}.\alpha + \ldots$$

Die Discriminante der ersten Form wird mit ε^1, die der zweiten mit $\varepsilon^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{2}-1} = \varepsilon^{\frac{1}{4}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$, endlich die Resultante beider mit $\varepsilon^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)}$ vergleichbar. Wegen der Gleichberechtigung von α und β erhöhen sich aber für den Elementarfactor $[((\alpha\beta))]$ selbst die angegebenen Exponenten auf das Doppelte.

Die bisher herangezogenen Methoden machen Verallgemeinerungen auf Curven R_n^d in Räumen von d Dimensionen ausführbar. (Vgl. die dritte Mittheilung). Es mögen hier noch zwei naheliegende und besonders interessante Fälle der Art eine Erwähnung finden, die Zerlegungen der Discriminanten $D[\alpha_1^2\alpha_2^2\ \ldots\ \alpha_d^2]$ und $D[(\alpha_1, \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{2d-2})]$:

$$D[\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2] = [\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2, (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d)]^d . [\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_{d+1}^2]^{(d+1)d(d-1)} . [\alpha_1^3\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2]^{3d-2}$$

$$+ [\alpha_1^4\alpha_2^2\ldots\alpha_{d-1}^2] . [\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2, \alpha_1^2\beta_2^2\ldots\beta_d^2]^2 .$$

$$D[(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-2})] = [(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-2})^2]^{2d-2} [(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-1})]^{(2d-1)(2d-2)(2d-3)} .$$

$$+ [(\alpha_1^2\alpha_2\ldots\alpha_{2d-3})] . [(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-2}), (\alpha_1\beta_2\ldots\beta_{2d-2})]^2 .$$

Lehrreich ist wiederum der Vergleich mit den untersten Fällen $d = 2$ und $d = 3$, die einige bemerkenswerthe Besonderheiten aufweisen.

Für $d = 2$ werden bei der ersten Zerlegung die Exponenten $d, (d+1)d(d-1), 3d-2, 1$ des ersten, zweiten, dritten und vierten Factors genau die früher abgeleiteten 2, 6, 4, 1.

Der letzte Factor: $[\alpha_1^2\alpha_2^2, \alpha_1^2\beta_2^2]^2$ dagegen ergiebt die Existenz einer Spitze (α_1^3), und liefert insofern den Bestandtheil $[(\alpha_1^2)]^{(2n-6)(2n-7)}$.

Für $d = 3$ entsteht aus der Zerlegung von $D[\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2]$ ohne Weiteres diejenige von $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$.

Die zweite Zerlegung ist bereits für $d = 3$ zu modificiren. Der letzte Factor spaltet sich nämlich in die beiden rationalen Theile $[((\alpha\beta))]^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$ und $[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]^2$, während er für $d = 2$ überhaupt noch nicht existiren kann. Dagegen verhalten sich die übrigen Factoren regulär.

Die hiermit geleisteten Zerfällungen der Discriminanten und Resultanten der fünf, für Raumcurven überhaupt in Betracht zu ziehenden Singularitätenformen bilden das Substrat für eine Untersuchung über die Realität der jeweils coincidirenden Singularitäten: in der That hängt dieselbe nach von H. Brill angegebenen Sätzen im Wesentlichen von den Exponenten der irreducibelen Factoren jener Formen, insbesondere von deren Gerade- resp. Ungeradesein, ab.

Clausthal, den 28. October 1890.

Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche.

Von

O. Venske.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1890.

Ich werde im Folgenden einige für specielle ebene Bereiche zur Lösung der Randwertaufgabe der Gleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$

führende Methoden auseinandersetzen.

Unter „Randwertaufgabe" verstehe ich folgende Aufgabe:

Es soll eine in einem berandeten Bereiche stetige Lösung obiger Differentialgleichung gefunden werden, welche auf dem Rande gegebene Werte $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ annimmt.

Eine Function, welche im Innern eines berandeten Bereiches mit Ausnahme eines Punktes, in welchem sie logarithmisch unendlich wird, der in Rede stehenden Differentialgleichung genügt, und welche auf dem Rande nebst der Ableitung nach der Normalen verschwindet, spielt in der Theorie der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ eine ähnliche Rolle, wie die Green'sche Function in der Theorie des logarithmischen Potentials. Sie ermöglicht die Berechnung von Δu aus den Randwerten $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ durch bloße Quadratur[1]). Diese Function wird im Folgenden mit v bezeichnet und „zweite Green'sche Function" genannt.

1.

Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis, den Kreisring und den Winkelraum.

Im Folgenden wird der Satz zu Grunde gelegt, daß sich jede Lösung der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ in die Form bringen läßt

$$u = U + r^2 V,$$

wo U und V logarithmische Potentiale bedeuten, und r der Radiusvector in einem Polarcoordinatensystem ist.

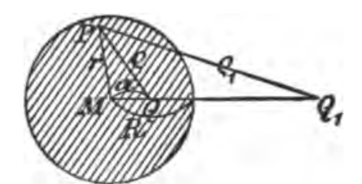
1) Vgl. Mathieu, Journal de Liouville 1869, pg. 385.

a) Lösung für den Kreis.

Entwickelt man U und V in Reihen, welche nach ganzen Potenzen von r fortschreiten, und macht den Ansatz

$$u = \sum_{i=0,1,2,\dots}^{\infty} \left\{ (a_i r^i + a_i' r^{i+2}) \cos i\varphi + (b_i r^i + b_i' r^{i+2}) \sin i\varphi \right\},$$

so gelingt die Coefficientenbestimmung in der Weise, daß $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ auf der Kreisperipherie ($r = R$) gegebene Werte annehmen, mit Hülfe des Fourier'schen Satzes.



Die zweite Green'sche Function, deren Berechnung durch den obigen Ansatz ermöglicht ist, besitzt den Wert

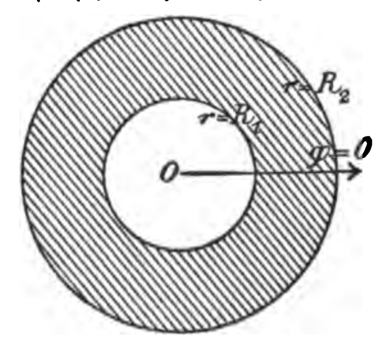
$$v = l\frac{\varrho R}{\varrho_1 a} + \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{dl\varrho_1}{dlr}\right).$$

In dieser Formel haben die Größen ϱ und ϱ_1 die Bedeutung der Abstände des Punktes $P = (r, \varphi)$ vom Pole Q der Function v und seinem Thomson'schen Bilde Q_1 bezüglich der Kreisperipherie.

b) Lösung für den Kreisring.

Wir nehmen für U und V Entwickelungen nach ansteigenden und absteigenden Potenzen von r und setzen

$$u = \sum_{i=0,1,2,\dots}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (a_i r^i + a_i' r^{i+2} + a_i'' r^{-i} + a_i''' r^{-i+2}) \cos i\varphi \\ + (b_i r^i + b_i' r^{i+2} + b_i'' r^{-i} + b_i''' r^{-i+2}) \sin i\varphi \end{array} \right\}.$$



Durch den Fourier'schen Satz lassen sich die Coefficienten so bestimmen, daß $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ auf den begrenzenden Kreisperipherieen gegebene Werte erhalten.

c) Lösung für den Winkelraum von der Oeffnung $\alpha\pi$.

Es werde die zu V conjugierte Function mit V_1 bezeichnet und folgende neue Benennung eingeführt:

$$r^2 V \cos\frac{2\varphi}{\alpha} - r^2 V_1 \sin\frac{2\varphi}{\alpha} = W.$$

Die Größen r und φ sind Polarcoordinaten in einem Systeme, dessen Anfangspunkt mit dem Scheitel, und dessen Axe mit der Halbierungslinie des gegebenen Winkels zusammenfällt. Infolge der Bedeutung, welche die Größen V und V_1 haben, ist W ein logarithmisches Potential, und die Randwertaufgabe kommt darauf hinaus, zwei logarithmische Potentiale U und W zu finden, welche die Eigenschaft haben, daß auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die Größen

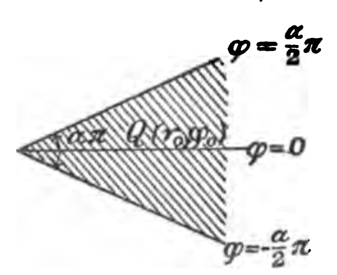
$$U - W, \quad \frac{\partial U}{\partial\varphi} - \frac{\partial W}{\partial\varphi} - \frac{2}{\alpha} W_1$$

gegebene Werte annehmen. Diese Aufgabe läßt sich durch den Ansatz

$$U = \int_0^\infty \left\{(a_\mu e^{\mu\varphi} + a'_\mu e^{-\mu\varphi}) \cos\mu\, lr + (b_\mu e^{\mu\varphi} + b'_\mu e^{-\mu\varphi}) \sin\mu\, lr\right\} d\mu$$

und einen ähnlichen für W lösen.

Die zweite Green'sche Function, deren Berechnung somit



möglich ist, besitzt, wenn α eine ganze Zahl ist, den Wert

$$v = 2\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\Bigg(\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\frac{\partial l\left(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} + 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi+\varphi_0}{\alpha}\right)}{\partial lr}$$

$$+ \cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\frac{\partial l\left(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} + 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi+\varphi_0}{\alpha}\right)}{\partial\varphi}\Bigg)$$

$$+ l\frac{\left(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} - 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi-\varphi_0}{\alpha}\right)}{\left(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} + 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi+\varphi_0}{\alpha}\right)}.$$

Hierbei ist angenommen, daß der Pol Q der Function v im Punkte (r_0, φ_0) liegt.

2.

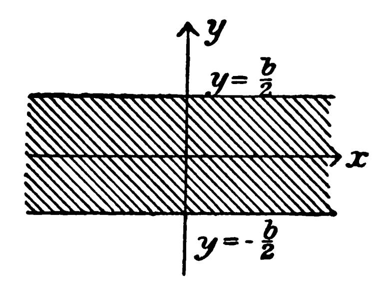
Lösung der Randwertaufgabe für den Parallelstreifen.

Es werde ein orthogonales Coordinatensystem zu Grunde gelegt.

Jede Function, welche der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ genügt, läßt sich in die Form setzen

$$u = U + yV,$$

wo wiederum die Functionen U und V logarithmische Potentiale sind.



Macht man nun den Ansatz

$$U = \int_0^\infty \{(a_\mu e^{\mu y} + a'_\mu e^{-\mu y}) \cos \mu x + (b_\mu e^{\mu y} + b'_\mu e^{-\mu y}) \sin \mu x\} d\mu$$

und einen ähnlichen für V, so stößt die Bestimmung der Functionen $a_\mu, \cdots, b'_\mu$ in der Weise, daß den Randbedingungen Genüge geleistet wird, auf keine Schwierigkeiten.

3.

Lösung der Randwertaufgabe für ein von zwei Radien und zwei concentrischen Kreisbogen begrenztes Kreisbogenrechteck.

Die beiden Kreisbogen mögen die Radien R_1 und R_2 besitzen. Ihr Mittelpunkt sei Anfangspunkt eines Systems von Polarcoordinaten (r, φ), dessen Axe mit den geradlinigen Begrenzungsstücken die Winkel $-\frac{1}{2}\alpha\pi$ und $+\frac{1}{2}\alpha\pi$ bildet.

Setzt man

$$u_n = r^n V_n,$$

wobei V_n eine Function von φ allein bedeutet, und verlangt, daß

u eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$

sei, so muß V_n der Gleichung

$$\frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + (n^2 + (n-2)^2)\frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} + n^2(n-2)^2 V_n \equiv$$

$$\frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + (2(n-1)^2 + 2)\frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} + \{(n-1)^4 - 2(n-1)^2 + 1\} V_n = 0$$

genügen. Stellt man nun noch außerdem die Forderung, daß V_n im Allgemeinen von Null verschieden ist, für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ aber die Bedingungen

$$V_n = \frac{\partial V_n}{\partial\varphi} = 0$$

erfüllt, so wird n auf eine discrete Mannigfaltigkeit von Werten beschränkt, und V_n ist bis auf einen constanten Factor bestimmt. Aus dem Ohm'schen Princip, angewandt auf einen unter dem Einfluß gewisser Energie vernichtender Kräfte schwingenden, an beiden Enden eingeklemmten Stab, ist zu schließen, daß sich eine beliebige Lösung u der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0,$$

welche für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ nebst der Ableitung nach der Normalen verschwindet, in die Reihe

$$u = r\sum_n (a_n r^{n-1} + a'_n r^{-n+1}) V_n$$

entwickeln läßt. Die Coefficienten bestimmen sich aus den Randwerten

$$u_{r=R_1}, \quad \frac{d^2}{dlr^2}\left(\frac{1}{r}u\right)_{r=R_1},$$

$$u_{r=R_2}, \quad \frac{d^2}{dlr^2}\left(\frac{1}{r}u\right)_{r=R_2}$$

vermittels des Integralsatzes

$$\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}\left[\left\{(n-1)^2+(n_1-1)^2-2\right\}V_n V_{n_1}-2\frac{\partial V_n}{\partial\varphi}\frac{\partial V_{n_1}}{\partial\varphi}\right]d\varphi = 0, \qquad (n \gtrless n_1)$$

$$2\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}\left[\left\{(n-1)^2-1\right\}V_n^2-\left(\frac{\partial V_n}{\partial\varphi}\right)^2\right]d\varphi = \gamma^n,$$

wobei γ_n eine von Null verschiedene Größe ist. Nun läßt sich $\frac{u}{r}$ stets als Summe zweier Functionen darstellen, von denen unter der Voraussetzung $R_1 R_2 = 1$ die eine in Bezug auf den Einheitskreis symmetrisch, die andere antisymmetrisch ist. Für beide Functionen geschieht die Coefficientenbestimmung in gleicher Weise. Es ist daher genügend, wenn die Coefficientenbestimmung nur für Functionen der ersten Art durchgeführt wird. Diese Functionen besitzen die Entwickelung

$$u = r\sum_n a_n(r^{n-1}+r^{-n+1})V_n,$$

und man erhält

$$a_n = \frac{1}{\gamma_n(R_1^{n-1}+R_1^{-n+1})}\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}+((n-1)^2-2)\frac{u}{R_1}+2\frac{d^2u}{R_1 d\varphi^2}\right]_{r=R_1}V_n d\varphi.$$

Setzt man diesen Wert in die Entwickelung für $\frac{u}{r}$ ein, so ergiebt sich durch Differentiation

$$R_1\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u\right)\right)_{r=R_1} =$$

$$\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}d\psi\sum_n(n-1)\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{\gamma_n(R_1^{n-1}+R_1^{-n+1})}\left(((n-1)^2-2)\frac{u(R_1,\psi)}{R_1}+\frac{2}{R_1}\frac{d^2u(R_1,\psi)}{d\psi^2}\right)V_n(\varphi)V_n(\psi)$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}d\psi\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u(r,\psi)\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}\sum_n\frac{(n-1)}{\gamma_n}\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{R_1^{n-1}+R_1^{-n+1}}V_n(\varphi)V_n(\psi).$$

Um aus dieser Gleichung

$$\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}$$

durch $u_{r=R_1}$ und $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u\right)_{r=R_1}$ ausgedrückt zu erhalten, setzen wir

$$R_1\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u\right)\right)_{r=R_1}$$

$$-\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi} d\psi \sum_n \frac{n-1}{\gamma_n}\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{R_1^{n-1}+R_1^{-n+1}}\left(((n-1)^2-2)\frac{u(R_1,\psi)}{R_1}+\frac{2}{R_1}\left(\frac{d^2u(R_1,\psi)}{d\psi^2}\right)\right)V_n(\varphi)V_n(\psi)$$

$$= a_0\cos\frac{\varphi}{\alpha}+b_0\sin\frac{2\varphi}{\alpha}+c_0\cos\frac{3\varphi}{\alpha}+d_0\sin\frac{4\varphi}{\alpha}+\cdots,$$

$$\begin{aligned}\sum_n \frac{n-1}{\gamma_n}\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{R_1^{n-1}+R_1^{-n+1}}V_n(\varphi)V_n(\psi) &= \cos\frac{\varphi}{\alpha}\left(a_1\cos\frac{\psi}{\alpha}+a_2\sin\frac{2\psi}{\alpha}+a_3\cos\frac{3\psi}{\alpha}+\cdots\right)\\ &+\sin\frac{2\varphi}{\alpha}\left(b_1\cos\frac{\psi}{\alpha}+b_2\sin\frac{2\psi}{\alpha}+b_3\cos\frac{3\psi}{\alpha}+\cdots\right)\\ &+\cos\frac{3\varphi}{\alpha}\left(c_1\cos\frac{\psi}{\alpha}+c_2\sin\frac{2\psi}{\alpha}+c_3\cos\frac{3\psi}{\alpha}+\cdots\right)\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u(r,\psi)\right)}{dr^2}\right)_{r=R_1}\sin i\frac{\frac{1}{2}i\alpha\pi-\psi}{\alpha}d\psi = \alpha_i \qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

und gewinnen die Gleichungen

$$\begin{aligned}a_0-a_1\alpha_1+a_2\alpha_2-a_3\alpha_3+\cdots &= 0,\\ b_0-b_1\alpha_1+b_2\alpha_2-b_3\alpha_3+\cdots &= 0,\\ c_0-c_1\alpha_1+c_2\alpha_2-c_3\alpha_3+\cdots &= 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Aus denselben folgt bei Benutzung der Jacobi'schen Determinantenbezeichnung

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{a_0}{a_1}+\frac{(a_0b_1)(a_2)}{(a_1b_2)(a_1)}+\frac{(a_0b_1c_2)(a_2b_3)}{(a_1b_2c_3)(a_1b_2)}+\cdots,\\ \alpha_2 &= \frac{(a_0b_1)}{(a_1b_2)}+\frac{(a_0b_1c_2)(a_1b_3)}{(a_1b_2c_3)(a_1b_2)}+\frac{(a_0b_1c_2d_3)(a_1b_2c_4)}{(a_1b_2c_3d_4)(a_1b_2c_3)}+\cdots,\\ \alpha_3 &= \frac{(a_0b_1c_2)}{(a_1b_2c_3)}+\frac{(a_0b_1c_2d_3)(a_1b_2c_4)}{(a_1b_2c_3d_4)(a_1b_2c_3)}+\frac{(a_0b_1c_2d_3e_4)(a_1b_2c_4d_5)}{(a_1b_2c_3d_4e_5)(a_1b_2c_3d_4)}+\cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Hat man die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ berechnet, so findet man $\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dr^2}\right)_{r=R_1}$

aus der Formel

$$\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1} = \frac{2}{\alpha\pi}\sum_i \alpha_i \sin i\,\frac{\frac{1}{2}i\alpha\pi-\varphi}{\alpha}.$$

Durch das Vorhergehende ist die Bestimmung einer stetigen Function ermöglicht, welche der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$

genügt, für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ nebst ihrer Ableitung nach der Normalen verschwindet und für $r = R_1, R_2$ sowohl selbst als auch bei Differentiation bezüglich der Normalen gegebene Werte annimmt.

Hierdurch ist aber der Weg gebahnt zur Herstellung der zweiten Green'schen Function für das Kreisbogenrechteck. Man bilde nämlich die zweite Green'sche Function für den Winkelraum von der Oeffnung $\alpha\pi$ und construiere auf die soeben auseinandergesetzte Weise eine stetige Function, welche der partiellen Differentialgleichung $\Delta\Delta = 0$ genügt und zu dieser Green'schen Function addiert eine Function erzeugt, die nebst ihrer Ableitung nach der Normalen auf den Begrenzungen des Kreisbogenrechtecks verschwindet. Diese letztere Function ist dann die zweite Green'sche Function für das Kreisbogenrechteck. Durch die Kenntnis derselben ist aber die Lösung der Randwertaufgabe vermittels Quadraturen ermöglicht.

Göttingen, August 1890.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Monographie der baltischen Bernsteinbäume v. H. Conwentz. Hrsg. v. d. Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig. Danzig 1890.

Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig 1890.
- a. Berichte üb. d. Verhandlungen. Mathem.-phys. Classe. 1890. I.
- b. Abhandlungen der mathem.-phys. Classe. Bd. XVI. No. 2. (W. Pfeffer: I. Ueber die Aufnahme u. Ausgabe ungelöster Körper. II. Zur Kenntniss der Plasmahaut und der Vacuolen. . . .)

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 4. Stück. Zone + 55° bis + 65°. Beobachtet auf den Sternwarten Helsingfors u. Gotha. — 14. Stück. Zone + 1° bis + 5°. Beobachtet auf der Sternwarte Albany. Leipzig 1890.

Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1890. XL. Bd. 1. u. 2. Heft. Wien 1890.

Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-naturwiss. Classe. 1890. I. Prag 1890.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag i. J. 1889. 50. Jahrg. Ebd. 1890.

Mittheilungen des Naturwiss. Vereines f. Steiermark. Jahrg. 1889 (d. g. Reihe 26. Heft.) Graz 1890.

Anzeiger der Akademie' der Wissenschaften in Krakau. Juli 1890. (2 Exempl.) Krakau 1890.

Jahres-Verwaltungs-Bericht der Akadem. Lesehalle an d. k. k. Franz-Josefs-Universität in Czernowitz. XXIX. u. XXX. Semester. Czernowitz 1890.

Ungarische Revue. IX. Jahrg. 1889. 4—10. Heft; X. Jahrg. 1890. 1—4. 7. 8. Heft. Budapest 1889/90.

Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich. 35. Jahrg. 1. Heft. Zürich 1890.

Royal Society of London.
- a. List of the fellows of the Society. Nov. 30. 1889.
- b. Philosophical transactions f. the year 1889. Vol. 180 A. B. London 1890.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. XLIX. Part. II. 1887—1889. Ebd. 1890.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London f. the year 1890. Part II. March et April. London (1890).

Proceedings of the London Mathematical Society. (Vol. XXXI.) No. 381—387. (London).

Linnean Society of London.
- a. List of the Linn. Soc. Jan. 1890. London 1890.
- b. Transactions. 2. Ser. Zoology. Vol. V. Part 4. Ebd. 1890.
- c. Proceedings May 1890. From Nov. 1887 to June 1888. Ebd. 1890.
- d. Journal. Botany. Vol. XXV. No. 171. 172. Vol. XXVI. No. 174. Vol. XXVII. No. 181. 182. Ebd. 1889/90.
- e. Journal. Zoology. Vol. XX. No. 122. 123. Vol. XXI. No. 133—135. Vol. XXIII. No. 141—144. Ebd. 1889/90.

Journal of the R. Microscop. Society. 1890. Part 4. (2. Exempl.) Part 5. London et Edinburgh.

Proceedings and transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. IV. Session 1889/90. Liverpool 1890.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool. Vol. XLI. XLII. XLIII. 1886—1889. Ebd. 1887—1889.

Royal Society of Edinburgh.
- a. Transactions. Vol. XXXIII. Part III. Vol. XXXV. Part I—IV. Ebd. 1888/90.
- b. Proceedings. Vol. XV. (1887—88.) Vol. XVI. (1888—89.)

Scientific proceedings of the R. Dublin Society. Vol. VI. (N. S.) Part 7—9. Dublin 1889/90.

Nature. Vol. 42. No. 1083—1095. London 1890.

Records of the Geological Survey of India. Vol. XXIII. Part III. 1890. Calcutta.

Transactions of the R. Society of South Australia. Vol. XIII. Part I. Adelaide 1890.

Transactions of the R. Society of Victoria. Vol. I. Part II. Melbourne 1889.

Maiden, J. H.: Wattles and wattle-barks . . . (Department of public instruction. Technical education Series No. 6.) Sidney 1890.

Kgl. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
- a. Jaarboek voor 1889. Amsterdam. s. a.
- b. Verhandelingen. (Afd. Natuurkunde.) Deel XXVII. Ebd. 1890.
- c. Verslagen en mededeelingen. Afd. Naturkunde. Derde Reeks. Deel 6. 7. Ebd. 1890.

d. Verslagen en mededeelingen. Afd. Letterkunde. Derde Reeks. Deel 6. Ebd. 1889.

e. Amor. Carmen elegiacum Rudolphi van Oppenraij ... in certamine Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Ebd. 1890.

Tijdschrift voor nederlandsche Taal- en Letterkunde. 9. Deel. (N. Reeks. 1. Deel.) 3. Afl. Leiden 1890.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst uitg. door Teylers godsgeleerd Genootschap. N. Ser. 12. Deel. Haarlem 1890.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks. 5. Deel. 4. Afl. 'sGravenhage 1880.

Flora Batava v. J. Kops en F. W. van Eeden. 289 en 290. Aflev. Leiden. s. a.

Acta Universitatis Lundensis. — Lunds Universitets Års-Skrift. Tom. XXV. 1888/89. Theologi. — Medicin. — Philosophi, Språkvetenskap och Historia. — Mathematik och Naturvetenskap. Lund 1888/89.

Sveriges offentliga Bibliothek. Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog utg. af E. W. Dahlgren. 4. 1889. Stockholm 1890.

Bugge, S.: Etruskisch und Armenisch. Sprachvergleichende Forschungen. 1. Reihe. Universitätsprogr. f. d. 1. Halbjahr 1890. Christiania.

Mémoires de l'Académie Impér. des sciences de St. Pétersbourg. VII. Sér. Tome XXXVII. No. 8—10. St. Petersbourg 1890.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums hrsg. von H. Wild. Jahrg. 1889. Theil 1. Ebd. 1890.

Fritsche, H.: On chronology and the construction of the calendar with special regard to the Chinese computation of time compared with the European. Ebd. 1886.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1890. No. 1. Moscou 1890.

Witterungs-Beobachtungen (des meteorolog. Observatoriums in Dorpat) vom Jahre 1881, 1882, 1883.

Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1890.

a. Bulletin. 60. Année, 3. Série, Tome 20. No. 7. 8.

b. Classe des lettres. Programme de concours pour 1891.

Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVII. 2. Livr. Liége 1890.

Atti del Museo civico di storia naturale di Trieste. VIII. (N. Ser. vol. II.) Trieste 1890.

R. Accademia dei Lincei.

a. Atti. Anno CCLXXXV. 1888. Serie quarta. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. V. Roma 1888.

b. Atti. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. 1° semestre, fasc. 11. 12. 2° semestre, fasc. 1—4. Roma 1890.

Atti della Società Toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. VII. 4. maggio 1890.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXV. Disp. 13a. 14a. 1889/90. Torino.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV. Anno 1890. Fasc. V. (Palermo.)

Atti e rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. II. Fasc. II. Perugia 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.

Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. März. № 2. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. März.

Voigt legt vor: „Beiträge zur Hydrodynamik. II. Reihe."
Klein legt von Herrn Prof. Franz Meyer an der Bergakademie in Clausthal vor: „Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven."
Schering legt von Herrn Dr. Heun in Berlin vor: „Die Schwingungsdauer des Gaussschen Bifilarpendels."

Beiträge zur Hydrodynamik. I.

Von

W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Februar 1891.)

1. Pulsirende Kugeln oder Cylinder in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit.

Die Bewegung einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit, welche dem Geschwindigkeitspotentiale

$$\varphi = \frac{A}{r}\cos\frac{2\pi t}{T}, \text{ worin } r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2, \qquad 1)$$

entspricht, läßt sich bekanntlich durch eine pulsirende Kugel begrenzen. Denn man erhält aus φ zunächst

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2}\cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad 2)$$

und hieraus

$$r^3 = r_0^3 - \frac{3TA}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

worin r_0 den Werth von r zur Zeit $t = 0$ bezeichnet. Ist hierin TA klein neben r_0^3, so giebt dies auch

$$3)\qquad r = r_0 - \frac{TA}{2\pi r_0^2} \sin \frac{2\pi t}{T};$$

man kann also die obige Bewegung als hervorgebracht ansehen durch die abwechselnde Dilatation und Compression einer Kugel, deren Mittelpunkt in x', y', z' verharrt und deren Radius ϱ nach dem Gesetz

$$3')\qquad \varrho = R - a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

variirt, welche Bewegung wir als „Pulsation" bezeichnen.

Es findet nun der merkwürdige Umstand statt, daß eine Summe von $(n+1)$ Gliedern der obigen Form (1), auf $(n+1)$ verschiedene Punkte $p_h(x_h, y_h, z_h)$ bezogen, ein Geschwindigkeitspotential ergiebt, welches eine Bewegung darstellt, die sich durch $(n+1)$ isochron pulsirende Kugeln von bestimmter Größenordnung begrenzen läßt; aber diese Kugeln haben ihre, übrigens ruhenden, Mittelpunkte nicht an den Stellen x_h, y_h, z_h sondern an anderen Orten.

Dieser Umstand ermöglicht eine sehr einfache Bestimmung der durch ein System pulsirender Kugeln erregten Bewegung der Flüssigkeit und speciell der in Folge dieser Bewegung eintretenden Wechselwirkung zwischen den einzelnen Kugeln, welche zuerst auf einem viel umständlicheren Wege von Bjerknes[1]) untersucht worden ist.

Für diese letztere Anwendung ist es bequem, in der Bezeichnung einen der $(n+1)$ Punkten $p_h(x_h, y_h, z_h)$, etwa $p_0(x_0, y_0, z_0)$, von den andern auszusondern, die übrigen in eine Summe, in Bezug auf h von 1 bis n zu nehmen, zusammenzufassen.

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$4)\qquad \varphi = \left(\frac{A}{r} + \sum \frac{A_h}{r_h}\right) \cos \frac{2\pi t}{T},$$

wo nun ist

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2,$$
$$r_h^2 = (x-x_h)^2 + (y-y_h)^2 + (z-z_h)^2.$$

1) Bjerknes, Gött. Nachr. 1876, 245; s. auch Basset, Hydrodynamik, Cambridge 1888, I, p. 248.

Zu dem Punkt p_0 wählen wir einen Nachbarpunkt p_0', der um die verfügbare Strecke δ in einer verfügbaren Richtung von p_0 entfernt liegt. Die Entfernung von p_0' nach $p(x, y, z)$ sei mit ϱ bezeichnet, der Winkel zwischen ϱ und δ — beide Strecken von p_0' hinweg positiv gerechnet — mit ψ; dann ist

$$r^2 = \varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\,\delta\cos\psi.$$

Wird ferner die Entfernung von p_0' nach p_h mit E_h, der Winkel zwischen E_h und ϱ mit ψ_h bezeichnet, so ist

$$r_h^2 = E_h^2 + \varrho^2 - 2E_h\varrho\cos\psi_h.$$

Wir wenden nun die Formel (4) an auf ein Bereich in der Nähe des Punktes p_0', welches dadurch definirt ist, daß ϱ klein neben E_h, aber noch groß gegen δ sein soll, beides von einer sogleich zu bestimmenden Ordnung. Dann kann man φ entwickeln und schreiben

$$\varphi = \left[A\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\delta\cos\psi}{\varrho^2} \pm ..\right) + \sum A_h\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\varrho\cos\psi_h}{E_h^2} \pm ..\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}. \quad 5)$$

Die Geschwindigkeit in der Richtung von ϱ folgt hieraus

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \left[-A\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{2\delta\cos\psi}{\varrho^3} \pm ..\right) + \sum A_h\left(\frac{\cos\psi_h}{E_h^2} \pm ..\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}. \quad 6)$$

Man kann für einen Werth $\bar\varrho$ von ϱ diese Geschwindigkeit bis auf Glieder von der Ordnung $\bar\varrho^3/E_h^3$ und $\delta^2/\bar\varrho^2$ von der Richtung von ϱ unabhängig machen, wenn man über die Richtung und Größe von δ so verfügt, daß

$$\frac{2A\,\delta\cos\psi}{\bar\varrho^3} = \sum A_h\frac{\cos\psi_h}{E_h^2}$$

wird. Bezeichnet man die Richtungscosinus von $\bar\varrho$ mit α, β, γ, die von E_h mit $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$, die Projectionen von δ mit ξ, η, ζ, so zerfällt die letzte Gleichung, da beiderseits die Factoren von α, β, γ für sich gleich sein müssen, in die drei:

$$\frac{2A\xi}{\bar\varrho^3} = \sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h^2}, \quad \frac{2A\eta}{\bar\varrho^3} = \sum\frac{A_h\beta_h}{E_h^2}, \quad \frac{2A\zeta}{\bar\varrho^3} = \sum\frac{A_h\gamma_h}{E_h^2}, \quad 7)$$

und es wird zugleich, falls man $\bar\varrho^3$ neben E_h^3 vernachlässigen kann,

$$\frac{d\bar\varrho}{dt} = -\frac{A}{\bar\varrho^2}\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Diese Formel verglichen mit (2) zeigt, daß man die durch (4) gegebene Bewegung in der Nähe von p_0 begrenzen kann durch eine Kugel um den festen Punkt p_0' von einem Radius $\bar{\varrho}$ gegeben durch

$$\bar{\varrho}^3 = R^3 - \frac{3TA}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

falls nur A so klein ist, daß innerhalb der festgesetzten Annäherung in den Gleichungen (7) $\bar{\varrho}$ als constant anzusehen ist. Dies findet jedenfalls statt, wenn $3TA/2\pi R^3$ von der Ordnung von δ/R ist, und in diesem Falle ist zugleich

$$8)\qquad \bar{r} = R - a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

worin $a = AT/2\pi R^2$ die Amplitude der Pulsation bezeichnet.

Da nun alle Punkte p_h dem Punkte p_0 völlig gleichwerthig sind, so ist die obige Entwickelung für alle anwendbar, und man kann zu jedem p_h einen Nachbarpunkt p_h' angeben, um den sich eine Kugel von wechselndem Radius

$$8')\qquad \varrho_h = R_h - a_h \sin \frac{2\pi t}{T},$$

construiren läßt, welche die Flüssigkeit in jenem Bereich begrenzt, wobei wieder die Amplitude der Pulsation $a_h = A_h T/2\pi R_h^2$ ist.

Den Ort der p_h' bestimmen dabei Formeln, welche den drei (7) analog sind; in ihnen kann man den Entfernungen E_h, welche zunächst den Abstand der Punkte p_h von p_0' bezeichneten, innerhalb der früheren Genauigkeitsgrenze die Bedeutung der Abstände der p_h von p_0 selbst beilegen, sodaß nunmehr auf den rechten Seiten der Gleichungen (7) nur direct gegebene Größen stehen.

Um die Kräfte zu bestimmen, welche die Kugel um p_0' seitens aller übrigen erleidet, hat man von der Formel für den Druck $\bar{p}$ gegen dieselbe, nämlich

$$9)\qquad \bar{p} = \varepsilon\left(C - \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} - \frac{\overline{V^2}}{2}\right)$$

auszugehen und zu bilden:

$$X = \int \bar{p} \cos(n_i, x)\, do, \quad Y = \int \bar{p} \cos(n_i, y)\, do, \quad Z = \int \bar{p} \cos(n_i, z)\, do$$
$$= -\int \bar{p}\, \alpha\, do, \qquad = -\int \bar{p}\, \beta\, do, \qquad = -\int \bar{p}\, \gamma\, do.$$

Dabei ist

$$V^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2,$$

und nach (5) in der Nähe der Kugel um p_0', deren Centrum jetzt zum Coordinatenanfang gewählt werden mag,

$$\varphi = \left[A\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{\xi x+\eta y+\zeta z}{\varrho^2}\right)+\sum A_\lambda\left(\frac{1}{E_\lambda}+\frac{x\alpha_\lambda+y\beta_\lambda+z\gamma_\lambda}{E_\lambda^2}\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}; \quad 11)$$

hieraus folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left[A\left(-\frac{(x-\xi)}{\varrho^3}-\frac{3x(\xi x+\eta y+\zeta z)}{\varrho^5}\right)+\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

und bei Beschränkung auf die festgesetzte Annäherung

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = \left[\frac{A^2x^2}{\varrho^6}-\frac{2A^2x}{\varrho^3}\left(\frac{\xi}{\varrho^3}-\frac{3x(\xi x+\eta y+\zeta z)}{\varrho^5}\right)-\frac{2Ax}{\varrho^3}\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T},$$

so daß schließlich wird

$$V^2 = \left[\frac{A^2}{\varrho^4}+\frac{4A^2}{\varrho^6}(\xi x+\eta y+\zeta z)-\frac{2A}{\varrho^3}\sum\frac{A_\lambda(\alpha_\lambda x+\beta_\lambda y+\gamma_\lambda z)}{E_\lambda^2}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T}. \quad 12)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T}\left[A\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{\xi x+\eta y+\zeta z}{\varrho^2}\right)+\sum A_\lambda\left(\frac{1}{E_\lambda}+\frac{x\alpha_\lambda+y\beta_\lambda+z\gamma_\lambda}{E_\lambda^2}\right)\right]\sin\frac{2\pi t}{T}. \quad 12')$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Integrale für X, Y, Z ein, so erhält man für $\varrho = \bar\varrho$, da $\int\alpha^2 do = \int\beta^2 do = \int\gamma^2 do = 4\pi\bar\varrho^2/3$ ist,

$$X = -\left\{\frac{2\pi}{T}\left(A\xi+\bar\varrho^2\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}\right)\sin\frac{2\pi t}{T}-\left(\frac{2A^2\xi}{\bar\varrho^3}-A\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}\right)\cos^2\frac{2\pi t}{T}\right\}\frac{4\pi\varepsilon}{3}, \quad 13)$$

und ebenso die übrigen.

Nun setzen wir

$$\bar\varrho = R-a\sin\frac{2\pi t}{T},$$

entwickeln X nach Potenzen von a und bilden den Mittelwerth $\mathfrak{X}$ des Resultates für die Zeit T einer Periode; dabei verschwindet nach (7) Alles, was von dem letzten Glied herrührt, und es bleibt schließlich in der früher benutzten Annäherung:

$$\mathfrak{X} = \frac{4\pi^2\varepsilon R^2 a}{T}\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}.$$

Hierin benutzen wir endlich, daß die Amplitude a_λ der Pulsation für die Kugel um p_λ' gegeben ist durch $A_\lambda = 2\pi R_\lambda^2 a_\lambda/T$, und er-

halten so

$$14)\qquad \Xi = \frac{8\pi^3 \varepsilon R^2 a}{T^2} \sum \frac{R_h^2 a_h \alpha_h}{E_h^2}, \text{ ebenso } H \text{ und } Z.$$

Diese Formeln sagen aus, daß zwischen je zwei isochron pulsirenden Kugeln eine Kraft parallel der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte wirkt, proportional mit den Quadraten der Radien, proportional mit den Amplituden, indirect proportional dem Quadrat der Pulsationsdauer und dem Quadrat der Entfernung der Centra von einander. Die Kraft ist eine anziehende zwischen Kugeln, die mit gleicher Phase, eine abstoßende zwischen solchen, die mit um $T/2$ verschiedener Phase schwingen; denn im ersteren Falle haben die A_h oder a_h für beide gleiches, im letzteren entgegengesetztes Vorzeichen.

Daß Herr Riecke[1]) scheinbar andere Resultate erhalten hat, rührt davon her, daß die von ihm betrachteten bewegten Kugeln außer einer Aenderung ihrer Radien auch eine Verschiebung ihrer Mittelpunkte erfuhren, die Bewegung also nicht eine reine Pulsation war.

Die vorstehende Betrachtung läßt sich leicht auf den Fall ausdehnen, daß die gegebenen Kugeln nicht mit gleicher Phase pulsiren, wenn nur die Pulsationsdauer allen gemeinsam bleibt.

Setzt man nämlich

$$15)\qquad \varphi = \frac{A}{r} \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \sum \frac{A_h}{r_h} \cos \frac{2\pi(t-t_h)}{T},$$

was identisch ist mit

$$\varphi = \left(\frac{A'}{r} + \sum \frac{A'_h}{r}\right) \cos \frac{2\pi t}{T} + \left(\frac{A''}{r} + \sum \frac{A''_h}{r_h}\right) \sin \frac{2\pi t}{T},$$

falls

$$A_h \cos \frac{2\pi t_h}{T} = A'_h, \quad A_h \sin \frac{2\pi t_h}{T} = A''_h$$

gesetzt wird, so lassen sich die beiden Theile für sich genau so behandeln, wie oben der Ansatz (4). Allerdings lassen sich die Gleichungen (7) nicht für beide Theile durch dieselben Werthe ξ, η, ζ befriedigen, aber da sich ξ/ϱ, η/ϱ, ζ/ϱ selbst von der Ordnung ϱ^2/E_h^2 ergeben, bleibt die dadurch entstehende Ungenauigkeit innerhalb des Bereiches der oben vernachlässigten Größen.

Bei der Bestimmung der Kräfte X, Y, Z ist zu beachten, daß in dem Werth (9) des Druckes p der ganze Ausdruck V^2 auch jetzt keinen Antheil zu den Resultaten liefert, hingegen in $\partial\varphi/\partial t$ die

1) E. Riecke, Gött. Nachr. 1888, No. 13 p. 347.

mit A'_h und A''_h resp. a'_h und a''_h proportionalen Glieder sich einfach summiren. Da nun

$$a'a'_h + a''a''_h = a\,a_h \cos\frac{2\pi(t_h - t_0)}{T}$$

ist, so gewinnt man für die Einwirkungen, welche die Kugel vom Radius R von allen übrigen erfährt, sogleich die allgemeinen Werthe:

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{8\pi^2 \varepsilon R^2 a}{T} \sum \frac{R_h^2 a_h \alpha_h}{E_h^2} \cos\frac{2\pi(t_h - t_0)}{T}, \\ H &= \frac{8\pi^2 \varepsilon R^2 a}{T} \sum \frac{R_h^2 a_h \beta_h}{E_h^2} \cos\frac{2\pi(t_h - t_0)}{T}, \\ Z &= \frac{8\pi^2 \varepsilon R^2 a}{T} \sum \frac{R_h^2 a_h \gamma_h}{E_h^2} \cos\frac{2\pi(t_h - t_0)}{T}. \end{aligned} \tag{16}$$

Zu den Ausdrücken (14) treten also unter den bez. Snmmen die Cosinus der Phasendifferenzen; die a_h sind in (16) sämmtlich als absolute Größen zu betrachten. —

Genau in derselben Weise führt sich die Bestimmung der Bewegung durch, welche in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit durch ein System isochron pulsirender Cylinder mit parallelen Axen erregt wird.

Die Lösung des Problemes wird, wenn nur ein Cylinder vorhanden ist, geliefert durch

$$\varphi = A\,l(e) \cos\frac{2\pi t}{T}, \text{ worin } e^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 \text{ ist;} \tag{17}$$

daraus folgt

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial e} = \frac{A}{e}\cos\frac{2\pi t}{T}, \tag{18}$$

und daher

$$e^2 = e_0^2 + \frac{AT}{\pi}\sin\frac{2\pi t}{T},$$

oder angenähert bei kleinem A

$$e = e_0 + \frac{AT}{2\pi e_0}\sin\frac{2\pi t}{T}. \tag{18'}$$

Für $(n+1)$ isochron pulsirende Cylinder ist der Ansatz zu machen

$$\varphi = (A\,l(e) + \sum A_h\, l(e_h)) \cos\frac{2\pi t}{T}, \tag{19}$$

worin $e^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, $e_h^2 = (x-x_h)^2 + (y-y_h)^2$ ist. Zu dem Punkt $p_0(x_0, y_0)$ werde wieder ein Nachbarpunkt $p'_0((x_0-\xi), (y_0-\eta))$ im Abstand δ gewählt und die Entfernung von p'_0 nach $p(x, y)$ mit

ϱ, die nach $p_h(x_h, y_h)$ mit E_h bezeichnet; die Winkel von ϱ und E_h mit δ — alle drei Richtungen von p'_0 hinweg positiv gerechnet — seien wieder ψ und ψ_h, es gelte also

$$e^2 = \varrho^2+\delta^2-2\varrho\delta\cos\psi,\quad e_h^2 = E_h^2+\varrho^2-2E_h\varrho\cos\psi_h.$$

Für Entfernungen ϱ, welche klein gegen die E_h, aber groß gegen δ sind, läßt sich φ schreiben

$$20)\ \varphi = \left[A\left(l(\varrho)-\frac{2\delta\cos\psi}{\varrho}\pm..\right)+\sum A_h\left(l(E_h)-\frac{\varrho\cos\psi_h}{E_h}\pm...\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

und daraus bilden

$$21)\ \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \left[A\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{2\delta\cos\psi}{\varrho^2}\pm..\right)-\sum A_h\left(\frac{\cos\psi_h}{E_h}\pm...\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

$d\varrho/dt$ wird für einen bestimmten Werth $\bar{\varrho}$ von ϱ bis auf Glieder von der Ordnung ϱ^2/E_h^2 und δ^2/ϱ^2 von der Richtung unabhängig, wenn

$$\frac{2A\delta\cos\psi}{\bar{\varrho}^2} = \sum\frac{A_h\cos\psi_h}{E_h}$$

ist, d. h., falls α, β wieder die Richtungscosinus von ϱ, und α_h, β_h diejenigen von E_h sind, wenn zur Bestimmung der Richtung und Größe von δ die Gleichungen gelten:

$$22)\qquad \frac{2A\xi}{\bar{\varrho}^2} = \sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h},\quad \frac{2A\eta}{\bar{\varrho}^2} = \sum\frac{A_h\beta_h}{E_h}.$$

Zugleich wird, wenn man $\bar{\varrho}^2$ neben E_h^2 vernachlässigen kann,

$$\frac{d\bar{\varrho}}{dt} = \frac{A}{\bar{\varrho}}\cos\frac{2\pi t}{T},$$

woraus zu folgern ist:

$$23)\qquad \bar{\varrho} = R+\frac{AT}{2\pi R}\sin\frac{2\pi t}{T};$$

damit die Gleichungen (22) bei variabelem $\bar{\varrho}$ innerhalb der gestellten Genauigkeitsgrenze erfüllt sind, muß $AT/2\pi R^2$ von derselben Größenordnung sein wie δ/R. Die Flüssigkeit ist also in der Umgebung von p_0 durch einen Cylinder vom Radius $\bar{\varrho}$ um p'_0 zu begrenzen; dasselbe gilt für die Umgebung eines jeden andern Punktes p_h, und es wird für die bezüglichen Cylinder allgemein

$$\bar{\varrho}_h = R_h+a_h\sin\frac{2\pi t}{T}$$

sein, wobei $\qquad a_h = A_h T/2\pi R_h$ ist.

Zur Bestimmung der Druckcomponenten, welche die Längeneinheit des Cylinders um p_0' erfährt, sind die Gleichungen (9) und (10) zu benutzen. Dabei ist zu setzen, falls man den Coordinatenanfang nach p_0' legt:

$$\varphi = \left[A\left(l\varrho - \frac{2(x\xi + y\eta)}{\varrho^2}\right) + \sum A_k\left(lE_k - \frac{x\alpha_k + y\beta_k}{E_k}\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left[A\left(\frac{x-2\xi}{\varrho^2} + \frac{4x(x\xi + y\eta)}{\varrho^4}\right) - \sum\frac{A_k\alpha_k}{E_k}\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

also

$$V^2 = \left[\frac{A^2}{\varrho^2} + \frac{4A^2(x\xi + y\eta)}{\varrho^4} - \frac{2A}{\varrho^2}\sum\frac{A_k(\alpha_k x + \beta_k y)}{E_k}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T}; \quad 24)$$

ebenso ergiebt sich

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T}\left[A\left(l\varrho - \frac{2(x\xi+y\eta)}{\varrho^2}\right) + \sum A_k\left(lE_k - \frac{x\alpha_k+y\beta_k}{E_k}\right)\right]\sin\frac{2\pi t}{T}. \quad 24')$$

Hieraus folgt, da $\int\alpha^2 ds = \int\beta^2 ds = \pi\varrho$ ist,

$$X = \frac{2\pi^2\varepsilon}{T}\left[2A\xi + \bar\varrho^2\sum\frac{A_k\alpha_k}{E_k}\right]\sin\frac{2\pi t}{T} + \pi\varepsilon\left[\frac{2A^2\xi}{\bar\varrho^2} - A\sum\frac{A_k\alpha_k}{E_k}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T}. \quad 25)$$

Darin ist zu setzen

$$\bar\varrho = R + a\sin\frac{2\pi t}{T},$$

X nach Potenzen von a zu entwickelen und der Mittelwerth über die Dauer einer Periode zu bilden. Man erhält so

$$\Xi = \frac{2\pi^2\varepsilon Ra}{T}\sum\frac{A_k\alpha_k}{E_k},$$

oder wenn man berücksichtigt, daß $A_k = 2\pi R_k a_k/T$ ist

$$\Xi = \frac{4\pi^3\varepsilon Ra}{T^2}\sum\frac{R_k a_k\alpha_k}{E_k}, \quad 26)$$

ebenso H und Z; das Resultat ist dem in den Formeln (16) gegebenen vollkommen analog, nur ist die Oberfläche der Kugeln mit der Oberfläche der Länge Eins der Cylinder vertauscht, und tritt die Attraction indirect proportional der Entfernung an Stelle derjenigen, welche das Newton'sche Gesetz befolgt.

Die Ausdehnung dieser Resultate auf Cylinder, die in verschiedener Phase pulsiren, geschieht ebenso, wie oben bei Kugeln gezeigt ist. Für φ ist der Ansatz zu machen

$$27)\quad \varphi = (A' l e + \sum A'_h l e_h) \cos \frac{2\pi t}{T} + (A'' l e + \sum A''_h l e_h) \sin \frac{2\pi t}{T},$$

worin

$$A_h \cos \frac{2\pi t_h}{T} = A'_h, \quad A_h \sin \frac{2\pi t_h}{T} = A''_h$$

gesetzt ist; beide Theile von φ lassen sich behandeln wie der Ansatz (17), und das Resultat für die mittleren Kräfte, welche der Cylinder vom Radius R seitens aller übrigen erleidet, lautet

$$28)\quad \Xi = \frac{4\pi^3 \varepsilon R a}{T^2} \sum \frac{R_h a_h \alpha_h}{E_h} \cos \frac{2\pi (t_h - t_0)}{T},$$

ebenso für die H- und Z-Componente.

Ganz ähnlich wie vorstehend die Pulsation, läßt sich auch die Oscillation von Kugeln oder Cylindern in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit behandeln; die oben benutzte Methode bietet hier aber nicht so bedeutende Vortheile gegenüber der von Kirchhoff[1]) bei diesem Problem angewandten, als daß sich ihre Auseinandersetzung lohnte.

2. Stehende Wellen in einem Strome als Beispiel für die Kirchhoff'sche Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Nach Kirchhoff[2]) erhält man bekanntlich für incompressible Flüssigkeiten, die der Einwirkung äußerer Kräfte nicht unterliegen, ebene Potentialbewegungen, welche durch freie Oberflächen begrenzt werden können, in folgender Weise.

Sei gesetzt $z = x + iy$, und sei $\omega = \varphi + i\psi$, worin φ das Geschwindigkeitspotential, ψ die Strömungsfunction bezeichnet, eine Function von z, dann hat

$$1)\quad \frac{dz}{d\omega} = \zeta = \xi + i\eta$$

die Eigenschaft, daß

$$2)\quad \xi = \frac{u}{V^2}, \quad \eta = \frac{v}{V^2}, \quad \text{also} \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}(V, x), \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{V^2}$$

1) Kirchhoff, Mechanik, Leipzig 1876, p. 228.

2) Kirchhoff, Mechanik, p. 290.

ist. Wird nun eine Relation

$$\omega = f(\zeta) \text{ oder } \zeta = F(\omega)$$

aufgestellt, welche eine der Abscissenaxe in der ω-Ebene parallele Gerade $\psi = C$ in der ζ-Ebene als ein Stück eines Kreises $\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2 = c^2$ um den Coordinatenanfang abbildet, so ist die durch

$$z = \int \zeta d\omega = \int F(\omega) d\omega \tag{3)}$$

gegebene Function φ von x und y das Geschwindigkeitspotential einer Bewegung, die längs der Strom-Curve $\psi = C$ eine freie Grenze haben kann; denn längs dieser Curve ist V constant und dies ist, wenn Kräfte auf die Flüssigkeit nicht wirken, die bekannte Bedingung dafür, daß in ihr der Druck constant ist.

Soll die Flüssigkeit strömen und dabei von einer wellenartig periodisch sich hebenden und senkenden Oberfläche begrenzt sein, deren Berge und Thäler wir der Bequemlichkeit halber in je einer Horizontalen liegend denken wollen, so muß die Beziehung $\zeta = F(\omega)$ einen Bogen des Kreises $\varrho = c$ um den Anfangspunkt der ζ-Ebene, welcher symmetrisch zur ξ-Axe liegt, in der Weise auf eine Curve $\psi = C$ der ω-Ebene abbilden, daß dem unendlich oft wiederholten Umlaufen des Kreisbogens die Durchmessung der ganzen Curve $\psi = C$ von $\varphi = -\infty$ bis $\varphi = +\infty$ entspricht. Dieser Kreisbogen bildet dann in der ζ-Ebene die eine Grenze der Flüssigkeit; eine zweite kann in der z-Ebene nur von einer andern Stromcurve $\psi = C'$ gebildet werden, und diese muß sich nothwendig in der ζ-Ebene als eine geschlossene Curve darstellen, welche den Kreisbogen völlig umschließt.

Bedenkt man die Beziehungen, welche durch die Gleichungen (2) zwischen den Coordinaten eines Punktes der ζ-Ebene und der Größe und Richtung der Geschwindigkeit an der dem Punkt ζ entsprechenden Stelle der z-Ebene gegeben sind, so erkennt man leicht Folgendes.

Sollen innerhalb der Flüssigkeit keine Quellen und Senken liegen, in denen die Geschwindigkeit unendlich wird, d. h. soll in der ζ-Ebene das von der zweiten Curve umschlossene Gebiet den Punkt $\zeta = 0$ nicht enthalten, so muß in der z-Ebene die zweite Grenze selbst eine wellenartige Gestalt haben; und zwar muß ihre stärkste Steigung stets steiler sein als diejenige der freien Oberfläche. Die Wellen kommen dann dadurch zu Stande, daß der Strom über einen unebenen Boden hinfließt, und der auf die freie Oberfläche wirkende Druck die Flüssigkeit verhindert, jenen Boden

ganz zu verlassen. Von dieser Art sind die Wellchen, die in fließendem Wasser durch Unebenheiten des Grundes entstehen und die weder Ort noch Höhe mit der Zeit wechseln, vorausgesetzt nur, daß ihre Höhe so gering ist, daß in der strengen Bedingung für die freie Oberfläche

$$\frac{V^2}{2} + gy + \frac{p}{\varepsilon} = \text{Const.}$$

die Aenderung des Potentiales der Schwere gy längs der freien Oberfläche neben dem Quadrat der Geschwindigkeit V vernachlässigt werden kann.

Dürfen innerhalb oder an der Grenze der Flüssigkeit Quellen und Senken liegen, so kann die zweite (untere) Grenze der Flüssigkeit auch eine horizontale Ebene sein. In diesem Falle stellt sie sich in der ζ-Ebene als ein Stück der ξ-Axe dar, z. B. als deren ganze negative Hälfte.

Ein Beispiel für eine Wellenbewegung der besprochenen Art liefert die specielle Form der Beziehung zwischen ω und ζ:

$$4)\qquad 2ia\sin\omega b = \frac{c-\zeta}{c+\zeta} \quad \text{oder} \quad \zeta = c\frac{1-2ia\sin\omega b}{1+2ia\sin\omega b}.$$

Setzt man

$$2i\sin\omega b = e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} = -\cos\varphi b(e^{+\psi b} - e^{-\psi b}) + i\sin\varphi b(e^{+\psi b} + e^{-\psi b})$$

abgekürzt $\qquad = m + in,$

so wird

$$5)\qquad \xi = c\frac{1-a^2(m^2+n^2)}{(1+am)^2+a^2n^2}, \quad \eta = -\frac{2anc}{(1+am)^2+a^2n^2}$$

oder

$$6)\qquad ma = \frac{c^2-\xi^2-\eta^2}{(c+\xi)^2+\eta^2}, \quad na = -\frac{2c\eta}{(c+\xi)^2+\eta^2}.$$

Dem speciellen Werth $\psi = 0$ entspricht $m = 0$ und daher

$$\xi^2 + \eta^2 = c^2;$$

$\psi = 0$ giebt also eine Stromcurve, längs deren man die Flüssigkeit an einen Luftraum von constantem Druck grenzen lassen kann, denn ihr Bild in der ζ-Ebene ist ein Kreis um den Coordinatenanfang vom Radius c.

Aber von diesem Kreis ergiebt nur ein gewisser Bogen das Bild der Stromcurve $\psi = 0$. Denn während φ von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, pendelt n zwischen -2 und $+2$, und demgemäß bleibt ξ innerhalb des Intervalles zwischen

$$\xi_1 = c\frac{1-4a^2}{1+4a^2} \text{ und } \xi_2 = c,$$

dagegen η innerhalb desjenigen zwischen

$$\eta_1 = -\frac{4ac}{1+4a^2} \text{ und } \eta_2 = +\frac{4ac}{1+4a^2},$$

wo sich ξ_1 und η_1 resp. η_2 einerseits, $\xi_2 = c$ und $\eta = 0$ andererseits entsprechen.

$\xi_1 = 0$ bezeichnet eine verticale Geschwindigkeit; soll diese ausgeschlossen sein, so muß

$$4a^2 < 1 \text{ oder } -1 < 2a < +1$$

sein. Wenn a diese Grenzwerthe erreicht, wird $\eta_1 = \pm c$.

Jeder andere Werth C von ψ als $\psi = 0$ entspricht einer Stromcurve, längs deren man die Flüssigkeit nur durch eine feste Wand begrenzen kann.

Aus (4) folgt nun auch

$$z = \int \xi \, d\omega = c\left[\frac{2i}{kb} l\left(\frac{1+k+2ae^{i\omega b}}{1-k+2ae^{i\omega b}}\right) - \omega\right], \tag{7}$$

falls man kurz

$$\sqrt{1+4a^2} = k$$

setzt. Die Zerlegung in den reellen und den imaginären Theil giebt

$$\begin{aligned} x &= -c\left[\frac{2}{kb}\operatorname{arctg}\left(\frac{k\sin\varphi b}{\cos\varphi b - a(e^{+\psi b} - e^{-\psi b})}\right) + \varphi\right], \\ y &= +c\left[\frac{1}{kb} l \frac{(1+k+2ae^{-\psi b}\cos\varphi b)^2 + 4a^2e^{-2\psi b}\sin^2\varphi b}{(1-k+2ae^{-\psi b}\cos\varphi b)^2 + 4a^2e^{-2\psi b}\sin^2\varphi b} - \psi\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Da ξ und η, wie auch x und y, die Unabhängige φ nur in $\cos(\varphi b)$ oder $\sin(\varphi b)$ enthalten, so sind alle diese Größen um $\varphi = 2\pi/b$ periodisch. Wir brauchen daher nur das Intervall

$$0 \leqq \varphi b < 2\pi$$

zu betrachten.

Für $\varphi = 0$ ist $\eta = 0$, also die Geschwindigkeit in jeder Stromcurve horizontal, das gleiche gilt für $\varphi = \pi$. Der Unterschied der bezüglichen Y-Coordinaten ist die ganze Höhe der betreffenden Wellenlinie. Er läßt sich sehr einfach ausdrücken. Man erhält nämlich sogleich

$$y_1 - y_2 = \frac{c}{kb} l\left[\left(\frac{1+k+2ae^{-\psi b}}{1-k+2ae^{-\psi b}}\right)^2\left(\frac{1-k-2ae^{-\psi b}}{1+k-2ae^{-\psi b}}\right)^2\right],$$

und dies ist

$$9) \qquad = \frac{2c}{kb} l\left(\frac{1-(k+2ae^{-\psi b})^2}{1-(k-2ae^{-\psi b})^2}\right).$$

Wegen der Bedeutung von k schreibt sich dies auch

$$9') \qquad = \frac{2c}{kb} l\left(\frac{1-(k+2ae^{+\psi b})^2}{1-(k-2ae^{+\psi b})^2}\right),$$

und dies zeigt, daß positive und negative Werthe von ψ dieselbe Wellenhöhe ergeben. Dem entspricht, daß $y_1 - y_2$ für $\psi = 0$, d. h. für die Stromcurve, welche die freie Oberfläche bildet, seinen größten Werth annimmt; man erhält nämlich hierfür

$$10) \qquad \bar{y}_1 - \bar{y}_2 = H = \frac{2c}{kb} l \frac{1-(k+2a)^2}{1-(k-2a)^2} = \frac{2c}{kb} l \frac{4a+\sqrt{1+4a^2}}{4a-\sqrt{1+4a^2}}.$$

Da nun zugleich für $\psi = 0$ die größten Steigungen der Stromcurven geringer sind als für alle anderen Werthe von ψ, so ergiebt sich, daß die periodischen Unebenheiten des Bodens, welche wir als Ursache der oben behandelten Wellenbewegung betrachteten, geringere Höhen, aber zugleich schärfere Krümmungen haben müssen, als die Wellenberge an der freien Oberfläche.

Soll innerhalb der Flüssigkeit die Geschwindigkeit nirgends unendlich werden, so darf ζ daselbst nicht verschwinden; dies giebt einen Grenzwerth für ψ an; nach (5) muß nämlich gelten

$$\frac{1}{a^2} > (e^{+\psi b} - e^{-\psi b}).$$

Für die freie Oberfläche, für welche $\psi = 0$ ist, folgt aus (8)

$$11) \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= -c\left[\frac{2}{kb}\operatorname{arctg}(k \operatorname{tg} \varphi b) + \varphi\right], \\ \bar{y} &= \frac{c}{kb} l \frac{(k+1)(k+2a\cos\varphi b)}{(k-1)(k-2a\cos\varphi b)}; \end{aligned}$$

letzteres schreibt sich, wenn man $l(k+1)-l(k-1)$ mit in die Integrationsconstante zieht, einfacher

$$\bar{y} = \frac{c}{kb} l\left(\frac{k+2a\cos\varphi b}{k-2a\cos\varphi b}\right).- \tag{11'}$$

Auf Fälle, wo äußere Kräfte wirksam sind, ist die Kirchhoff'sche Methode bisher noch nicht angewandt; in der That verliert sie hier auch den größten Theil ihrer Vorzüge, da in der Grenzbedingung für die freie Oberfläche

$$\bar{V}^2 + 2\bar{\Phi} = \text{Const.} \tag{12}$$

das Potential Φ der wirkenden Kraft sich nicht allgemein durch ξ und η ausdrücken läßt. Wirkt allein die Schwerkraft, und wird die $+Y$-Axe vertical nach oben gelegt, so lautet die Bedingung (12)

$$\bar{V}^2 = C - 2g\bar{y}, \tag{12'}$$

also unter Benutzung der Formeln (2) und (3)

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2} = C - \frac{2g}{i} J\left(\int \zeta\, d\omega\right), \tag{13}$$

wo $J(\chi)$ den imaginären Theile von χ bezeichnet; $\zeta = F(\omega)$ liefert nunmehr allein in dem Falle eine Bewegung einer schweren Flüssigkeit, welche eine freie Grenze gestattet, wenn für irgend einen Werth von C die Gleichung $\psi = C$, in ξ und η ausgedrückt, dieselben Curven liefert, wie (13). Es giebt keine Methode, solche Beziehungen $\zeta = F(\omega)$ aufzufinden, und man ist ausschließlich auf Versuche angewiesen.

Die Gleichung (13) wird für die Behandlung etwas bequemer, wenn innerhalb der freien Oberfläche $\bar{y}$ so wenig variirt, daß $2g$ mal dieser Aenderung klein neben $\bar{V}^2$ ist. Legt man den Anfangspunkt für y ungefähr in die Mitte zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt der Oberfläche und bezeichnet die dort stattfindende Geschwindigkeit mit V_0, so lautet (12')

$$\bar{V}^2 = \bar{V}_0^2 - 2g\bar{y}.$$

Läßt sich nun $(2g\bar{y})^2$ neben $\bar{V}_0^4$ vernachlässigen, so folgt hieraus auch

$$\frac{1}{\bar{V}^2} = \frac{1}{\bar{V}_0^2}\left(1+\frac{2g\bar{y}}{\bar{V}_0^2}\right),$$

was wir abkürzen in

$$\frac{1}{\bar{V}^2} = m^2 + n^2\bar{y}; \tag{14}$$

bei Einführung von ξ und η giebt dies

$$14') \qquad \xi^2 + \eta^2 = m^2 + \frac{n^2}{i} J\left(\int \zeta \, d\omega\right).$$

Jetzt gelingt es leichter, eine Function $\zeta = F(\omega)$ zu finden, welche der gestellten Bedingung genügt, daß $\psi(\xi, \eta) = C$ dieselben Curven in der ζ-Ebene bestimmt, wie die Gleichung (14).

Setzt man nämlich

$$15) \qquad \zeta = a - b e^{-ic\omega},$$

worin a, b, c reelle Constanten sind, so wird

$$\xi - a = -b e^{c\psi} \cos c\varphi, \quad \eta = +b e^{c\psi} \sin c\varphi$$

und

$$16) \qquad (\xi - a)^2 + \eta^2 = b^2 e^{2c\psi};$$

die Strömungscurven $\psi = C$ stellen sich also in der ζ-Ebene als Kreise um den Punkt $\xi = a$, $\eta = 0$ dar. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit für diejenige Stromcurve, welche die freie Grenze bildet, $\psi = 0$ setzen. Dann muß jedenfalls $a > b$ sein, damit der Punkt $\zeta = 0$ nicht in das Bereich der Flüssigkeit fällt, welches Werthen ψ zwischen 0 und $-\infty$ entspricht; $\psi = -\infty$ giebt den Punkt $\xi = a$, $\eta = 0$ selbst, demgemäß eine Stromcurve, welche die Gestalt einer horizontalen Geraden besitzt, längs deren die Flüssigkeit mit der constanten Geschwindigkeit $1/a$ hinströmt.

Für z erhält man nach (3)

$$17) \qquad z = a\omega + \frac{i}{c}(\zeta - a),$$

wo die Integrationsconstante gleich Null gesetzt ist, da auf diese Weise, wie später hervortreten wird, der Anfangspunkt für $\bar{y}$ seine günstigste Lage erhält. Hieraus folgt allgemein

$$17') \qquad x = a\varphi - \frac{\eta}{c}, \quad y = a\psi + \frac{\xi - a}{c},$$

und die Oberflächenbedingung lautet in Rücksicht auf die Annahme $\psi = 0$ nach (14')

$$\xi^2 + \eta^2 = m^2 + n^2 \frac{\xi - a}{c};$$

damit dieselbe mit der aus (16) folgenden Formel

$$(\xi - a)^2 + \eta^2 = b^2$$

übereinstimmt, ist nur erforderlich, daß zwischen den drei verfügbaren Constanten a, b, c und den Constanten m^2 und n^2 der Gleichung (14') die beiden Relationen

$$2ac = n^2, \quad b^2 + a^2 = m^2 \tag{18)}$$

bestehen; eine Constante, etwa c, bleibt also verfügbar, um verschiedene Wellenbewegungen darzustellen.

a, b, c können hiernach beliebiges Vorzeichen haben, nur muß jedenfalls ac positiv sein.

Die Gleichungen der Stromcurven werden nach (17′)

$$x = a\varphi - \frac{b}{c} e^{c\psi} \sin c\varphi, \quad y = a\psi - \frac{b}{c} e^{c\psi} \cos c\varphi,$$

und die Gleichungen der freien Oberfläche

$$x = a\varphi - \frac{b}{c} \sin c\varphi, \quad y = -\frac{b}{c} \cos c\varphi;$$

$y = 0$ entspricht also in der That der Mitte zwischen der höchsten und der tiefsten Stelle der freien Oberfläche.

Das sind, falls a, b, und c positiv sind, die Gleichungen von Trochoiden, wie solche schon bei einem andern Problem für die freie Oberfläche gefunden sind[1]). Es ist aber wohl zu beachten, daß in jenem Falle die Flüssigkeitstheilchen geschlossene Bahnen beschreiben und die Wellenhäupter mit der Zeit fortschreiten, hier aber die Wellen stille stehen und die Flüssigkeitstheilchen in's Unendliche fortschreiten. Demgemäß stehen die Trochoiden hier auch umgekehrt wie dort; hier nämlich rollt der erzeugende Kreis oberhalb, dort unterhalb der horizontalen Bahngeraden.

Auf den Fall, daß a, b, c positiv sind, lassen sich alle anderen Fälle zurückführen, indem man statt φ eine andere Variable, z. B. $\pi - \varphi$ oder $\pi + \varphi$ einführt; es genügt also, ihn allein in Betracht zu ziehen.

Der Radius R des rollenden Kreises und der Abstand r des erzeugenden Punktes von seinem Centrum sind gegeben durch

$$R = \frac{a}{c}, \quad r = \frac{b}{c} e^{c\psi};$$

der erstere ist also bei derselben Bewegung, d. h. demselben c für alle Stromcurven constant, der letztere nimmt mit abnehmendem ψ gleichfalls ab und verschwindet für $\psi = -\infty$, d. h. für $y = -\infty$; man kann also die Flüssigkeit in der Tiefe $y = -\infty$ durch eine horizontale Ebene begrenzt denken.

Die Geschwindigkeitscomponenten u und v werden nach (2) resp.

1) Kirchhoff, Mechanik p. 361.

$$u = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad v = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

d. h.

$$u = \frac{a - b\,e^{c\psi}\cos c\varphi}{N} \quad v = \frac{b\,e^{c\psi}\sin c\varphi}{N},$$

wo

$$N = a^2 + b^2 e^{2c\psi} - 2ab\,e^{c\psi}\cos c\varphi.$$

Speciell in der Verticalen, wo $\bar{y}$ seinen größten oder kleinsten Werth hat, also $c\varphi = h\pi$ ist, gilt

$$u = \frac{1}{a \pm b\,e^{c\psi}}, \quad v = 0;$$

wird eine solche mit der Tiefe wechselnde horizontale Geschwindigkeit der Flüssigkeit in einem Querschnitt gegeben, so muß sie weiterhin unter der Wirkung der Schwere in denjenigen Wellen sich fortbewegen, deren Gesetze oben entwickelt sind.

Damit die Wellenlinie, welche die freie Oberfläche bildet, keine Schleifen oder Spitzen enthält, in denen die Geschwindigkeit unendlich wird, muß $b/a = \beta$ ein ächter Bruch, also nach (18) $c^2 = n^4(1+\beta^2)/4m^2$ sein.

3. Potential-Bewegungen einer schweren Flüssigkeit mit freier Oberfläche, behandelt durch successive Annäherung.

Die Bedingungsgleichung für die freie Oberfläche einer incompressibeln in stationärer Bewegung befindlichen Flüssigkeit

$$\frac{\bar{V}^2}{2} + \bar{\Phi} + \frac{\bar{p}}{\varepsilon} = C \tag{1}$$

bietet bekanntlich für die Behandlung sehr bedeutende Schwierigkeiten. Ich werde zeigen, daß in den Fällen, wo diese Fläche nur wenig von der Gleichgewichtsoberfläche abweicht, welche die Flüssigkeit unter der Wirkung desselben Potentiales und desselben äußeren Druckes besitzen würde, sich eine Lösung des Bewegungsproblemes mitunter vortheilhaft durch die Methode der successiven Annäherung gewinnen läßt.

Der Grundgedanke des einzuschlagenden Verfahrens ist der folgende.

Man suche ein Geschwindigkeitspotential φ_1, welches den sonst gestellten Bedingungen entspricht und gestattet, die Flüssigkeit längs ihrer Gleichgewichtsoberfläche durch eine starre Wand zu

begrenzen. Diese Function giebt dann auch eine erste Annäherung für das eigentliche Problem, denn bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit in der Oberfläche ist dann die Grenzbedingung (1) erfüllt. Das Einsetzen des aus φ_1 folgenden Werthes der Geschwindigkeit V_1 in jene Formel liefert für die Gleichung der freien Oberfläche eine zweite Annäherung, nämlich

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right] + \Phi + \frac{p}{\varepsilon} = C. \qquad 2)$$

Die hierdurch gegebene Oberfläche wird nun bei der Bestimmung der zweiten Annäherung $\varphi_1 + \varphi_2$ für das Geschwindigkeitspotential als eine feste Grenze der Flüssigkeit betrachtet; es wird nämlich eine Function φ_2 aufgesucht, welche zu φ_1 hinzugefügt ein System von Stromcurven ergiebt, von denen eine Schaar die durch (2) gegebene freie Oberfläche erfüllt. Die Benutzung dieses corrigirten Werthes $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ in der Grenzbedingung (1) giebt weiter die Gleichung der freien Oberfläche in der dritten Annäherung:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial z}\right)^2\right] + \Phi + \frac{p}{\varepsilon} = C. \qquad 2')$$

Ebenso kann man weiter verfahren.

Auf diese Weise ist es in sehr vielen Fällen ohne Schwierigkeit möglich, die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Annäherung zu finden; aber auch der Werth des Geschwindigkeitspotentiales in zweiter und das Gesetz der freien Oberfläche in dritter Annäherung ist in einigen Fällen zu gewinnen möglich.

Ich betrachte im Folgenden als wirkende Kraft ausschließlich die Schwere, welche parallel der $+Z$-Axe wirken mag, und gebe zunächst die Lösung einiger ebener Probleme.

Bei ebenen Bewegungen gehört zu jedem Geschwindigkeitspotential φ eine Strömungsfunction σ, welche die Eigenschaft hat, daß $\sigma =$ Const das System aller Stromcurven angiebt. Zwischen beiden Functionen besteht, falls die Bewegung in der XZ-Ebene stattfindet, der Zusammenhang

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = +\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x}. \qquad 3)$$

Es sei eine schwere Flüssigkeit von unendlicher Tiefe gegeben, im Ruhezustand durch die Ebene $z = 0$ begrenzt; in derselben werde in der Tiefe $z = a$ unter der Oberfläche eine Quelle angebracht.

Setzt man dann

$$e^2 = (z-a)^2+x^2,$$
$$e_-^2 = (z+a)^2+x^2,$$

so ist

4) $$\varphi_1 = m\,l(e\cdot e_-)$$

bekanntlich die erste Annäherung für φ. Aus ihr folgen die Werthe der Geschwindigkeiten

$$u_1 = mx\left(\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_-^2}\right), \quad w_1 = m\left(\frac{z-a}{e^2}+\frac{z+a}{e_-^2}\right),$$

sowie der Werth der Strömungsfunction

$$\sigma_1 = m\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{z-a}+\operatorname{arctg}\frac{x}{z+a}\right)$$

oder kurz

5) $$\sigma_1 = m(\vartheta+\vartheta_-),$$

falls mit ϑ und ϑ_- die Winkel von e und e_- gegen die Z-Axe bezeichnet werden.

Die freie Oberfläche ist in erster Näherung die XY-Ebene, in dieser ist

$$\bar{u}_1 = \frac{2mx}{E^2}, \quad \bar{w}_1 = 0, \quad \bar{V}_1^2 = \bar{u}_1^2,$$

falls $E^2 = a^2+x^2$ ist; die freie Oberfläche wird also in **zweiter** Annäherung gegeben sein durch

6) $$\frac{2m^2x^2}{E^4} = gz.$$

Sie fällt also an den Stellen $x = 0$ und $x = \pm\infty$ in das ursprüngliche Niveau und ist im übrigen etwas darunter gesenkt, am stärksten, nämlich um $m^2/2a^2g$, an den Stellen $x = \pm a$.

Bildet man aus (6)

$$\frac{z}{a} = \frac{2m^2}{gaE^2}\cdot\left(\frac{x}{E}\right)^2$$

und beachtet, daß x/E stets ein ächter Bruch ist, so erkennt man, daß $2m^2/gaE^2$ von der Ordnung des Verhältnisses der Abweichung der Oberfläche von der Ebene zu der Tiefe der Quelle unter der Oberfläche ist.

Um zu dem Werthe des Geschwindigkeitspotentiales $\varphi = \varphi_1+\varphi_2$ in zweiter Annäherung überzugehen, beachte man, daß für φ_2 nur

die logarithmischen Potentiale von Massen außerhalb der Flüssigkeit gewählt werden können, um nicht in Widerspruch mit der Annahme nur einer Quelle innerhalb der Flüssigkeit zu kommen; nach Symmetrie wird man diese supponirten Massen allein auf der negativen Z-Axe anbringen können. Ihre nähere Bestimmung hat so zu erfolgen, daß die ergänzte Strömungsfunction

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

für den Werth $\sigma = m\pi$ die Gleichung (6) der freien Oberfläche ergiebt. Man geht demgemäß am besten direct auf die Bestimmung von σ_2 aus.

Hierzu bemerken wir erstens, daß der Werth von σ_1 bis auf Glieder zweiter Ordnung des Verhältnisses z/a exclusive lautet

$$\sigma_1 = m\left(\pi + \frac{2zx}{E^2}\right), \tag{7}$$

und zweitens, daß Glieder von der Form $(\sigma_2) = \frac{\partial^h \vartheta_-}{\partial z^h}$, wo wieder $\vartheta_- = \operatorname{arctg} \frac{x}{z+a}$ ist, die Strömungsfunctionen geben zu den Geschwindigkeitspotentialen

$$(\varphi_2) = \frac{\partial^h}{\partial z^h} l e_-,$$

welche gewissen vielfachen Quellpaaren auf der $-Z$-Axe entsprechen.

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial z^2} = \frac{2x(z+a)}{e_-^4}, \quad \frac{\partial^3 \vartheta_-}{\partial z^3} = 2x\left(\frac{4x^2}{e_-^6} - \frac{3}{e_-^4}\right);$$

also wird

$$A\left(\frac{\partial^3 \vartheta_-}{\partial z^3} + \frac{3}{a}\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial z^2}\right) = 2Ax\left(\frac{3z}{a e_-^4} + \frac{4x^2}{e_-^6}\right)$$

ein Ansatz sein, welcher der Bedingung für σ_2 genügt. Wählt man speciell

$$A = -m^3/2g$$

so ist das erste Glied des letzteren Ausdruckes $-3m^3 xz/g a e_-^4$ nach dem oben Gesagten nahe der freien Oberfläche von der Ordnung von mz^2/a^2, also bei der benutzten Annäherung zu vernachlässigen. In der Nähe der freien Oberfläche reducirt sich daher σ auf

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = m\left[\pi + \frac{2x}{E^2}\left(z - \frac{2x^2 m^2}{gE^4}\right)\right] \tag{8}$$

und dies giebt für $\sigma = m\pi$

$$z = \frac{2x^2 m^2}{g E^4},$$

wie verlangt.

Hiernach ist das Geschwindigkeitspotential in zweiter Annäherung

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = m\left[l(e\cdot e_-) - \frac{m^2}{2g}\left(\frac{\partial^3 l e_-}{\partial z^3} + \frac{3}{a}\frac{\partial^2 l e_-}{\partial z^2}\right)\right], \tag{9}$$

ihm entspricht der Werth der Strömungsfunction

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = m\left[\vartheta + \vartheta_- - \frac{m^2}{2g}\left(\frac{\partial^3 \vartheta_-}{\partial z^3} + \frac{3}{a}\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial z^2}\right)\right].$$

Die Differentialquotienten nach z sind hierin beliebig mit denen nach a zu vertauschen.

Um endlich die Gleichung der freien Oberfläche in dritter Annäherung zu bestimmen, hat man für die Gleichung (2′) nur $u = u_1 + u_2$ zu berechnen, da $w = w_1 + w_2$ von erster Ordnung, w^2 also in V^2 neben u^2 zu vernachlässigen ist. Die Berechnung ergiebt

$$u = \frac{2mx}{E^2}\left[1 + \frac{3m^2}{2gaE^2}\left(1 + \frac{8a^4}{E^4}\right)\right],$$

und hieraus folgt die gesuchte Gleichung der Oberfläche

$$\frac{2m^2x^2}{E^4}\left[1 + \frac{3m^2}{gaE^2}\left(1 + \frac{8a^4}{E^4}\right)\right] = gz. - \tag{10}$$

Ist mehr als eine Quelle in der Flüssigkeit vorhanden, so erhält man die entsprechenden φ_1 und φ_2 durch einfache Superposition der für die einzelnen geltenden Werthe.

Diese Ueberlegung gestattet, aus den vorstehenden einfachen Formeln die Lösungen einer ganzen Zahl complicirterer Probleme abzuleiten.

Ein $\pm$ Quellpaar, dessen Verbindungslinie der X-Axe parallel ist, an einem beliebigen Punkte der $+Z$-Axe angebracht, dazu sein Spiegelbild in Bezug auf die X-Axe, ferner eine Quelle in $x = -\infty$, eine Senke in $x = +\infty$ geben zusammen eine Bewegung, die sich außer durch die X-Axe durch eine geschlossene Curve, die in gewisser Annäherung kreisförmig ist, begrenzen läßt. Man kann also setzen

$$\varphi_1 = m\alpha \frac{\partial}{\partial x} l(e e_-) + Ux, \tag{11}$$

wo wieder $e_1^2 = (z-a)^2 + x^2$, $e_-^2 = (z+a)^2 + x^2$ ist, um die erste Näherung für das Geschwindigkeitspotential zu haben, wenn ein unendlich tiefer Strom mit der Geschwindigkeit U über einen festen Cylinder wegströmt. Der Querschnitt des letzteren ist ein Kreis vom Radius R um den Punkt $x = 0$, $z = a$, falls R^2 neben $(2a)^2$ vernachlässigt werden kann und

$$m\alpha\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{4a^2}\right) = U$$

gesetzt wird. Die Gleichung der freien Oberfläche ist hier in zweiter Annäherung, falls wieder $E^2 = a^2 + x^2$,

$$\left[\frac{2m\alpha(a^2-x^2)}{E^4} + U\right]^2 = 2gz + U^2, \tag{11'}$$

wo die Constante U^2 rechts zugefügt ist, damit das Niveau im Unendlichen in die XY-Ebene fällt.

Wird statt eines Quellpaares bei $z = a$ eine unendliche Reihe einander gleicher in gleichen Abständen b längs der Geraden $z = a$ und $z = -a$ angebracht, so ergiebt sich

$$\varphi_1 = m\alpha \frac{\partial}{\partial x} l \prod_{-\infty}^{+\infty} (e_h e_{-h}) + Ux, \tag{12}$$

worin

$$e_h^2 = (z-a)^2 + (x-hb)^2, \quad e_{-h}^2 = (z+a)^2 + (x-hb)^2$$

gesetzt ist. Das unendliche Product läßt sich nach bekannter Methode umformen und liefert schließlich

$$\varphi_1 = m\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x} l\left(\cos\frac{2\pi i(z-a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right) + \frac{\partial}{\partial x} l\left(\cos\frac{2\pi i(z+a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right)\right] + Ux,$$

$$= \frac{2\pi m\alpha}{b}\sin\frac{2\pi x}{b}\left[\frac{1}{\cos\frac{2\pi i(z-a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}} + \frac{1}{\cos\frac{2\pi i(z+a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}}\right] + Ux \tag{12'}$$

und

$$\sigma_1 = \frac{2\pi m\alpha i}{b}\left[\frac{\sin\frac{2\pi i(z-a)}{b}}{\cos\frac{2\pi i(z-a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}} + \frac{\sin\frac{2\pi i(z+a)}{b}}{\cos\frac{2\pi i(z+a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}}\right] + Uz.$$

Hieraus folgt die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Annäherung

$$\left[\frac{8\pi^2 m\alpha}{b^2}\,\frac{\cos\frac{2\pi x}{b}\cos\frac{2\pi i a}{b} - 1}{\left(\cos\frac{2\pi i a}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right)^2} + U\right]^2 = 2gz + \left[U - \frac{8\pi^2 m\alpha}{b^2\cos^2\frac{2\pi i a}{b}}\right]^2. \tag{12''}$$

Die Bewegung ist nach unten zu begrenzen durch eine wellenförmige Stromcurve, welche zwischen $z = 0$ und $z = a$ liegt, und man kann das Resultat betrachten als die Darstellung von stehenden Wellen, die in einer strömenden schweren Flüssigkeit entstehen in Folge von periodischen Unebenheiten des Grundes. Die Bewegung ist aber durchaus verschieden von der im vorigen Abschnitte bei Nichtberücksichtigung der Schwere erhaltenen; z. B. liegen hier die Wellenberge an der freien Oberfläche über den Wellenthälern des Grundes und umgekehrt, während dort Berg über Berg, Thal über Thal liegt.

Die weitere Annäherung ist nach den Formeln (9) bis (10) sogleich hinzuschreiben, aber sehr complicirt.

Ist die Flüssigkeit in der Tiefe $z = a$ durch eine horizontale starre Ebene begrenzt, in welcher sich eine Quelle befindet, indem z. B. die Flüssigkeit durch einen Spalt von außen zuströmt, so erhält man φ_1 durch ein System einfacher gleicher Quellen, die sich in gleichen Abständen $2a$ auf der Z-Axe befinden, so daß wird

$$13)\qquad \varphi_1 = m\, l \prod_{-\infty}^{+\infty} e_h$$

worin $e_h^2 = (z + (2h+1)a)^2 + x^2$ ist. Dies formt sich um in

$$13')\qquad \varphi_1 = m\, l\left(\cos\frac{\pi z}{a} + \cos\frac{i\pi x}{a}\right),$$

woraus, da

$$u_1 = \frac{-m\frac{i\pi}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}}{\cos\frac{\pi z}{a} + \cos\frac{i\pi x}{a}} \text{ ist,}$$

für die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Näherung folgt

$$13'')\qquad \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(i\,\mathrm{tg}\frac{i\pi x}{a}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{-\frac{\pi z}{a}}}{e^{\frac{\pi z}{a}} + e^{-\frac{\pi z}{a}}}\right) = 2gz.$$

Jetzt ist das Niveau im Unendlichen nicht mehr gleich dem in der Z-Axe, sondern um $m^2\pi^2/2ga^2$ tiefer, da dort die Geschwindigkeit nicht verschwindet.

Die weiteren Annäherungen sind ebenfalls nach der oben erörterten Methode zu bilden. —

Die Methode der successiven Annäherung ist ebenso bequem,

wie auf ebene Flüssigkeitsbewegungen, auch auf solche, welche den Character eines Rotationskörpers besitzen, anwendbar.

Zwischen dem Geschwindigkeitspotential φ und der Strömungsfunction σ bestehen hier, falls man die Z-Axe zur Rotationsaxe wählt und den Abstand eines Punktes von ihr mit e bezeichnet, die Beziehungen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = e\frac{\partial \varphi}{\partial e}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial e} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{14}$$

Sei nun zunächst wieder die schwere Flüssigkeit unendlich tief und in ihr im Punkte $z = a$ eine Quelle vorhanden, so ist die erste Näherung für φ

$$\varphi_1 = -m\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_-}\right) \tag{15}$$

falls $r^2 = (z-a)^2+e^2$, $r_-^2 = (z+a)^2+e^2$ ist. Hieraus folgt

$$\sigma_1 = m\left(\frac{z-a}{r}+\frac{z+a}{r_-}\right), \tag{15'}$$

und die Geschwindigkeiten s und w normal und parallel zur Z-Axe ergeben sich

$$s_1 = me\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r_-^3}\right), \quad w_1 = m\left(\frac{z-a}{r^3}+\frac{z+a}{r_-^3}\right). \tag{16}$$

Daraus folgt die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Näherung, falls $a^2+e^2 = E^2$ gesetzt wird,

$$\frac{2m^2 e^2}{E^6} = gz; \tag{17}$$

aus ihr ergiebt sich, daß für Punkte der freien Oberfläche z/a von der Ordnung von $2m^2/gaE^4$ ist.

Um zur zweiten Annäherung für φ und σ fortzuschreiten, beachte man, daß bis auf Größen der Ordnung von $(z/a)^2$ exclusive

$$\sigma_1 = \frac{2me^2 z}{E^3} \tag{18}$$

ist, sowie daß Glieder von der Form

$$(\sigma_2) = \frac{\partial^h \dfrac{z+a}{r_-}}{\partial z^h}$$

die Strömungsfunctionen ergeben, welche Geschwindigkeitspotentialen

$$(\varphi_h) = -\frac{\partial^h \frac{1}{r_-}}{\partial z^h}$$

entsprechen.

Nun ist

$$\frac{\partial^2\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^2} = -\frac{3e^2(z+a)}{r_-^5}, \quad \frac{\partial^3\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^3} = -3e^2\left(\frac{1}{r_-^5} - \frac{5(z+a)^2}{r_-^7}\right),$$

$$\frac{\partial^4\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^4} = 15e^2(z+a)\left(\frac{3}{r_-^7} - \frac{7(z+a)^2}{r_-^9}\right),$$

also wird

$$A\left(\frac{\partial^4\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^4} + \frac{4}{a}\frac{\partial^3\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^3} - \frac{4}{a^2}\frac{\partial^2\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^2}\right)$$

$$= 3Ae^2\left[\frac{4z}{a^2 r_-^5} + \frac{20z(a+z)}{a r_-^7} + \frac{35e^2(a+z)}{r_-^9}\right]$$

ein Ansatz sein, der den Bedingungen für σ_2 entspricht. Wählt man noch

$$A = -\frac{4m^3}{105ag},$$

so sind die in z multiplicirten Glieder des obigen Ausdrucks in der Nähe der freien Oberfläche zweiter Ordnung und demgemäß zu vernachlässigen. Das noch Uebrige aber ergiebt in der Nähe der freien Oberfläche

$$\text{19)} \qquad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2'' = \frac{2me^2}{E^4}\left(z - \frac{2m^2e^2}{gE^6}\right),$$

sodaß für $\sigma = 0$ folgt

$$\frac{2m^2e^2}{E^4} = gz,$$

wie verlangt ist.

Die gefundenen zweiten Näherungswerthe sind also

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \qquad 20)$$

$$-m\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r_-} - \frac{4m^2}{105ag}\left(\frac{\partial^4 \frac{1}{r_-}}{\partial z^4} + \frac{4}{a}\frac{\partial^3 \frac{1}{r_-}}{\partial z^3} - \frac{4}{a^2}\frac{\partial^2 \frac{1}{r_-}}{\partial z^2}\right)\right],$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 =$$

$$+m\left[\frac{z-a}{r} + \frac{z+a}{r_-} - \frac{4m^2}{105ag}\left(\frac{\partial^4\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^4} + \frac{4}{a}\frac{\partial^3\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^3} - \frac{4}{a^2}\frac{\partial^2\left(\frac{z+a}{r}\right)}{\partial z^2}\right)\right],$$

worin die Differentialquotienten nach z auch mit solchen nach a zu vertauschen sind.

Aus ihnen folgt schließlich die Gleichung der freien Oberfläche in dritter Näherung wie oben.

Man hat nämlich

$$s = \frac{2me}{E^3}\left[1 + \frac{2m^2e^3}{gE^6}\left(2 - \frac{9e^2}{E^2}\right)\right],$$

während w von erster Ordnung in Bezug auf z/a bleibt. Demgemäß wird die Gleichung der freien Oberfläche in dritter Annäherung

$$\frac{2m^2e^2}{E^6}\left[1 + \frac{4m^2e^3}{gE^6}\left(2 - \frac{9e^2}{E^2}\right)\right] = gz. \qquad 21)$$

Sind mehrere Quellen vorhanden, so ist die einfache Superposition der Lösungen nur dann auch in zweiter Annäherung gestattet, wenn dabei die Bewegung der Flüssigkeit den Charakter eines Rotationskörpers behält, also die Quellen sämmtlich auf der Z-Axe liegen.

Besitzt die Flüssigkeit die endliche Tiefe a, und befindet sich im Boden eine kreisförmige Oeffnung um die Z-Axe vom Radius R, durch welche Flüssigkeit etwa aus einem Rohre zuströmt nach dem Gesetz

$$w = -\frac{S}{2\pi R\sqrt{R^2 - e^2}}, \qquad 22)$$

worin S das ganze in der Zeiteinheit eintretende Volumen bezeichnet, dann bestimmt sich leicht [1])

$$\varphi_1 = \frac{-S}{2\pi R}\int_0^\infty \frac{e^{\zeta z} + e^{-\zeta z}}{e^{\zeta a} - e^{-\zeta a}} J^0(\zeta e) \sin(\zeta R)\frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad 23)$$

1) Vergl. H. Weber, Crelle's Jour. 75, 76 1872.

wo J^h wie gewöhnlich die Bessel'sche Function h^{te} Ordnung bezeichnet. Denn diese Function ist eine Lösung der Hauptgleichung $\Delta \varphi_1 = 0$ und ergiebt für $z = \pm a$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\mp S}{2\pi R} \int_0^\infty J^0(\zeta e) \sin(\zeta R)\, d\zeta,$$

und dies Integral ist gleich Null, falls $e > R$ ist, und ist gleich

$$\mp S/2\pi R \sqrt{R^2 - e^2},$$

falls $e < R$, erfüllt also für $z = + a$ die obige Bedingung (22).

Aus ihm folgt, da

$$\frac{\partial J^0 x}{\partial x} = - J^1 x$$

ist,

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial e} = + \frac{S}{2\pi R} \int_0^\infty \frac{e^{\zeta z} + e^{-\zeta z}}{e^{\zeta a} - e^{-\zeta a}} J^1(\zeta e) \sin(\zeta R)\, d\zeta$$

und hieraus durch Einsetzen in die Gleichung (2) für $z = 0$

$$24)\quad \frac{S^2}{2\pi^2 R^2} \left[\int_0^\infty \frac{J^1(\zeta e) \sin(\zeta R)\, d\zeta}{e^{\zeta a} - e^{-\zeta a}} \right]^2 = g z.$$

Ist R verschwindend klein, so giebt dies

$$25)\quad \frac{S^2}{2\pi^2} \left[\int_0^\infty \frac{J^1(\zeta e)\, \zeta d\zeta}{e^{\zeta a} - e^{-\zeta a}} \right]^2 = g z.$$

In diesem letzteren Fall kann man bekanntlich das Integral auch durch eine unendliche Reihe ausdrücken, denn für φ_1 gilt hier der Ansatz

$$\varphi_1 = - m \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(z - (2h+1)a)^2 + e^2}}$$

bei welchem die supponirten Massen m sich durch das einströmende Quantum S ausdrücken, sodaß $m = S/2\pi$ ist. —

Wir haben oben ausschließlich stationäre Bewegungen betrachtet; die Methode ist aber, wenngleich weniger einfach, auch auf nichtstationäre anwendbar, wenn nur $\partial \varphi / \partial t$ eine bestimmte Kleinheit besitzt. Probleme, welche in der erörterten Weise sich behandeln lassen, bietet die Pulsation oder die verticale Fortschreitung einer Kugel in einem unendlichen Teiche.

II. Reihe.

Vorgelegt am 7. März 1891.

4. Stationäre combinirte Bewegungen, welche nur von zwei Coordinaten abhängen, innerhalb einer incompressibeln Flüssigkeit unter der Wirkung äusserer Kräfte, welche ein Potential haben.

Faßt man in die Bezeichnung Ω zusammen das Aggregat

$$\Omega = \Phi + \frac{p}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2} V^2, \tag{1}$$

worin Φ das äußere Potential und V die Lineargeschwindigkeit der Flüssigkeit ist, so lassen sich die Euler'schen Gleichungen für eine stationäre Bewegung schreiben[1])

$$\begin{aligned} 2(v\zeta - w\eta) &= +\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ 2(w\xi - u\zeta) &= +\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ 2(u\eta - v\xi) &= +\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Aus ihnen folgt

$$\begin{aligned} u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} + w\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0, \\ \xi\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \zeta\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial n} &= 2V\tau \sin(V, \tau); \end{aligned} \tag{3}$$

in der letzten Gleichung bezeichnet τ die resultirende Rotationsgeschwindigkeit, (V, τ) den Winkel der Wirbelaxe gegen die Richtung von V. und $\partial\Omega/\partial n$ den Differentialquotienten von Ω nach der Richtung der Normalen auf der durch die Stelle x, y, z gehenden Fläche $\Omega =$ Const.

Diese Fläche $\Omega =$ Const. hat hiernach die Eigenschaft, daß in ihr sowohl die Wirbel- als die Stromlinien liegen, welche durch den Punkt x, y, z hindurchgehen, und daß zwischen zwei Nach-

1) Lamb-Reiff, Hydrodynamik. Freiburg 1884 p. 482.

berflächen $\Omega = C$ und $\Omega = C + \delta C$ die Normale δn eine solche Länge besitzt, daß

$$V\tau \, \delta n \sin (V, \tau)$$

constant ist.

Zwei specielle Fälle von Bewegungen, welche mit diesen Bedingungen verträglich sind, hat Stokes[1]) angegeben. Ich werde im Folgenden sämmtliche stationäre Flüssigkeitsbewegungen ableiten, welche aus Wirbel- und Potentialbewegungen combinirt und nur von zwei Coordinaten abhängig sind.

a) Ebene combinirte Bewegungen lassen sich durch eine einzige Function ω darstellen, so daß

$$4)\qquad u = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \; v = -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \; \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \varDelta \omega = -2\tau$$

ist, falls τ die resultirende Wirbelgeschwindigkeit bezeichnet. Die Bewegung ist nämlich dann eine combinirte, wenn ω einen additiven Theil ω_1 enthält, welcher der Gleichung $\varDelta \omega_1 = 0$ genügt; dieser giebt für sich eine Potentialbewegung. $\omega =$ Const. giebt allgemein das System der Stromcurven.

Die Gleichungen (1) nehmen hier die Form an

$$5)\qquad 2\tau \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \; 2\tau \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

woraus folgt, daß τ und Ω Functionen von ω allein, also längs jeder Stromcurve constant sein müssen; ein Resultat, das, soweit es τ betrifft, auch aus den bekannten von Helmholtz'schen Sätzen über Wirbelbewegungen folgt.

Enthält ω nur τ, so ist, falls man kurz

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \omega', \; \frac{d^2 \omega}{d\tau^2} = \omega''$$

setzt,

$$6)\qquad u = \omega' \frac{\partial \tau}{\partial y}, \; v = -\omega' \frac{\partial \tau}{\partial x}, \; V^2 = \omega'^2 E\tau,$$

falls

$$E\tau = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2$$

ist, und die Hauptgleichung (4) für ω lautet:

$$7)\qquad \varDelta \omega + 2\tau = \omega'' E\tau + \omega' \varDelta \tau + 2\tau = 0.$$

Soll sich aus derselben ω als Function von τ allein bestimmen, so muß auch $E\tau$ und $\varDelta \tau$ nur von τ allein abhängen. $\omega'^2 E\tau$ ist aber

1) Stokes, Math. and Phys. Papers, Cambridge 1880, I p. 1.

gleich V^2 und ω' nach Annahme nur von τ abhängig. Sonach sagt unser Resultat aus, daß eine ebene combinirte stationäre Bewegung unter der Wirkung von Kräften, welche ein Potential haben, nur in der Weise stattfinden kann, daß längs jeder Stromcurve sowohl Wirbel- als Lineargeschwindigkeit constant ist. Benachbarte Stromcurven haben demzufolge in ihrem ganzen Verlauf auch gleichen Abstand von einander.

Um die allgemeinste Bewegung, für welche ω und demgemäß $E\tau$ und $\Delta\tau$ nur von τ abhängen, wirklich zu bestimmen, ist aber die Form (7) der Hauptgleichung für ω nicht bequem, sondern es empfiehlt sich dazu, die Ausgangsformel

$$\Delta\omega + 2\tau = 0$$

von den Coordinaten x, y auf ein anderes orthogonales System τ und σ zu transformiren.

Definirt man zwei Größen P und Q dadurch, daß die Linienelemente dt und ds, welche normal zu den Curven τ = Const. und σ = Const. bis zu den betr. Nachbarcurven errichtet werden können, die Längen haben

$$dt = P d\tau, \quad ds = Q d\sigma, \tag{8}$$

so führt obige Gleichung bei der Transformation bekanntlich auf

$$\frac{1}{PQ}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{Q}{P}\frac{\partial\omega}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{P}{Q}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}\right)\right] + 2\tau = 0. \tag{9}$$

Soll nun ω nur von τ abhängen, so gilt Gleiches von P und Q, und hieraus folgt, daß nicht nur die Linienelemente dt, welche auf den σ-Curven durch zwei Nachbarcurven τ abgegrenzt werden, längs derselben τ-Curven constant sind, sondern daß auch die σ-Curven, welche gleichen Zuwachsen $d\sigma$ des Parameters entsprechen, auf einer und derselben τ-Curve lauter gleiche Abschnitte bezeichnen. Letzteres läßt sich auch so aussprechen, daß ein System σ-Curven, welches eine bestimmte τ-Curve in gleich lange Elemente ds zerlegt, auch auf allen andern τ-Curven gleiche Stücke ds_k abgrenzen muß.

Dies genügt zur vollständigen Bestimmung der Natur beider Curvensysteme.

Denn ist ϱ der Krümmungsradius an einer beliebigen Stelle einer bestimmten τ-Curve, ds ein auf ihr abgegrenztes Linienelement, und sind dt und dt_1 die Normalenelemente in seinen Endpunkten bis zur Nachbarcurve, so grenzen dieselben auf der Nachbarcurve ein Element ds_1 ab, für welches nun

$$10)\qquad ds_1/ds = (\varrho \pm dt)/\varrho$$

ist. Nach den obigen Resultaten soll nun sowohl dt als ds_1/ds längs derselben τ-Curven den gleichen Werth haben, dies ergiebt aber, daß daselbst ϱ constant sein muß. Hieraus folgt das Resultat:

Die allgemeinsten mit den gestellten Bedingungen verträglichen ebenen Bewegungen sind Strömungen in concentrischen Kreisen oder parallelen Geraden, wobei das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeit von einer Stromcurve zur andern variirt, willkürlich bleibt.

Die σ-Curven sind hiernach von einem Punkt ausgehende oder parallele Gerade. —

Noch ist in Betracht zu ziehen, daß nach (5) wie ω, so auch Ω nur von τ oder, was jetzt dasselbe ist, von ω abhängen soll; da nun für V Gleiches gilt, so muß nach (1) auch $(\Phi + p/\varepsilon)$ nur ω enthalten. Besitzt die Flüssigkeit eine freie Grenze, so wird diese von einer Stromcurve gebildet und ist in ihr p constant. Man erkennt sonach, daß auch Φ in der freien Grenze constant sein muß.

Eine Art Ausnahmestellung innerhalb der obigen allgemeinen Betrachtung nimmt der von Stokes angegebene specielle Fall ein, in welchem τ in der ganzen Flüssigkeit constant ist; dann ist auch nicht nothwendig die Geschwindigkeit längs jeder Stromcurve constant. Ein Ansatz für ω ist hier

$$11)\qquad \omega = \omega_1 + ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

wo $\varDelta\omega_1 = 0$ ist; hier ist dann

$$\varDelta\omega = 2(a+c) = -2\tau.$$

b) Combinirte Bewegungen, welche in Ebenen durch eine Axe und zwar rings um dieselbe in gleicher Weise stattfinden, lassen sich gleichfalls durch eine einzige Function ω darstellen.

Ist die Z-Axe die ausgezeichnete Richtung, und bezeichnet man mit e den normalen Abstand eines Punktes von ihr, mit s die Geschwindigkeit parallel zu e, so kann man setzen

$$12)\qquad s = +\frac{1}{e}\frac{\partial\omega}{\partial z},\quad w = -\frac{1}{e}\frac{\partial\omega}{\partial e},\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + e\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{e}\frac{\partial\omega}{\partial e}\right) + 2\tau e = 0,$$

falls wieder τ die resultirende Wirbelgeschwindigkeit bezeichnet.

Die Bewegung ist eine reine Potentialbewegung, wenn $\tau = 0$ ist, sie ist eine combinirte, wenn ω ein additives Glied enthält, welches für sich allein die letzte Gleichung (12) bei verschwindendem τ erfüllt.

$\omega =$ Const. giebt wiederum die Schaar der Stromcurven.

Die Eulerschen Gleichungen (2) nehmen hier die Form an

$$\frac{2\tau}{e}\frac{\partial\omega}{\partial e} = -\frac{\partial\Omega}{\partial e}, \quad \frac{2\tau}{e}\frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \tag{13}$$

woraus folgt, daß $\tau/e = \vartheta$ und Ω die Coordinaten e und z nur in der Verbindung ω enthalten, also längs der Stromcurven $\omega =$ Const. auch constant sein müssen. Soweit dies Resultat die Wirbelgeschwindigkeit τ betrifft, folgt es ebenfalls aus den bekannten Helmholtz'schen Sätzen über diese Größe.

Enthält ϑ nur ω, so enthält auch ω nur ϑ und man erhält, wenn man wieder abkürzt $d\omega/d\tau = \omega'$, $d^2\omega/d\tau^2 = \omega''$:

$$s = +\frac{\omega'}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}, \quad w = -\frac{\omega'}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial e}, \text{ also } V^2 = \frac{\omega'^2}{e^2}E\vartheta, \tag{14}$$

während die Hauptgleichung für ω lautet

$$\frac{\omega''}{e^2}E\vartheta + \frac{\omega'}{e^2}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} + e\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial e}\right)\right) + 2\vartheta = 0. \tag{15}$$

Soll dieselbe ω als Function von ϑ allein bestimmen, so muß sowohl der Factor von ω'', als der von ω' nur von ϑ abhängen, also längs einer Stromcurve constant sein. Ersterer unterscheidet sich daselbst nur durch eine Constante von V^2, folglich muß bei der betrachteten Bewegung wiederum die Geschwindigkeit längs jeder Stromcurve einen constanten Werth besitzen.

Die möglichen Bewegungen genauer zu erkennen, wenden wir das oben benutzte Verfahren an und transformiren die Hauptgleichung für ω auf ein orthogonales Coordinatensystem ϑ, σ. Diese Transformation läßt sich auch für diese Gleichung, welche nicht etwa mit der Formel $\Delta\omega + 2\vartheta = 0$ übereinstimmt, nach der bekannten Jacobi'schen Methode für jene Gleichung ausführen und liefert, falls analog mit (8) jetzt

$$dt = Pd\vartheta, \quad ds = Qd\sigma \tag{16}$$

gesetzt wird:

$$\frac{1}{ePQ}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Q}{eP}\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{P}{eQ}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}\right)\right] + 2\vartheta = 0. \tag{17}$$

Soll ω nur von ϑ abhängen, so muß Gleiches von ePQ und eP/Q, d. h. also von eP und Q selbst gelten.

Hieraus folgt, daß die Normalenelemente dt zwischen zwei

benachbarten τ-Curven mit e indirect proportional sein müssen — in Uebereinstimmung mit dem Inhalt der letzten Formel (3) —, und außerdem, daß ein System σ-Curven, deren Parameter sich um den constanten Betrag $d\sigma$ unterscheiden, auf einer und derselben τ-Curve gleiche Längen abgrenzen; oder anders ausgedrückt, daß ein System σ-Curven, welches auf einer τ-Curve gleiche Längen ds abschneidet, auf jeder anderen τ-Curve auch gleiche Längen ds_h abgrenzt.

Hierdurch bestimmt sich wiederum das System der τ- und σ-Curven; denn die an Formel (10) angeknüpften Folgerungen führen hier zu dem Resultat, daß längs derselben τ-Curve der Krümmungsradius ϱ mit e indirect proportional sein muß. Diese Bedingung ist dieselbe, welche die capillare Oberfläche einfacher Krümmung für eine schwere Flüssigkeit bestimmt, wenn man gegen e die Erhebung oder Senkung eines Oberflächenpunktes gegen das unendliche Niveau versteht; die bei jenem Problem möglichen Begrenzungscurven werden also in unserm Problem Stromcurven darstellen können, falls es möglich ist, mit ihnen irgend ein von $z = -\infty$ bis $z = +\infty$ reichendes oder ein im Endlichen liegendes ringförmiges Bereich zwischen zwei derartigen Curven den gestellten Bedingungen gemäß zu erfüllen; denn es soll nicht nur eine einzelne, sondern jede Stromcurve die gefundene Eigenschaft besitzen. Die einfache Betrachtung der bekannten capillaren Grenzcurven zeigt aber, daß dies nur in den beiden Fällen möglich ist, daß die Stromcurven zur Z-Axe parallele Gerade oder in unendlicher Entfernung von der Z-Axe befindliche concentrische Kreise sind; letzterer Fall gehört aber im Grunde zu dem vorigen und nicht zu diesem Problem.

Wir haben also das Resultat gewonnen:

Stationäre combinirte Bewegungen, welche in Meridianebenen und rings um die Axe gleichmäßig verlaufen, sind unter der Wirkung von Kräften, welche ein Potential haben, nur so möglich, daß die Stromcurven der Axe parallele Gerade sind.

Bezüglich des Potentiales der äußern Kräfte gilt dasselbe, was S. 68 schon erörtert ist.

Eine Ausnahme bildet hier, wie früher, der von Stokes angegebene specielle Fall, daß $\tau/e = \vartheta$ innerhalb der ganzen Flüssigkeit, also ganz von selbst auch längs der Stromcurven constant ist. Hier sind die Schlüsse von S. 69 nicht anzustellen, die Geschwindigkeit ist also auch nicht längs der Stromcurven constant.

Für ω kann man in diesem Fall z. B. setzen

$$\omega = \omega_1 + e^2 (ae^2 + bez + cz^2),$$

worin ω_1 eine beliebige Potentialbewegung darstellt.

Das speciellere Problem gestattet also eine viel allgemeinere Lösung als das allgemeine.

5. Eine aus Potential- und Wirbelbewegung combinirte, nicht stationäre Strömung innerhalb einer ruhenden ellipsoidischen Schaale.

Vollkommen durchführbare Probleme nichtstationärer Flüssigkeitsbewegungen derjenigen Art, welche ich als „combinirte“ bezeichnet habe, sind überaus selten. Die von Herrn Kirchhoff[1]) und später von den Herrn Gröbli[2]) und Greenhill[3]) behandelten Bewegungen einzelner Wirbelfäden und eines elliptischen Wirbelcylinders gehören nicht direct hierher, weil sie in einem Theil des Raumes nur Wirbel-, in dem andern nur Potentialbewegungen voraussetzen; überdies sind sie speciell ebene Probleme.

Zu den combinirten Bewegungen gehört unter anderen der Fall des gravitirenden flüssigen Ellipsoides, wie er zuerst von Dirichlet, dann von Riemann u. A. behandelt ist; aber die Schwierigkeit dieses Problemes gestattet seine Durchführung nur in einzelnen speciellen Fällen und die in diesen erhaltenen Resultate sind nicht besonders anschaulich. Ueberdies liefert es kein Beispiel zu dem methodischen Weg der Durchführung solcher Probleme, wie er z. B. von Kirchhoff[4]) auseinander gesetzt ist.

Aus diesen Ursachen dürfte das folgende einfache und elegante Problem vielleicht einiges Interesse verdienen.

Es sei eine ellipsoidische Schaale, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, mit einer incompressibeln Flüssigkeit gefüllt

1) Kirchhoff, Mechanik. Leipzig 1876 p. 257 u. f.
2) Gröbli, Specielle Probleme etc. Zürich 1877.
3) Greenhill, Quaterly Journ. of Math. 1877.
4) Kirchhoff l. c. p. 258.

und derselben eine Anfangsgeschwindigkeit derartig ertheilt, daß die Componenten u, v, w lineäre Functionen der Coordinaten sind. Nach Wahrscheinlichkeit haben, wenn äußere Kräfte entweder garnicht wirken, oder nur solche vorhanden sind, die ein Potential besitzen, dann die Componenten zu jeder Zeit die genannte Form.

Wir setzen

$$2)\qquad \begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

wo die a_{hk} die Zeit allein enthalten und nach der Incompressibilitätsbedingung

$$3)\qquad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

sein muß.

Soll diese Bewegung durch das feste Ellipsoid (1) begrenzt werden, so muß

$$4)\qquad \frac{xu}{a^2} + \frac{yv}{b^2} + \frac{zw}{c^2} = 0$$

sein, d. h. für Werthe x, y, z, welche der Formel (1) genügen,

$$a_{11}\frac{x^2}{a^2} + a_{22}\frac{y^2}{b^2} + a_{33}\frac{z^2}{c^2} = 0$$

und

$$\frac{a_{32}}{b^2} + \frac{a_{23}}{c^2} = \frac{a_{31}}{c^2} + \frac{a_{13}}{a^2} = \frac{a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}}{b^2} = 0$$

sein. Erstere Bedingung führt mit (3) auf

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0,$$

und somit wird die Bedingung (4) jetzt allerorts erfüllt und findet die Strömung durchaus längs der Ellipsoide statt, welche zu (1) ähnlich sind.

Die letzteren Formeln, mit den Definitionen der Wirbelcomponenten

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

oder

$$2\xi = a_{32} - a_{23}, \quad 2\eta = a_{13} - a_{31}, \quad 2\zeta = a_{21} - a_{12}$$

combinirt, gestatten die übrigen a_{hk} durch ξ, η, ζ auszudrücken, so daß sich findet

$$a_{23} = \frac{2c^2\xi}{b^2+c^2}, \quad a_{13} = \frac{2a^2\eta}{c^2+a^2}, \quad a_{21} = \frac{2b^2\zeta}{a^2+b^2}, \tag{5}$$

$$a_{32} = \frac{-2b^2\xi}{b^2+c^2}, \quad a_{31} = \frac{-2c^2\eta}{c^2+a^2}, \quad a_{12} = \frac{-2a^2\zeta}{a^2+b^2}.$$

Nun gelten, wenn die Flüssigkeit unter der Wirkung von Kräften steht, welche ein Potential besitzen, bekanntlich die Formeln [1])

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dieselben geben in unserm Falle, wo die ξ, η, ζ nur von der Zeit abhängen, die vollständigen Differentialgleichungen für diese Größen, welche unter Rücksicht auf die obigen Werthe (5) lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= 2\eta\zeta a^2\left(\frac{1}{c^2+a^2} - \frac{1}{a^2+b^2}\right) = \eta\zeta\frac{2a^2(b^2-c^2)}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \\ \frac{d\eta}{dt} &= 2\zeta\xi b^2\left(\frac{1}{a^2+b^2} - \frac{1}{b^2+c^2}\right) = \zeta\xi\frac{2b^2(c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= 2\xi\eta c^2\left(\frac{1}{b^2+c^2} - \frac{1}{c^2+a^2}\right) = \xi\eta\frac{2c^2(a^2-b^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Dieses System hat eine große Aehnlichkeit mit demjenigen, welches die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung äußerer Kräfte bestimmt, und gestattet auch eine ähnliche Behandlung.

Zwei Integrale erhält man, indem man die drei Gleichungen (7) resp. mit den Factoren

$$a^2\xi, \quad b^2\eta, \quad c^2\zeta$$

und

$$\frac{b^2c^2\xi}{b^2+c^2}, \quad \frac{c^2a^2\eta}{c^2+a^2}, \quad \frac{a^2b^2\zeta}{a^2+b^2}$$

zusammenfaßt, dieselben lauten

---

1) **Helmholtz**, Crelle's Journ. 55, 34, 1858; ges. Abh. I, p. 111, Leipzig 1882.

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = k_1, \tag{8}$$

$$\frac{b^2c^2\xi^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2a^2\eta^2}{c^2+a^2} + \frac{a^2b^2\zeta^2}{a^2+b^2} = k_2, \tag{9}$$

falls k_1 und k_2 Integrationsconstanten bezeichnen.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit

$$(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)/a^2b^2c^2,$$

zieht die erstere davon ab und dividirt das Resultat durch

$$(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2),$$

so resultirt

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = k_3, \tag{10}$$

wo k_3 für das rechts auftretende constante Glied gesetzt ist.

Nun lassen sich ξ, η, ζ deuten als die Coordinaten des Endpunktes eines Vectors, der in jedem Moment vom Coordinatenanfang aus parallel der Wirbelaxe in einer Länge gleich der resultirenden Wirbelgeschwindigkeit τ construirt ist; wir nennen ihn weiterhin kurz den Vector τ.

Die Gleichungen (8), (9) und (10) sagen nun aus, daß dieser Endpunkt bei der Bewegung der Flüssigkeit auf der Schnittcurve zweier dieser drei Ellipsoide, die sich hiernach sämmtlich in derselben Curve schneiden, verharren muß. Das letztere Ellipsoid ist der durch (1) gegebenen Begrenzung der Flüssigkeit ähnlich.

Bezüglich der Integrationsconstanten k_2 und k_3, welche sich durch den Anfangszustand bestimmen, läßt sich sagen, daß falls

$$a \gtrless b \gtrless c$$

ist, auch

$$(a^2+b^2) \gtrless \frac{k_3}{k_2} \gtrless (b^2+c^2) \tag{11}$$

sein muß. Die Halbaxenquadrate der Ellipsoide (9) und (10) sind resp.

$$a_2^2 = k_2\frac{(b^2+c^2)}{b^2c^2}, \quad b_2^2 = k_2\frac{(c^2+a^2)}{c^2a^2}, \quad c_2^2 = k_2\frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2},$$

$$a_3^2 = a^2k_3, \quad b_3^2 = b^2k_3, \quad c_3^2 = c^2k_3.$$

Aus der Ungleichung (11) folgt sogleich, daß die beiden Ellipsoide einander stets schneiden, denn wenn $a_3^2 < a_2^2$ ist, so folgt umgekehrt $c_3^2 > c_2^2$.

Sind die a- oder c-Axen für beide nahe gleich, so hat die Schnittcurve elliptische Gestalt und die Wirbelaxe bleibt immer in der Nähe der bezüglichen Ellipsoidaxe; sind die b-Axen nahe gleich, so hat die Schnittcurve in der Nähe derselben den Charakter einer Hyperbel, die Wirbelaxe entfernt sich also um endliche Winkel von ihr, auch wenn sie ihr zu irgend einer Zeit unendlich nahe war. Dies stimmt vollständig mit den Sätzen über die Stabilität resp. Labilität der Rotation eines starren Körpers um die Axe größten, kleinsten oder mittleren Trägheitsmomentes überein.

Die vollständige Lösung des Problemes geschieht durch elliptische Functionen. Setzt man $am(\lambda t + \mu)$ kurz gleich ψ und

$$\xi = A \cos\psi, \quad \eta = B \sin\psi, \quad \zeta = C\Delta\psi \qquad 12)$$

und bezeichnet man den Modul mit $\varkappa$, so liefern die Gleichungen (7) folgende drei Relationen zwischen fünf von den sechs willkürlichen Constanten A, B, C, $\varkappa$, λ, μ:

$$\frac{A\lambda}{BC} = \frac{2a^2(c^4 - b^4)}{N}, \quad \frac{B\lambda}{CA} = \frac{2b^2(c^4 - a^4)}{N}, \quad \varkappa^2 \frac{C\lambda}{AB} = \frac{2c^2(b^4 - a^4)}{N}, \qquad 13)$$

worin $N = (b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)$ bedeutet. Aus ihnen lassen sich drei der sechs Constanten durch die übrigen ausdrücken, diese hinwiederum bestimmen sich durch den Anfangszustand.

Wir wollen B^2, λ^2, $\varkappa^2$ durch die übrigen geben und erhalten, indem wir das Verhältniß der ersten und zweiten, sowie der ersten und dritten Formel und das Product der ersten und zweiten bilden:

$$B^2 = A^2 \frac{b^2(c^4 - a^4)}{a^2(c^4 - b^4)}, \quad \varkappa^2 = \frac{A^2}{C^2} \frac{c^2(b^4 - a^4)}{a^2(c^4 - b^4)},$$
$$\lambda^2 = \frac{4C^2 a^2 b^2}{N^2}(c^4 - a^4)(c^4 - b^4). \qquad 14)$$

Was die Bestimmung der noch verfügbaren drei Constanten A, B und μ durch den Anfangszustand anbetrifft, so liegen die Verhältnisse hier einfacher, als bei dem Problem der Rotation eines starren Körpers, weil zwischen den Geschwindigkeiten u, v, w und den Wirbelcomponenten nach (2) und (5) lineäre Beziehungen bestehen, welche, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 gegeben sind, ohne Schwierigkeiten die Anfangswerthe ξ_0, η_0, ζ_0 anzugeben gestatten, und umgekehrt.

Rechnen wir die Zeit von dem Moment an, wo $\psi = am(\lambda t + \mu)$ gleich Null ist, oder setzen wir, was dasselbe ist, $\mu = 0$, so ergeben die Ansätze (12)

$$\xi_0 = A, \quad \zeta_0 = C,$$

also A und C vollständig bestimmt. Das Vorzeichen von B bestimmt sich durch die erste Gleichung (13), wenn dasjenige von λ festgesetzt ist. Eine Umkehrung des Zeichens von λ hat Gleiches für B zur Folge, daher ist eines der beiden völlig willkürlich zu wählen. —

Sind die Wirbelcomponenten ξ, η, ζ, wie vorstehend gezeigt, durch elliptische Functionen der Zeit ausgedrückt, so folgen daraus sogleich die vollständigen Werthe der Geschwindigkeiten:

$$15)\qquad \begin{aligned} u &= 2a^2\left(\frac{\eta z}{c^2+a^2} - \frac{\zeta y}{a^2+b^2}\right), \\ v &= 2b^2\left(\frac{\zeta x}{a^2+b^2} - \frac{\xi z}{b^2+c^2}\right), \\ w &= 2c^2\left(\frac{\xi y}{b^2+c^2} - \frac{\eta x}{c^2+a^2}\right). \end{aligned}$$

Wendet man diese Ausdrücke auf die Zeit $t = 0$ an, so erhält man unter Berücksichtigung des oben Entwickelten

$$u_0 = -\frac{2a^2 Cy}{a^2+b^2}, \quad v_0 = 2b^2\left(\frac{Cx}{a^2+b^2} - \frac{Az}{b^2+c^2}\right), \quad w_0 = +\frac{2c^2 Ay}{b^2+c^2};$$

diese Formeln zeigen, wie die Constanten A und C mit den Anfangsgeschwindigkeiten zusammenhängen und geben von dem Anfangszustand selbst eine anschauliche Vorstellung. Die XZ-Ebene dreht sich z. B. im ersten Moment wie eine starre Platte um die Gerade

$$\frac{Cx}{a^2+b^2} = \frac{Az}{b^2+c^2}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = 2b^2\sqrt{\frac{A^2}{(b^2+c^2)^2} + \frac{C^2}{(b^2+a^2)^2}},$$

die Y-Axe um die Gerade

$$\frac{a^2 Cx}{a^2+b^2} = \frac{c^2 Az}{b^2+c^2}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = 2\sqrt{\frac{c^4 A^2}{(b^2+c^2)^2} + \frac{a^4 C^2}{(a^2+b^2)^2}}.$$

Die Gleichungen der Strom- oder Geschwindigkeitscurven werden erhalten, indem man in (15)

$$u = Vdx/ds, \quad v = Vdy/ds, \quad w = Vdz/ds$$

setzt und die Gleichungen (15) bei constanten t nach s integrirt; ds bezeichnet dabei das Linienelement der Curven und V die resultirende Geschwindigkeit.

Integrable Combinationen erhält man aus (15), wenn man die drei Gleichungen resp. mit den Factoren

$$\frac{x}{a^2}, \ \frac{y}{b^2}, \ \frac{z}{c^2} \ \text{und} \ \frac{b^2c^2\xi}{b^2+c^2}, \ \frac{c^2a^2\eta}{c^2+a^2}, \ \frac{a^2b^2\zeta}{a^2+b^2}$$

zusammenfaßt. Sie liefern die Integrale

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = m, \tag{16}$$

$$\frac{x\xi b^2c^2}{b^2+c^2}+\frac{y\eta c^2a^2}{c^2+a^2}+\frac{z\zeta a^2b^2}{a^2+b^2} = m_1, \tag{17}$$

worin m und m_1 die Integrationsconstanten bezeichnen. Das erste ergiebt eine Schaar zu der Begrenzungsfläche (1) ähnlicher Ellipsoide, was nach S. 72 vorauszusehen war, das zweite eine Schaar Ebenen, welche parallel sind zu der Tangentenebene, die sich an das zweite Ellipsoid (9) im Endpunkt des Vectors τ, d. h. an der Stelle wo dasselbe von der augenblicklichen Wirbelaxe geschnitten wird, construiren läßt.

Dies ergiebt den anschaulichen Satz:

Die Strom- oder Geschwindigkeitscurven sind in jedem Moment gegeben durch die elliptischen Schnittlinien der Schaar zu dem begrenzenden ähnlichen Ellipsoide mit der Schaar Ebenen, welche parallel sind der Tangentenebene an dem zweiten Hülfsellipsoid in dem Punkte, wo dasselbe von der momentanen Wirbelaxe geschnitten wird.

Aber diese Ellipsen sind keineswegs zugleich die Bahncurven der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, da ja die Bewegung nicht stationär ist.

Diese, sowie die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen in ihrer Bahn zu erhalten, muß man in (15)

$$u = dx/dt, \quad v = dy/dt, \quad w = dz/dt$$

setzen und durch Integration x, y, z als Functionen von t bestimmen;

bildet man aus diesen Beziehungen durch Elimination von t zwei von der Zeit unabhängige Gleichungen zwischen x, y, z, so geben diese die Gleichungen der Bahn.

Wiederum sind zwei Integrale sehr leicht zu bestimmen. Denn die Factoren x/a^2, y/b^2, z/c^2 geben aus (15) eine auch nach t integrable Combination und damit das Integral

$$18) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m,$$

welches nur aussagt, daß, wie jede Stromcurve in jedem Moment, so auch jedes einzelne Flüssigkeitstheilchen während seines ganzen Laufs auf einem zu dem begrenzenden ähnlichen Ellipsoid bleibt. Faßt man hingegen die Gleichungen (7) mit den Factoren x/a^2, y/b^2, z/c^2 und die Gleichungen (15) mit den Factoren ξ/a^2, η/b^2, ζ/c^2 zusammen, so erhält man eine zweite integrable Combination, welche liefert

$$19) \qquad \frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2} = n;$$

n ist dabei die Integrationsconstante.

Die Gleichung giebt unendlich viele Ebenen, welche parallel sind der Tangentialebene, die sich in dem betreffenden Zeitpunkt an dem dritten Ellipsoid (10) im Endpunkt des Vectors r ziehen läßt und sich mit diesem bewegt.

Ein gegebener Werth der Integrationsconstanten m und n bestimmt eine Reihe Flüssigkeitstheilchen, die zu irgend einer Zeit die Schnittellipse zweier bestimmter Flächen (18) und (19) erfüllen; die letzten Formeln zeigen, daß dieser Flüssigkeitsfaden zu jedem Zeitmoment die Gestalt der Schnittcurve dieser selben beiden Flächen besitzt, also mit der Ebene (19) auf dem Ellipsoid (18) herumwandert, dabei zwar immer eine elliptische Gestalt behält, aber seine Form von Moment zu Moment ändert.

Man kann mit Hülfe der bisher gefundenen Resultate sich schon eine recht deutliche Vorstellung von dem Verlauf der Bahnen auf einem der Ellipsoide (18) verschaffen. Construirt man nämlich auf demselben für gleiche und kleine Zeitintervalle alle Lagen σ_1, $\sigma_2 \dots$ der Schnittcurve desselben mit der Ebene (19), so geben diese die successiven Positionen eines und desselben Flüssigkeitsfadens. Legt man ferner durch den Mittelpunkt des Ellipsoides für jeden der gewählten Zeitpunkte die ihm entsprechende Ebene (17), so liegt ihr parallel die Geschwindigkeit, welche in dem betrachteten Moment alle Theile jenes Flüssigkeitsfadens ha-

ben. Man kann also leicht Linienelemente ds zwischen den Curven σ_1, $\sigma_2 \ldots$ construiren in der Richtung der Bewegung, welche die benachbarten Flüssigkeitstheilchen besitzen, und so einen zusammenhängenden Zug von Elementen ds gewinnen, der die Bahncurve eines Theilchens angiebt.

Unter diesen Bahnen ist eine bestimmte Schaar von besonderer Einfachheit und sogleich angebbar.

Für die Gleichungen (15) ist nämlich

$$x = q\xi, \; y = q\eta, \; z = q\zeta \tag{20}$$

ein particuläres Integral, denn durch Substitution dieser Werthe geht das System (15) in (7) über; dieser Umstand ist ein Ausdruck des bekannten Helmholtz'schen Satzes, daß die Wirbellinien immer von denselben Theilchen gebildet werden, jene Coordinaten x, y, z entsprechen nämlich Flüssigkeitstheilchen auf dem Vector r. Hieraus folgt, daß die Schnittcurve der Ellipsoide (9) und (10) und die ihr auf den ähnlichen Ellipsoiden (18) entsprechenden specielle Bahncurven sind.

Was nun endlich die Darstellung der Coordinaten x, y, z eines jeden Flüssigkeitstheilchens als Functionen der Zeit allein anbetrifft, so ist ein particuläres Integral der Gleichungen (15), nämlich das Werthsystem (20)

$$x_1 = q\xi, \; y_1 = q\eta, \; z_1 = q\zeta,$$

bereits oben benutzt worden. Wie man aus diesen die allgemeinen Ausdrücke für x, y, z ableiten kann, hat Herr Dr. Venske in einer dieser Arbeit sich anschließenden Notiz gezeigt. Die allgemeinen Resultate, die sich durch elliptische Integrale ausdrücken, sind wenig übersichtlich.

Wir wollen uns daher eingehender nur mit dem speciellen Fall beschäftigen, daß das Ellipsoid (1) ein Rotationsellipsoid um die Z-Axe, also $a = b$ ist. Hier läßt sich die vollständige Integration der Gleichungen (15) nach t ohne Schwierigkeit ausführen.

Zunächst giebt die dritte der Gleichungen (7) $d\zeta/dt = 0$, woraus wir $\zeta = \nu$ schließen, falls ν eine Constante bezeichnet, und die ersten beiden nehmen die Form an:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta, \; \frac{d\eta}{dt} = +\lambda\xi, \tag{22}$$

worin kurz $\nu\dfrac{c^2-a^2}{c^2+a^2} = \lambda$ gesetzt ist.

Hieraus folgt bei geeigneter Verfügung über den Anfangspunkt der Zeit t

$$23)\qquad \xi = \mu \cos \lambda t, \quad \eta = \mu \sin \lambda t;$$

die Wirbelaxe wandert also mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Kreiskegel von der Oeffnung ϑ, wo $\operatorname{tg}\vartheta = \nu/\mu$ ist, um die Z-Axe; die Umlaufsdauer ist

$$24)\qquad T = \pm 2\pi/\lambda = \pm 2\pi(c^2+a^2)/\nu(c^2-a^2),$$

also um so kleiner, je mehr das Ellipsoid von der Kugel abweicht.

Für die Geschwindigkeiten erhält man nach (15) die Werthe:

$$25)\qquad \begin{aligned} u &= -\nu y + \frac{\nu-\lambda}{\nu}\mu z \sin \lambda t, \\ v &= +\nu x - \frac{\nu-\lambda}{\nu}\mu z \cos \lambda t, \\ w &= \frac{\nu+\lambda}{\nu}\mu(y\cos\lambda t - x\sin\lambda t). \end{aligned}$$

Eine particuläre Lösung dieser Gleichungen für x, y, z als Functionen der Zeit ist bereits oben angegeben, nämlich

$$26)\qquad x_1 = q_1\xi = q_1\mu\cos\lambda t, \quad y_1 = q_1\eta = q_1\mu\sin\lambda t, \quad z_1 = q_1\zeta = q_1\nu.$$

Eine weitere mit zwei Constanten findet man leicht direct, indem man

$$26')\qquad z_2 = q_2\cos(\sigma t + \delta)$$

setzt; dann werden die obigen Gleichungen befriedigt durch

$$26'')\qquad \begin{aligned} x_2 &= +\frac{\mu(\nu-\lambda)}{2\nu}q_2\left[\frac{\cos((\sigma-\lambda)t+\delta)}{\nu+(\sigma-\lambda)} + \frac{\cos((\sigma+\lambda)t+\delta)}{\nu-(\sigma+\lambda)}\right], \\ y_2 &= -\frac{\mu(\nu-\lambda)}{2\nu}q_2\left[\frac{\sin((\sigma-\lambda)t+\delta)}{\nu+(\sigma-\lambda)} - \frac{\sin((\sigma+\lambda)t+\delta)}{\nu-(\sigma+\lambda)}\right], \end{aligned}$$

falls $\sigma = \sqrt{(\nu-\lambda)^2+(\nu^2-\lambda^2)\frac{\mu^2}{\nu^2}} = \frac{2a}{c^2+a^2}\sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}$ ist.

Die Wurzel kann positiv genommen werden; das negative

Zeichen würde sachlich dieselben Lösungen ergeben. Da nun die gefundenen particulären Lösungen zusammen drei willkürliche Constanten enthalten, und die Gleichungen (15) in Bezug auf x, y, z lineär sind, so geben

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad z = z_1 + z_2$$

die vollständigen Werthe der Coordinaten.

Sie lassen sich auch schreiben:

$$x = q_1\mu\cos\lambda t - \frac{q_2 a}{\mu c^2}\left[a\nu\cos(\sigma t+\delta)\cos\lambda t - \sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}\sin(\sigma t+\delta)\sin\lambda t\right],$$

$$y = q_1\mu\sin\lambda t - \frac{q_2 a}{\mu c^2}\left[a\nu\cos(\sigma t+\delta)\sin\lambda t + \sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}\sin(\sigma t+\delta)\cos\lambda t\right],$$

$$z = q_1\nu + q_2\cos(\sigma t+\delta). \tag{27}$$

Führt man ein Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 ein, welches sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit, wie die Wirbelaxe, um die Z-Axe dreht, setzt man also

$$x_1 = x\cos\lambda t + y\sin\lambda t, \quad y_1 = -x\sin\lambda t + y\cos\lambda t, \quad z_1 = z,$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1\mu - \frac{q_2\nu a^2}{\mu c^2}\cos(\sigma t+\delta), \\ y_1 &= -\frac{q_2 a}{\mu c^2}\sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}\sin(\sigma t+\delta), \\ z_1 &= q_1\nu + q_2\cos(\sigma t+\delta). \end{aligned} \tag{28}$$

Hieraus folgen für die Bahn des Flüssigkeitstheilchens die Gleichungen

$$(x_1 - q_1\mu)\frac{\mu}{a^2} + (z_1 - q_1\nu)\frac{\nu}{c^2} = 0 \tag{29}$$

und falls man

$$\frac{(x_1 - q_1\mu)\nu a^2 - (z_1 - q_1\nu)\mu c^2}{\sqrt{\nu^2 a^4 + \mu^2 c^4}} = x' \text{ setzt,}$$

$$\frac{x'^2}{a^4\nu^2 + c^4\mu^2} + \frac{y_1^2}{a^2(a^2\nu^2 + c^2\mu^2)} = \frac{q_2^2}{\mu^2 c^4}. \tag{30}$$

Diese Formeln, deren erste sachlich mit (19) übereinstimmt,

geben folgende Resultate, von denen ein Theil im allgemeinen Fall eines dreiaxigen Ellipsoides schon oben abgeleitet ist.

Die einzelnen Flüssigkeitstheilchen bewegen sich in Ellipsen, welche senkrecht zu einer Meridianebene durch die Z-Axe stehen, die ihrerseits mit derselben Winkelgeschwindigkeit λ, wie die Wirbelaxe, um die Z-Axe rotirt. Die Ebene dieser Bahnellipse ist die Tangentenebene an dem Ellipsoid (10) im Endpunkt der Wirbelaxe τ und demgemäß um einen constanten Winkel Θ gegen die Z-Axe geneigt, der sich bestimmt aus

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\nu a^2}{\mu c^2},$$

also für alle Theilchen den gleichen Werth hat; sie befindet sich vom Centrum des die Flüssigkeit begrenzenden Ellipsoides in dem Abstand

$$d = q_1 \frac{a^2\nu^2 + c^2\mu^2}{\sqrt{a^4\nu^2 + c^4\mu^2}},$$

der allein von der ersten Integrationsconstante q_1 abhängt.

Die Halbaxenquadrate A^2 und B^2 der Ellipse sind

$$A^2 = \frac{q_2^2(a^4\nu^2 + c^4\mu^2)}{\mu^2 c^4}, \quad B^2 = \frac{q_2^2 a^2(a^2\nu^2 + c^2\mu^2)}{\mu^2 c^4},$$

sie enthalten also nur die zweite Constante q_2; erstere Axe liegt in der Meridianebene, letztere normal dazu; ihr Verhältniß ist für alle Theilchen von gleicher Größe.

Diese rotirende Bahnellipse wird umlaufen in der Zeit

$$T' = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{\pi(a^2+c^2)}{a\sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}},$$

welche für alle Theilchen die gleiche Größe hat, aber von der Umlaufsdauer der Wirbelaxe verschieden ist. Die Bahnen der Flüssigkeitstheilchen sind also keine geschlossenen Curven. —

Für den Druck p, welcher innerhalb der bewegten Flüssigkeit stattfindet, ergeben die Euler'schen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial\left(\Phi+\frac{p}{\varepsilon}\right)}{\partial x}$$

u. s. f., falls wir das Potential Φ, welches sich von p/ε nicht sondert, der Einfachheit halber gleich Null setzen, unter Benutzung der Werthe (5) und der Differentialgleichungen (7), die Beziehungen

$$4a^2b^2c^2\left[x\left(\frac{\zeta^2}{c^2(a^2+b^2)^2}+\frac{\eta^2}{b^2(c^2+a^2)^2}\right)-\frac{2\xi(\eta y+\zeta z)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\right]=+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} \quad 31)$$

u. s. f. Aus ihnen folgt durch Integration:

$$p=C+4a^2b^2c^2\varepsilon\left\{\frac{x^2}{2}\left(\frac{\zeta^2}{c^2(a^2+b^2)^2}+\frac{\eta^2}{b^2(c^2+a^2)^2}\right)+\frac{y^2}{2}\left(\frac{\xi^2}{a^2(b^2+c^2)^2}+\frac{\zeta^2}{c^2(a^2+b^2)^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{2}\left(\frac{\eta^2}{b^2(c^2+a^2)^2}+\frac{\xi^2}{a^2(b^2+c^2)^2}\right)-\frac{2(\eta\zeta yz+\zeta\xi zx+\xi\eta xy)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\right\}. \quad 32)$$

Um hieraus die Kraftcomponenten und Drehungsmomente zu berechnen, welche die Schaale erfährt, beachte man, daß

$$X=\int p\cos(n_a,x)\,do,\quad L=\int p(y\cos(n_a,z)-z\cos(n_a,y))\,do$$

ist, und ähnlich die anderen.

Hieraus ist zu gewinnen

$$X=\int\frac{\partial p}{\partial x}dk,\quad L=\int\left(y\frac{\partial p}{\partial z}-z\frac{\partial p}{\partial y}\right)dk,$$

wo dk das Raumelement der Flüssigkeit bezeichnet. Da nun für das Ellipsoid (1)

$$\int x^2dk=\frac{4\pi}{15}a^3bc,\quad \int y^2dk=\frac{4\pi}{15}ab^3c,\quad \int z^2dk=\frac{4\pi}{15}abc^3$$

ist, so resultirt sogleich:

$$X=Y=Z=0,$$

$$L=P\eta\zeta(c^2-b^2),\quad M=P\zeta\xi(a^2-c^2),\quad N=P\xi\eta(b^2-a^2), \quad 33)$$

worin

$$\frac{32\pi a^3b^3c^3\varepsilon}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}=P$$

gesetzt ist.

Die ellipsoidische Schaale erfährt also seitens der bewegten Flüssigkeit ein Drehungsmoment um eine Axe, deren Richtungscosinus α, β, γ gegeben sind durch

$$34)\qquad \alpha:\beta:\gamma = \eta\zeta(c^2-b^2):\zeta\xi(a^2-c^2):\xi\eta(b^2-a^2),$$

von einer Größe

$$35)\qquad D = P\tau d \sin(\tau, d);$$

hierin ist τ die momentane Wirbelgeschwindigkeit, d die Länge des Lothes vom Centrum der Schaale auf die Tangentenebene, welche am ersten Ellipsoid (8) im Endpunkt der augenblicklichen Wirbelaxe construirt werden kann, (τ, d) der Winkel zwischen diesem Loth und der Wirbelaxe. Auch die Axe, um welche das resultirende Moment wirkt, hat eine Beziehung zu diesem Ellipsoid. Da nämlich nach (34) gilt

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0 \text{ und}$$

$$36)\qquad \alpha a^2\xi + \beta b^2\eta + \gamma c^2\zeta = 0,$$

so steht die Axe des resultirenden Momentes stets normal zur Ebene durch die momentane Wirbelaxe τ und das Loth d.

Es haben also alle drei Ellipsoide (8), (9), (10) bei diesem Problem eine gewisse geometrische Bedeutung.

Ihre gemeinsame Schnittcurve giebt den Verlauf der resultirenden Wirbelgeschwindigkeit mit der Zeit an, das Ellipsoid (9) kommt bei der Bestimmung der Strömungs- oder Geschwindigkeitscurven, (10) bei der Bestimmung der Bahnen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, endlich (8) bei der Bestimmung der Einwirkung in Betracht, welche die ellipsoidische Schaale seitens der Flüssigkeit erfährt.

Göttingen, Anfang März 1891.

Zusatz.

Integration eines speciellen Systems linearer, homogener Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Functionen als Coefficienten.

Von

O. Venske.

Bei einer Untersuchung über nicht stationäre Wirbelbewegungen einer idealen Flüssigkeit wurde Herr Prof. W. Voigt auf das folgende System simultaner Differentialgleichungen geführt:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2a^2\left(\frac{\eta z}{a^2+c^2}-\frac{y\zeta}{a^2+b^2}\right),\\ \frac{dy}{dt} &= 2b^2\left(\frac{\zeta x}{b^2+a^2}-\frac{z\xi}{b^2+c^2}\right),\\ \frac{dz}{dt} &= 2c^2\left(\frac{\xi y}{c^2+b^2}-\frac{x\eta}{c^2+a^2}\right).\end{aligned} \tag{A}$$

In demselben bedeuten a, b, c Constanten, und ξ, η, ζ elliptische Functionen von t, welche den folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{2a^2(b^2-c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\eta\zeta,\\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{2b^2(c^2-a^2)}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}\zeta\xi,\\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{2c^2(a^2-b^2)}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\xi\eta.\end{aligned} \tag{B}$$

Von Herrn Prof. W. Voigt aufgefordert habe ich mich mit der Integration des Systems (A) beschäftigt. Die Resultate, zu denen ich gelangte, teile ich im Folgenden mit.

Da das System (A) in das System (B) übergeht, wenn man ξ, η, ζ anstatt x, y, z setzt, ist

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

ein particuläres Integral des Systems (A).

Ich werde nun zeigen, wie man aus einem particulären Integrale unendlich viele andere von demselben und von einander linear unabhängige particuläre Integrale gewinnen kann.

x_1, y_1, z_1 sei ein particuläres Integral des Systems (A), welches für einen bestimmten Wert t_0 der unabhängig Variablen t der Gleichung genügt

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2} = 1. \tag{a}$$

Es existieren jedenfalls unendlich viele Systeme particulärer Integrale x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3 von der Art, daß für denselben Wert t_0 von t die Gleichungen bestehen

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2} = 1, \tag{b}$$

$$\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2} = 1, \tag{c}$$

$$\frac{x_1 x_2}{a^2}+\frac{y_1 y_2}{b^2}+\frac{z_1 z_2}{c^2} = 0, \tag{d}$$

$$\frac{x_2 x_3}{a^2}+\frac{y_2 y_3}{b^2}+\frac{z_2 z_3}{c^2} = 0, \tag{e}$$

$$\frac{x_3 x_1}{a^2}+\frac{y_3 y_1}{b^2}+\frac{z_3 z_1}{c^2} = 0. \tag{f}$$

Die linken Seiten der Gleichungen (a), $\cdots$, (f) sind aber Constanten, wie ich sogleich beweisen werde.

Der Voraussetzung nach bestehen die Relationen

$$\frac{dx_i}{dt} = 2a^2\left(\frac{\eta z_i}{a^2+c^2}-\frac{y_i\zeta}{a^2+b^2}\right),$$

$$\frac{dy_i}{dt} = 2b^2\left(\frac{\zeta x_i}{b^2+a^2}-\frac{z_i\xi}{b^2+c^2}\right),$$

$$\frac{dz_i}{dt} = 2c^2\left(\frac{\xi y_i}{c^2+b^2}-\frac{x_i\eta}{c^2+a^2}\right),$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Multipliciert man dieselben der Reihe nach mit

$$\frac{x_k}{a^2},\ \frac{y_k}{b^2},\ \frac{z_k}{c^2} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

und addirt dann, so erhält man

$$\frac{x_k}{a^2}\frac{dx_i}{dt}+\frac{y_k}{b^2}\frac{dy_i}{dt}+\frac{z_k}{c^2}\frac{dz_i}{dt} = -\frac{x_i}{a^2}\frac{dx_k}{dt}-\frac{y_i}{b^2}\frac{dy_k}{dt}-\frac{z_i}{c^2}\frac{dz_k}{dt}$$

und hieraus

$$d\left(\frac{x_i x_k}{a^2}+\frac{y_i y_k}{b^2}+\frac{z_i z_k}{c^2}\right) = 0.$$

Die aufgestellte Behauptung ist also erwiesen, und damit ist dargethan, daß $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ x_3, y_3, z_3$ für jeden Wert des Argumentes t den Gleichungen $(\mathfrak{a}), \cdots, (\mathfrak{f})$ genügen.

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn ε eine zweite Einheitswurzel bedeutet,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\varepsilon a}{bc}(y_2 z_3 - y_3 z_2), \\ x_2 &= \frac{\varepsilon a}{bc}(y_3 z_1 - y_1 z_3), \\ x_3 &= \frac{\varepsilon a}{bc}(y_1 z_2 - y_2 z_1), \end{aligned} \tag{$\mathfrak{g}$}$$

$$|x_i,\ y_i,\ z_i| = \varepsilon \cdot abc. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{$\mathfrak{h}$}$$

Multipliciert man die Gleichungen $(\mathfrak{g})$ der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, addiert sie und benutzt die Gleichung $(\mathfrak{h})$, so erhält man

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2. \tag{$\mathfrak{i}$}$$

Eine Relation, welche von den bisher zwischen $x_1, \cdots, z_3$ aufgestellten Relationen unabhängig ist, ergiebt sich durch geeignete Umformung des Ausdruckes

$$dl(x_2 + i x_3) = \frac{x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + i(x_2 dx_3 - x_3 dx_2)}{x_2^2 + x_3^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung geht bei Benutzung von $(\mathfrak{i})$ und der Beziehungen

$$\frac{dx_2}{dt} = 2a^2\left(\frac{\eta z_2}{a^2+c^2} - \frac{\zeta y_2}{a^2+b^2}\right), \quad \frac{dx_3}{dt} = 2a^2\left(\frac{\eta z_3}{a^2+c^2} - \frac{\zeta y_3}{a^2+b^2}\right),$$

$$y_1 = \frac{\varepsilon b}{ac}(z_2 x_3 - z_3 x_2), \quad z_1 = \frac{\varepsilon c}{ab}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

über in

$$\frac{1}{a^2 - x_1^2}\left(-x_1 \frac{dx_1}{dt} - 2i\varepsilon a^2 bc\left(\frac{\eta y_1}{b^2(a^2+c^2)} + \frac{\zeta z_1}{c^2(a^2+b^2)}\right)\right) dt.$$

Also hat man

$$(\mathfrak{k})\quad x_2 + i x_3 = e^{\int\left(-x_1 \frac{dx_1}{dt} - 2isa^2bc\left(\frac{\eta y_1}{b^2(c^2+a^2)} + \frac{\zeta z_1}{c^2(a^2+b^2)}\right)\right)\frac{dt}{a^2-x_1^2}}.$$

Durch die sechs Gleichungen (b), ⋯, (f), (k) ist man in den Stand gesetzt, aus einem particulären Integrale zwei weitere von demselben und von einander linear unabhängige Integrale des Systems (A) herzuleiten. Da ich nun oben ein particuläres Integral dieses Systems angegeben habe, bietet das Vorhergehende die vollständigen Mittel zur Berechnung des allgemeinen Integrales desselben dar.

Göttingen, März 1891.

Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

Vorgelegt von F. Klein.

Unter einer „Raumcurve" sei der Ort von Punkten verstanden, deren rechtwinklige Coordinaten x, y, z als analytische Functionen eines Parameters gegeben seien.

Handelt es sich nur um die Umgebung[1]) einer irgendwie singulären Stelle der Curve, so läßt sich die letztere ersetzen durch eine rationale Raumcurve, die daselbst die nämliche Singularität besitzt und deren Ordnung zudem so niedrig angenommen werden darf, als es überhaupt die fragliche Singularität gestattet.

Die gemeinte Ersetzung ist auch dann noch erlaubt, wenn man sich die Coefficienten der ursprünglichen Functionen solchen Variationen unterworfen denkt, daß die Curve in benachbarte Curven übergeht, für welche sich die erwähnte Singularität in einfachere „aufgelöst" hat. Man hat dann nur die entsprechenden Variationen an den Coefficienten der rationalen Hülfscurve anzubringen.

Im Folgenden werden nur derartige benachbarte oder „penultimate" Zustände gewisser Singularitäten in Betracht kommen, welche dadurch entstehen mögen, daß zwei einfachere Singularitä-

---

1) Vgl. die nähere Ausführung ähnlicher Ueberlegungen für ebene Curven bei Brill „Ueber Singularitäten ebener Curven und eine neue Curvenspecies" Math. Annalen Bd. XVI § 2.

ten gleicher Art zusammenrücken; insbesondere soll festgestellt werden, wieweit die Realität resp. Nichtrealität coincidirender singulärer Curvenelemente beim Passiren des bez. Vorkommnisses bestehen bleibt, oder aber aufgehoben wird.

Um einen abgegrenzten Bezirk solcher Erscheinungen zu umfassen, verstehen wir unter „gewöhnlichen Singularitäten“ einer „Raumcurve“ C solche, die stets in endlicher Anzahl vorhanden sind und der Forderung entspringen, daß von den Schnittpunkten einer Ebene resp. Geraden mit C eine genügende Anzahl von Malen mehrere consecutiv werden.

Bezeichnet man getrennte Schnittpunkte mit verschiedenen griechischen (kleinen) Buchstaben, die Anzahl an einer Stelle α zusammengerückter durch einen Exponenten, endlich die auf eine Gerade sich beziehenden Punktgruppen mittelst einer Klammer, so hat man genau fünf derartiger Vorkommnisse zu verzeichnen, nemlich Ebenen α^4, $\alpha^3\beta^2$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ und Gerade $(\alpha^2\beta)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

Indem wir uns auf solche „Verdichtungen“ beschränken, für deren Zustandekommen das Erfülltsein einer einzigen Bedingung zwischen den Coefficienten der Curve hinreicht, haben wir die Coincidenzen zwischen zwei gleichberechtigten Elementen α entweder einer und derselben, oder aber zweier verschiedener Singularitäten des nämlichen Typus in's Auge zu fassen.

Dabei kommen uns die Zerlegungen zu Statten, die unlängst [1] für die Discriminanten (und Resultanten) der zu rationalen Raumcurven R_n^3 gehörigen Singularitätenformen $[\alpha^4]$, $[\alpha^3\beta^2]$, $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$, $[(\alpha^2\beta)]$, $[\alpha\beta\gamma\delta]$ mitgetheilt sind, im Verein mit den Betrachtungen, die damals über die Gestalt der Anfangsglieder jener fünf Formen gemacht wurden.

Die Discriminanten zerfielen in Elementarfactoren, welche bezüglich der vierreihigen Coefficientendeterminanten „δ“ irreducibel waren. Solcher Elementarfactoren gab es 14, nemlich:

$$[\alpha^5],\ [(\alpha^3)],\ [\alpha^3\beta^2,(\alpha^2\beta)],\ [\alpha^4\beta^2],\ [\alpha^3\beta^2\gamma^2],\ [(\alpha^2\beta\gamma)],\ [((\alpha\beta))];\ [\alpha^3\beta^3],$$
$$[\alpha^3\beta^2\gamma^2,(\alpha\beta\gamma)],\ [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2],\ [\alpha^2\beta^2\gamma^2,\alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2],\ [(\alpha\beta\gamma\delta)^2],\ [(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)],$$
$$[(\alpha\beta\gamma\delta),(\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)],$$

von denen die ersten sieben zugleich als Theiler von Resultanten auftraten.

Jede dieser 14 Invarianten haben wir vermöge geeigneter Variationen der Coefficienten durch Null hindurchgehen zu lassen,

---

1) Vgl. diese Nachrichten 1890 Nr. 15 und 1891 Nr. 1, in letzterer Note insbesondere die Tabelle B.

und uns dann im Einzelnen über die Realität der ein- und austretenden Elemente Rechenschaft zu geben.

Einen derartigen „Durchgang“ bewerkstelligt man am Einfachsten so, daß man die Größen δ durch lineare Combinationen $\delta + \varkappa\delta'$ ersetzt, wo $\varkappa$ ein neuer variabler Parameter sei. Verschwindet nun irgend eine unserer Invarianten etwa für $\varkappa = \varkappa_1$, so ist das Verhalten der Curve für Werthe von $\varkappa$ zu prüfen, welche $\varkappa_1$ zu beiden Seiten benachbart sind.

Vollzieht man jetzt die gleiche Substitution $\delta + \varkappa\delta'$ an Stelle von δ in den fünf Singularitätenformen selbst, so werden dieselben zu ganzen, rationalen (und reducibeln) Functionen zweier Variabeln α und $\varkappa$. Als solche seien sie bezeichnet durch:

$$[\alpha^4] = S_1(\alpha, \varkappa) = S_1, \quad [\alpha^3\beta^2] = S_2, \quad [(\alpha^2\beta)] = S_3, \quad [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = S_4,$$
$$[(\alpha\beta\gamma\delta)] = S_5.$$

Deutet man nunmehr α und $\varkappa$ als Cartesische Coordinaten in einer Hülfsebene, so gelangt man zu einer sehr nützlichen Abbildung der Discriminantenzerlegungen, die einen Theil der zu erforschenden Verhältnisse ohne Weiteres übersehen läßt.

Die Gleichungen $S = 0$ stellen nämlich in der $[\alpha, \varkappa]$-Ebene algebraische Curven dar, deren zur α-Axe parallele (eigentliche und uneigentliche) Tangenten vollständig durch Nullsetzen der (bez. α gebildeten) Discriminanten D der Formen S geliefert werden.

Greift man daher jedesmal eine reelle Wurzel $\varkappa_1$ einer der 14 Gleichungen heraus, welche durch das Verschwinden der oben zusammengestellten Elementarfactoren entstehen, so finden die Zerlegungen der fünf Discriminanten D (cf. Tabelle B l. c.) folgenden Ausdruck:

1. $[\alpha^5]$; die Curven S_1 und S_2 berühren sich einfach (und die gemeinsame Tangente ist $\varkappa = \varkappa_1$).

2. $[(\alpha^3)]$; S_1 und S_3 berühren sich in gleicher Weise einfach, während S_2 daselbst einen gewöhnlichen $2(n-4)$-fachen Punkt besitzt.

3. $[\alpha^2\beta^2, (\alpha^2\beta)]$; S_2 und S_3 berühren sich einfach.

4. $[\alpha^4\beta^2]$; S_2 und S_4 haben eine einfache Berührung, während S_1 unter endlicher Neigung gegen S_2 und S_4 den Berührungspunkt einfach passirt.

5. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$; im Punkte $(\alpha, \varkappa_1)$ wird die Gerade $\varkappa = \varkappa_1$ von S_4 einfach berührt, während S_2 daselbst einen gewöhnlichen[1]) Dop-

1) Die Tangenten der hier vorkommenden vielfachen Punkte sind stets gegen die betr. Gerade $\varkappa = \varkappa_1$ unter endlichem (auch von einem Rechten verschiedenen)

pelpunkt aufweist. Hingegen sind die beiden Stellen $(\beta, \varkappa_1)$ und $\gamma, \varkappa_1)$ gewöhnliche Rückkehrpunkte für S_4, deren Tangenten nicht die α-Richtung haben.

6. $[((\alpha\beta))]$; die Gerade $\varkappa = \varkappa_1$ ist Doppeltangente von S_3. In den Berührungspunkten $(\alpha, \varkappa_1)$ und $(\beta, \varkappa_1)$ hat S_5 je einen gewöhnlichen $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$-fachen Punkt.

7. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$; $(\alpha, \varkappa_1)$ verhält sich ganz wie bei (5), nur daß an die Stelle von S_4, S_2 beziehungsweise jetzt S_5, S_3 treten.

Für die zweite Reihe der noch übrigen 7 Elementarfactoren ist immer nur jeweils eine einzige Curve S in Betracht zu ziehen. Es kommt:

8. $[\alpha^3\beta^3]$; $\varkappa = \varkappa_1$ verbindet zwei einfache Rückkehrpunkte von S_3, deren Tangente gegen jene Gerade geneigt sind.

9. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$; $(\alpha, \varkappa_1)$, $(\beta, \varkappa_1)$, $(\gamma, \varkappa_1)$ sind drei einfache Berührstellen für S_4.

10. $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$; in gleicher Weise zeigt S_5 vier einfache Berührungen.

11. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$; auf derselben Geraden $\varkappa = \varkappa_1$ existiren vier gewöhnliche dreifache Punkte von S_4.

12. $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$; desgleichen besitzt S_5 fünf gewöhnliche vierfache Punkte.

13. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$; $(\alpha, \varkappa_1)$ ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt von S_4.

14. $(\alpha\beta\gamma\delta)$, $(\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$; $(\alpha, \varkappa_1)$ ist ein ebensolcher von S_5.

Was nun die mehrmaligen Berührungen (Verzweigungen) ein- und derselben Curve S angeht, so ist unschwer abzuleiten, daß dieselben (soweit sie überhaupt reell ausfallen), mit Ausnahme der Fälle (6) und (8), stets auf der nämlichen Seite der bez. Tangenten $\varkappa = \varkappa_1$ stattfinden. Dies gilt also für die Berührung nebst den beiden Spitzen von S_4 bei (5), sowie für die bei (9), (10) eintretenden drei, resp. vier Berührungen.

Schwieriger ist indessen die Beantwortung der wichtigen Frage, wie sich einmal in den eben ausgeschlossenen Fällen (6), (8) die einzelne Curve S_3 resp. S_3, andererseits bei (1), (2), (3), (4) zwei verschiedene Curven S hinsichtlich ihrer Berührung verhalten, ob nemlich die letztere auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente erfolgt, oder aber auf derselben Seite, oder endlich, ob bald das Eine, bald das Andere möglich ist.

Winkel geneigt, und mit Ausnahme der einfachen Spitzen alle verschieden von einander. Die Modificationen, welche eintreten, wenn ein resp. zwei Paare der singulären Argumente $\alpha, \beta, \ldots$ imaginär werden, lassen sich leicht angeben.

Es läßt sich nun darthun, daß wirklich alle drei Möglichkeiten vertreten sind. Bei $[\alpha^5]$ berühren sich S_1 und S_2 auf derselben Seite, desgleichen S_2 und S_4 bei $[\alpha^4\beta^2]$; bei $[(\alpha^3)]$ findet die Berührung von S_1 und S_3 stets auf verschiedenen Seiten statt; dagegen dürfen sich im Falle $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ S_2 und S_3 jenachdem auf derselben oder auch auf verschiedenen Seiten berühren, und das Entsprechende gilt für die beiden Berührungspunkte resp. Spitzen von S_3 resp. S_2 auf der bezüglichen Geraden $x = x_1$ in den Fällen $[((\alpha\beta))]$, $[\alpha^3\beta^3]$.

Um darauf näher einzugehen, legen wir, wie es erlaubt ist, jeweils eiae rationale Raumcurve R^3_n von möglichst niedriger Ordnung n zu Grunde.

Für $n = 4$ sind $[(\alpha^3)]$ und $[((\alpha\beta))]$ zu untersuchen.

Von Singularitäten existiren hier nur α^4 und $(\alpha^2\beta)$ Sei die Form $[\alpha^4]$ als eine allgemeine binäre biquadratische Form

$$\varphi = \varphi_\alpha^4 = \varphi_0 + 4\varphi_1\alpha + 6\varphi_2\alpha^2 + 4\varphi_3\alpha^3 + \varphi_4\alpha^4$$

gegeben, so wird $[(\alpha^2\beta)]$ zur Hesse'schen Covariante H von φ, $[(\alpha^3)]$ zur Discriminante $D(\varphi)$ von φ, endlich $[((\alpha\beta))]$ zur Invariante j von φ.

In Uebereinstimmung mit der Zerlegungsformel für $[(\alpha^2\beta)]$ hat man, wie bekannt, für die Discriminante $D(H)$ von H:

$$D(H) = j^2 D(\varphi).$$

Bei nicht verschwindendem j bedingt also die Gleichheit zweier Wurzeln von φ das Nämliche für H u. umg.

Legt man der im Moment des Verschwindens von $D(\varphi)$ entstehenden gemeinsamen Doppelwurzel von φ und H den Werth Null bei, so wird ein penultimater Zustand durch

$$\varphi_0 = \varepsilon\varphi_0', \; \varphi_1 = \varepsilon\varphi_1'$$

bezeichnet, wo die φ' mit der beliebig kleinen Größe ε nicht zugleich verschwinden.

Dann sind, in erlaubter Annäherung, die beiden, in die Stelle Null hineinrückenden Wurzelpaare von φ und H bestimmt durch die quadratischen Gleichungen:

$$\varphi_0 + 4\varphi_1\alpha + 6\varphi_2\alpha^2 = 0,$$
$$(\varphi_0\varphi_2 - \varphi_1^2) + 2\alpha(\varphi_0\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2) + \alpha^2(\varphi_0\varphi_4 + 2\varphi_1\varphi_3 - 3\varphi_2^2) = 0.$$

Die Discriminanten derselben nehmen, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von ε, die Formen an:

$$D_2(\varphi) = 6\varepsilon\varphi_0'\varphi_2, \quad D_2(H) = -3\varepsilon\varphi_0'\varphi_2\cdot\varphi_2^2,$$

sind also, falls ε klein genug (positiv oder negativ) gewählt ist, stets von entgegengesetztem Vorzeichen.

Geht demnach das eine der beiden Wurzelpaare vom Reellen durch Null in's Imaginäre über, so befolgt das andere die umgekehrte Richtung.

Wir kommen zum zweiten Falle für $n = 4$, in dem man j die Null passiren läßt (während $D(\varphi)$ jetzt als endlich vorausgesetzt wird). Da die Coefficienten φ_1 und φ_3 jederzeit als verschwindend angesehen werden dürfen, so braucht man nur

$$\varphi_2 = \varepsilon\varphi_2'$$

anzusetzen, um Zustände kurz vor resp. nach Eintreten des reellen Doppelpunktes $((0, \infty))$ anzugeben.

Die Form $[(\alpha^2\beta)] = H(\varphi)$ vereinfacht sich für $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$ zu:

$$[(\alpha^2\beta)] = \varphi_2\varphi_4\alpha^4 + (\varphi_0\varphi_4 - 3\varphi_2^2)\,\alpha^2 + \varphi_0\varphi_2.$$

Die vier Wurzeln der Gleichung $[(\alpha^2\beta)] = 0$ sind dann:

$$\pm\sqrt{\frac{(3\varphi_2^2 - \varphi_0\varphi_4) \pm \sqrt{(\varphi_0\varphi_4)^2 - \varphi_2^2(10\,\varphi_0\varphi_4 - 9\varphi_2^2)}}{2\varphi_2\varphi_4}}\,,$$

somit, wenn man die innere Quadratwurzel nach dem binomischen Satze entwickelt und höhere Potenzen von ε unterdrückt,

$$\pm\sqrt{\frac{-\varphi_2}{\varphi_4}} = \pm\sqrt{\frac{-\varepsilon\varphi_2'}{\varphi_4}}; \quad \pm\sqrt{\frac{-\varphi_0}{\varphi_2}} = \pm\sqrt{\frac{-\varphi_0}{\varepsilon\varphi_2'}}.$$

Diese Wurzeln von $[(\alpha^2\beta)] = 0$ bieten bei einem Durchgange von ε durch Null eine Alternative von zwei Möglichkeiten; je nachdem nämlich φ_0 und φ_4 von entgegengesetztem oder von gleichem Vorzeichen sind, gehen beide Wurzelpaare gleichzeitig vom Reellen in's Imaginäre über (resp. vice versa), oder aber die beiden Paare zeigen entgegengesetzte Bewegung.

Bezüglich eines Doppelpunktes mit (conjugirt) imaginären Argumenten braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß dann die vier coincidirenden Trefftangenten $(\alpha^2\beta)$ vor- wie nachher imaginär sind.

Im Wesentlichen ebenso, wie $[((\alpha\beta))]$, muß sich $[\alpha^2\beta^2]$ (als das dualistische Vorkommniß) verhalten.

Wir gehen daher gleich über zum Studium von $[\alpha^5]$ und $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ auf Curven R_6^3.

Die zugehörige Fundamentalinvolution wird durch das Büschel von zwei Formen φ_α^5, ψ_α^5 dargestellt. Die Singularitätenform $[\alpha^4]$,

als Functionaldeterminante von φ und ψ, beginnt mit den Gliedern:

$$[\alpha^4] = \pi_{01} + 4\alpha\pi_{02} + 2\alpha^2(3\pi_{03} + 5\pi_{12}) + \cdots$$

wo zur Abkürzung steht:

$$\begin{vmatrix} \varphi_i & \psi_i \\ \varphi_k & \psi_k \end{vmatrix} = \pi_{ik}.$$

Andererseits ergiebt sich die Singularitätenform $[\alpha^3\beta^2]$ durch Elimination von β aus $\varphi_{\alpha^3\beta^2} = 0$, $\psi_{\alpha^3\beta^2} = 0$; die Anfangsglieder sind:

$$[\alpha^3\beta^2] = (4\pi_{01}\pi_{12} - \pi_{02}^2) + 4\alpha\{2\pi_{01}\pi_{13} + \pi_{02}(\pi_{12} - \pi_{03})\}$$
$$+ 2\alpha^2\{8\pi_{02}\pi_{13} + 2\pi_{12}(\pi_{03} + 3\pi_{12}) + 2\pi_{01}(\pi_{14} + 3\pi_{23}) - \pi_{02}(\pi_{04} + 4\pi_{13}) - 2(\pi_{03} + \pi_{12})^2\} + \cdots$$

Das Criterium für Eintreten der Coincidenz $[\alpha^5]$ ist ausgedrückt durch das Verschwinden der Resultante von φ und ψ, also im canonischen Falle $\alpha = 0$ durch das Verschwinden aller

$$\pi_{0k} (k = 1, 2, \ldots 5).$$

Demgemäß machen wir wiederum die π_{0k} mit einer beliebig kleinen Größe ε proportional:

$$\pi_{0k} = \varepsilon\pi'_{0k},$$

und vergleichen die Discriminanten der Formen $[\alpha^4]$ und $[\alpha^3\beta^2]$.

In erster Annäherung kommt:

$$D_\varepsilon[\alpha^4] = 10\varepsilon.\pi'_{01}\pi_{12}, \quad D_\varepsilon[\alpha^3\beta^2] = 4.8.\varepsilon\pi'_{01}\pi_{12}.\pi_{12}^2,$$

beide Discriminanten haben also in der Nähe von $\varepsilon = 0$ dasselbe Vorzeichen.

Es kommt die Coincidenz $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ an die Reihe. Da die Ermittelung der Anfangsglieder der Form $[\alpha^2\beta]$ mit Weitläuftigkeiten verbunden ist, gehen wir indirect vor, indem wir für die Argumente α, β der Trefftangente $(\alpha^2\beta)$ von vornherein die canonischen Werthe $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ festsetzen, und nun eine (und damit zugleich eine zweite) Schmiegungsberührebene $\alpha^3\beta^2$ allmählich in die Lage $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ hineinrücken lassen.

Die Tangente der R_5^3 an der Stelle 0 trifft die Curve an der Stelle ∞ unter den Bedingungen:

$$\pi_{12} = 0, \quad \pi_{13} = 0, \quad \pi_{23} = 0,$$

wodurch sich die Entwickelung der Form $[\alpha^3\beta^2]$ zur folgenden vereinfacht:

$$[\alpha^3\beta^3] = -\pi_{02}^2 - 4\alpha\pi_{02}\pi_{03} + 2\alpha^2(2\pi_{01}\pi_{14} - 2\pi_{03}^2 - \pi_{02}\pi_{04}) + \cdots$$

Soll jetzt das Vorkommniß $[\alpha^3\beta, (\alpha^3\beta)]$ für $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ eintreten, so haben außerdem noch alle übrigen π_{2k} $(\varkappa = 0, 4, 5)$ zu verschwinden.

Der bezügliche penultimate Zustand der Curve läßt sich wieder characterisiren durch

$$\pi_{2k} = \varepsilon\pi'_{2k}\ (\varkappa = 0, 4, 5).$$

Entwickelt man nunmehr die Discriminante von $[\alpha^3\beta^3]$ nach aufsteigenden Potenzen von ε, so lautet das erste Glied:

$$D_\varepsilon[\alpha^3\beta^3] = \varepsilon^2 \,.\, \pi_{02}'^2 \,.\, 4\pi_{01}\,\pi_{14}.$$

Da aber hier das Product $\pi_{01}\pi_{14}$ ebensowohl positiver, wie negativer Werthe fähig ist, so hat die Realität (resp. Imaginarität) eines der beiden coincidirenden Paare $\alpha^3\beta^3$, $(\alpha^3\beta)$ durchaus keinen Einfluß auf die Realität des anderen Paares.

Es erübrigt noch die Besprechung der Erscheinung $[\alpha^4\beta^4]$, bei der zwei Ebenen $\alpha^3\beta^3$ und zugleich zwei Berührungspunkte einer Ebene $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ consecutiv werden. Die kleinste zulässige Ordnung der R_n^3 ist $n = 6$. Die betreffende Involution setzt sich aus drei Formen φ_α^6, ψ_α^6, χ_α^6 zusammen, deren Coefficientendeterminanten $|\varphi_i\psi_k\chi_l|$ mit δ_{ikl} bezeichnet seien.

Die Berechnung der ersten Glieder von der Singularitätenform $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ stößt auf ungemeine Schwierigkeiten; man ist wiederum genöthigt, wie beim letzten Male zu verfahren, und anzunehmen, daß eine Ebene bereits an den Stellen $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ und dann noch an einer weiteren γ die Curve berühre; man hat auszudrücken, daß γ sich der Stelle 0 beliebig nähere.

Nun berührt eine Ebene die Curve R in 0, ∞, γ, sobald:

$$\varphi_2 + 2\varphi_3\gamma + \varphi_4\gamma^2 = 0,\quad \psi_2 + 2\psi_3\gamma + \psi_4\gamma^2 = 0,\quad \chi_2 + 2\chi_3\gamma + \chi_4\gamma^2 = 0.$$

Andererseits müßten, wenn γ wirklich den Werth Null annehmen sollte, die Coefficienten φ_2, ψ_2, χ_2 einzeln verschwinden. Im Grenzfalle darf man also ansetzen:

$$\varphi_2 = \varepsilon\varphi'_2,\quad \psi_2 = \varepsilon\psi'_2,\quad \chi_2 = \varepsilon\chi'_2,\quad \delta_{2ik} = \varepsilon\delta'_{2ik},$$

wo die φ'_2, ψ'_2, χ'_2 und (vorderhand auch) die δ'_{2ik} mit ε nicht verschwindende Größen sind.

Combinirt man die beiderlei Ansätze, so erkennt man, daß die Größen γ und ε von derselben Ordnung der Kleinheit sind:

$$\gamma = \varkappa\varepsilon\ (\varkappa \text{ endlich}),$$

und es resultiren nach leichter Rechnung die Relationen

$$\delta_{i23} = -\frac{\varepsilon^2\varkappa}{2}\,\delta'_{i24}, \quad \delta_{i34} = -\frac{1}{2\varkappa}\,\delta'_{i24},$$

sodaß die δ_{i23} diejenigen unter den Größen δ_{2ik} sind, welche sogar mit der zweiten Potenz von ε proportional werden.

Auf diese Hülfsmittel gestützt, gelingt die Entscheidung über das Vorzeichen der Discriminante der Form $[\alpha^3\beta^2]$ für kleine Werthe von ε. Die Form $[\alpha^3\beta^2]$ ist selbst eine Discriminante, nemlich diejenige der Gleichung dritten Grades für die Restpunkte, welche die Ebene α^3 aus der R_6 noch ausschneidet.

Führt man die Bildung aus, indem man sich auf die drei ersten Coefficienten beschränkt, die letzteren nach steigenden Potenzen von ε entwickelt und sich wiederum mit der jeweils niedrigsten Potenz begnügt, so hat man:

$$\begin{aligned}[\alpha^3\beta^2] = &+4.3.\varepsilon^2\,\delta'_{124}\,\delta^3_{013}\,\frac{\varkappa}{2} + \cdots \\ &-4.9.\varepsilon\,\delta'_{124}\,\delta^3_{013}\,\alpha + \cdots \\ &+4.18\,\delta'_{124}\,\delta^3_{013}\,\frac{1}{2\varkappa}\,\alpha^2 + \cdots\end{aligned}$$

und in Folge dessen für genügend kleine ε:

$$D_\varepsilon[\alpha^3\beta^2] = +27\,\varepsilon^2\,\delta^6_{013}\,\delta'^2_{124}$$

i. e. unbedingt positiv. Mithin ist das Ebenenpaar $\alpha^3\beta^2$, welches beim Eintreten von $[\alpha^4\beta^2]$ benachbart wird, stets zugleich mit dem Paare von coincidirenden Berührungspunkten einer Tritangentialebene reell (resp. imaginär).

Hiermit ist eine vollständige Einsicht in die Lage der fünf Singularitätencurven S längs ihrer Tangenten $\varkappa = \varkappa_1$ und im Besondern hinsichtlich der gegenseitigen Berührung zweier verschiedener Curven S gewonnen.

Das ist aber nur das Bild für die Thatsache, daß wir jetzt sämmtliche Möglichkeiten erschöpfen können, die sich bezüglich einer Realitätsveränderung unserer fünferlei singulären Curvenelemente darbieten.

Indem wir alle Uebergänge bei Seite lassen, bei denen die betheiligten reellen (imaginären) Elemente reell (imaginär) bleiben, beachten wir in erster Linie die isolirte Stellung, welche die vierfachen Sehnen $(\alpha\beta\gamma\delta)$ einnehmen.

Vermöge der Coincidenz $(\alpha^2\beta\gamma)$ geht eine solche Gerade mit vier reellen Treffpunkten über in eine solche mit nur zwei reellen,

oder auch eine letztere über in eine solche mit keinem reellen Treffpunkt (resp. vice versa), ohne daß irgend ein Ersatz seitens der andern Singularitäten stattfindet.

Ebenso verhält es sich mit der Erscheinung $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$, wo zwei reelle Gerade, die zugleich irgend einer der eben erwähnten Arten angehören, vom Reellen in's Imaginäre übergehen (oder auch umgekehrt).

Ein theilweise ähnliches, theilweise aber auch anderes Verhalten zeigen die Tritangentialebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$.

Beim Eintreten von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ oder von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ rücken wiederum zwei reelle Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, sei es mit drei oder auch nur einem reellen Berührungspunkt, zusammen, um imaginär zu werden (resp. umg.), gleichfalls ohne Compensation.

Dagegen wird beim Passiren von $[\alpha^4\beta^2]$ der Uebergang von einem Paar reeller (imaginärer) Berührungspunkte einer Ebene $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ in's Imaginäre (Reelle) begleitet von einem durchaus gleichverlaufenden eines Paares von Ebenen $\alpha^3\beta^2$.

Dieselbe Begleiterscheinung bemerkt man beim Ueberschreiten von $[\alpha^5]$, wo sich ein Paar von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ mit einem Paare von Ebenen α^4 in paralleler Bewegung befindet.

Bei $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ fand zwischen dem Paar von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ und demjenigen von Geraden $(\alpha^2\beta)$ keine Realitätsabhängigkeit statt d. h. während etwa ein reelles Paar dort gewonnen wird, kann hier ein sslches ebensogut gewonnen wie verloren werden.

Eine entsprechende Zweideutigkeit kommt den Vorgängen $[\alpha^3\beta^3]$ und $[((\alpha\beta))]$ zu, an denen sich jedesmal zwei Paare von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ resp. Geraden $(\alpha^2\beta)$ betheiligen. Entweder geht die Realität beider Paare zugleich verloren (oder wird gewonnen); es kann aber auch ein reelles Paar von einem imaginären begleitet sein, die dann nach dem Durchgange durch das bez. Vorkommniß nur ihre Rolle vertauscht haben.

Endlich hat die Coincidenz $[(\alpha^3)]$ wieder etwas ihr Eigenthümliches, hier gesellt sich ein reelles (imaginäres) Paar von Ebenen α^4 zu einem imaginären (reellen) Paar von Geraden $(\alpha^2\beta)$, um nach dem Durchgange je in den entgegengesetzten Zustand zu gerathen.

Um den Kern dieser Ergebnisse kurz in Zeichen zu fixiren, sei die Anzahl der reellen Ebenen α^4 einer Raumcurve C mit w' bezeichnet, der reellen Ebenen $\alpha^3\beta^2$ mit t', der reellen Geraden $(\alpha^2\beta)$ mit d', sowie endlich die Anzahl der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ mit nur einem einzigen reellen Berührungspunkt mit T''.

„**Dann bleibt bei beliebigen Deformationen der Curve C das Aggregat**[1])

$$w'+d'-t'-2T''$$

entweder ganz unverändert — wie z. B. stets beim Passiren der Coincidenzen $[\alpha^5]$, $[(\alpha^3)]$, $[\alpha^4\beta^2]$ — oder es erfährt eine Zu- (resp. Ab-)nahme um ganze Vielfache von Vier, während es immer Fälle giebt, in denen einzelne Bestandtheile des Aggregates nur um Zwei sich ändern."

Ein einfaches Beispiel liefert die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species R_4^2. Hier treten nur (vier) Ebenen α^4 und (vier) Gerade $(\alpha^2\beta)$ auf, sodaß sich unser Aggregat auf $w'+d'$ reducirt. Auf Grund des letzten Satzes bieten sich zwei Möglichkeiten; entweder könnte $w'+d' = 0, 4, 8$ sein, oder aber $= 2, 6$. Vermöge der oben erörterten Realitätseigenschaften der Form $[\alpha^4]$ und ihrer Hesse'schen: $[(\alpha^2\beta)]$, sowie vermöge der bekannten Bedeutung, welche das Verschwinden der Invariante j für die erstere Form besitzt, läßt sich die Entscheidung dahin abgeben, daß die zweite Möglichkeit $w'+d' = 2, 6$ überhaupt nie eintritt, und bei der ersten allein die beiden Fälle $w'+d' = 0, 4$ existiren. Des Näheren wird man, abgesehen von Uebergangscurven mit zusammengesetzten Singularitäten, auf vier verschiedene Typen von R_4^2 geführt.

Geht man nämlich von einer Curve mit isolirtem Doppelpunkt $((\alpha\beta))$ aus, und löst denselben auf, so hat man den ersten Typus $w' = 4$, $d' = 0$. Um den letzteren zu verlassen, muß man sich nothwendig der Brücke einer stationären Tangente (α^3) bedienen, dann kommt $w' = 2$, $d' = 2$.

In diesem Zustande kann wohl ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten passirt werden, ohne indessen den Typus als solchen umzugestalten. Will man zu einer neuen Art von R_4^2 gelangen,

---

1) Wegen des Ansatzes sehe man nach bei Brill l. c. § 7.

Besitzt die Curve auch noch die zu α^4 und $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ dualistischen Singularitäten, so sind die bez. Realitätsanzahlen von w' resp. $2T''$ abzuziehen.

Will man nur die Aenderungen modulo 4 hervorheben, so werden selbstredend die Vorzeichen bedeutungslos.

Die Entwickelungen des Textes stützen sich zwar zunächst auf solche Deformationen der Curve, die von nur einem willkürlichen Parameter abhängen: indessen ist leicht zu sehen, daß auch Durchgänge durch complicirtere Coincidenzen zulässig sind, da man immer Nachbarwege einschlagen kann, welche jene vermeiden.

so muß man abermals durch (α^3) hindurch, und es wird drittens $w' = 0$, $d' = 4$. Um endlich von hier aus zum letzten Typus zu gelangen, ist als Uebergangsmittel ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten erforderlich, dann entsteht $w' = 0$, $d' = 0$ mit der Summe $w' + d' = 0$, während in den drei zuvor angegebenen Fällen gleichmäßig $w' + d' = 4$ war.

Zum Schlusse möge ein Vergleich zwischen der bekannten, von H. Klein[1]) herrührenden Relation zwischen Realitätsanzahlen von Singularitäten ebener Curven und dem hier mitgetheilten entsprechenden Ergebniß für Raumcurven gezogen werden.

Da macht sich sofort ein auffälliger Unterschied bemerkbar.

Während nämlich die Klein'sche Formel im Wesentlichen aussagt, daß ein gewisses Aggregat von Realitätsanzahlen nur noch von der Ordnung und Klasse der ebenen Curve abhängt, und somit irgend welchen Deformationen der Curve gegenüber invariant bleibt, wenn nur Ordnung und Classe die alten geblieben sind, können wir für die bez. Realitätsanzahlen von Raumcurven nur eine Congruenz mod. 4 constatiren, wenn eben etwas hinsichtlich beliebiger Deformationen Allgemeingültiges behauptet werden soll.

Die Quelle des betonten Unterschiedes zwischen Ebene und Raum ist offenbar darin zu suchen, daß die räumliche Ausdehnung der Begriffe: Wendetangente „α^3“, Doppeltangente „$\alpha^2\beta^2$“ und Doppelpunkt „$(\alpha\beta)$“ für Curven je in doppelter Richtung vor sich gehen kann — α^3 spaltet sich in α^4 und $\alpha^3\beta^2$, $\alpha^2\beta^2$ in $\alpha^3\beta^2$ und $\alpha^2\beta^2\gamma$, endlich $(\alpha\beta)$ in $(\alpha^2\beta)$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$ — und daß infolge dessen die Zwischenstufe des „Isolirten“, wie sie bei $\alpha^2\beta^2$ und $(\alpha\beta)$ in der Ebene vorhanden ist, im Raume bei $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$ zwar zwar noch ganz analog existirt, bei $\alpha^3\beta^2$ und $(\alpha^2\beta)$ aber nicht mehr.

Beispielsweise kann also bei einer Selbstberührung „$[\alpha^2\beta^2, (\alpha\beta)]$“ in der Ebene ein Paar von reellen, eigentlichen Doppelpunkten ebensowohl in Begleitung eines Paares von eben solchen Doppeltangenten, wie eines Paares von imaginären Doppeltangenten coincidiren — völlig in derselben Weise, wie im Raume bei $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ ein Paar $\alpha^3\beta^2$ und ein Paar $(\alpha^2\beta)$ — dagegen ist ein Paar von isolirten Doppelpunkten bei der Selbstberührung stets mit einem Paare von isolirten Doppeltangenten verknüpft, welche dann beide zugleich in's Imaginäre übergehen, und dazu fehlt die Parallele im Raume. Daher kann in der Ebene immer noch ein Ausgleich

1) Math. Annalen Bd. X.

zwischen den Anzahlen der isolirten Gebilde beiderlei Art stattfinden, während ein solcher im Raume unmöglich wird.

Hingegen tritt die Analogie hinsichtlich der Coincidenzen $[\alpha^4]$ und $[(\alpha^2)]$ (Undulation und Spitze) dort, und der Coincidenzen $[\alpha^5]$, $[\alpha^4\beta^2]$ und $[(\alpha^3)]$ hier besonders deutlich hervor.

Clausthal, den 21. Februar 1891.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Vol. VI. (della serie vol. XII.) Pisa 1889.
Le opere di Galileo Galilei. Ediz. nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. I. (2 Exempl. No. 147. 161.) Firenze 1890.
Bollettino delle publicazioni italiane. (Bibliot. naz. di Firenze.) 1890. No. 110—115. Firenze 1890. — Indice alfabetico delle opere 1889. A-Sai.
Bollettino delle opere moderne straniere. Bibliot. naz. centr. Vittorio Emanuele di Roma.) Vol. IV. No. 6. Nov./Dic. 1889. Nebst Titelblatt. Vol. V. No. 1. Gennaio 1890. Roma 1890.
Annuaire de l'Observatoire municipal de Montsouris pour l'an 1890. Paris.
United States Geological Survey.
a. Eighth annual report. 1886—87. Part 1. 2. Washington 1889.
b. Bulletin. No. 54—57. Ebd. 1889/90.
c. Monographs. Vol. XV. Part 1. 2. Vol. XVI. Ebd. 1889.
Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution for the year ending June 30, 1886. Part 2. — . . . for the year ending June 30, 1887. Part. 1. 2. Washington 1889.
Annual report of the chief signal officer. War Department. 1889. Part 1. 2 (Appendix 15). Washington 1890.
U. S. Naval Observatory.
a. Observations made during the year 1884. Washington 1889.
b. Report of the superintendent for the year ending June 30, 1889. Ebd. 1889.
Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Whole Series. Vol. XVI. No. 9. Vol. XX. No. 2. Cambridge U. S. A. 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. Mai. **№ 3.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. März.

F. Kielhorn legt vor: „Die Colebrooke'schen Pâṇini-Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Göttingen."

Riecke legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Gustav Tammann in Dorpat vor: „Ueber die Stromleitung durch Niederschlagsmembranen."

Die Colebrooke'schen Pâṇini-Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Göttingen.

Von

F. Kielhorn.

Die Göttinger Bibliothek hat die Ehre eine kleine Sammlung Colebrooke'scher Handschriften ihr eigen nennen zu dürfen. Durch welches tragische Geschick sie in den Besitz dieses Schatzes gekommen ist, zeigt ein in den Akten der Bibliothek befindlicher Brief[1]), dem ich folgende Stellen entnehme: —

„Mein vor 15 Jahren verstorbener ältester Sohn, der Professor Rosen in London, ordnete im Jahre 1837 auf Bitte des allmählig ganz erblindenden T. Colebrooke die Sammlung und den sorgfäl-

---

1) Der Schreiber des Briefes, Vater des zu früh verstorbenen Orientalisten F. A. Rosen, studierte in Göttingen zuerst Philologie 1793—98 (Dr. phil. 1798), dann seit 1802 Jurisprudenz (Dr. juris 1803), und war bis 1816 Docent in der juristischen Facultät.

tigen Wiederabdruck der, hauptsächlich in den Asiatick researches, zerstreueten, sich auf indische Sprache und Literatur beziehenden Aufsätze (Essays) desselben an, welche denn auch im Todesjahre Beider (1837) bekanntlich erschienen sind. Bei dieser Gelegenheit und in Anerkennung der Mühe, welche mein Sohn von diesem Geschäfte hatte, schenkte Colebrooke ihm einige Handschriften von Sanskritwerken, die reich mit seinen beigeschriebenen Anmerkungen grammaticalischen und lexicalischen Inhalts versehen sind, in denen man Vorarbeiten zu den Werken des berühmten Sanskritisten erkennen kann.

Diese Mspte befinden sich seit dem Tode meines Sohnes in meinem Besitze. Herr Prof. Lassen in Bonn hatte vor 13 Jahren die grosse Güte, für mich ein Verzeichniss dieser und anderer zum literarischen Nachlasse des Verstorbenen gehörigen Handschriften anzufertigen. Eine von diesen enthält

> A grammar of the Sanscrit language from the text of Pânini and the commentaries of Ramachandra, Bhattoji Dîkshita etc. — (Devanagari-Schrift). — Herr Pr. Lassen hat dabei bemerkt „es ist Pânini mit Colebrooke's handschriftlicher Uebersetzung und wahrscheinlich die vorbereitende Arbeit zu seiner Grammatik“.

Die Colebrooke'schen Anmerkungen scheinen aus den letzten neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts herzurühren und werden allerdings nicht mehr im Stande seyn, dem in den letzten 50 Jahren so weit geförderten Sanskritstudium noch irgend bedeutend zu statten zu kommen; allein die Handschriften haben sicher noch immer hohen Werth als autographische Denkmale jenes würdigen Gelehrten, und sie verdienen aus dem Privatbesitze eines Dilettanten, wo sie später manchen Gefahren ausgesetzt sind, in eine öffentliche Bibliothek überzugehen.

Ich biete sie dem Bücherschatze der noch immer dankbar von mir verehrten Georgia Augusta als Geschenk an.

. . . .

Bei dieser Schenkung mache ich eine einzige Bedingung. Es ist folgende. — Nach dem Tode meines unvergesslichen Sohns übersandten mir seine Londoner Freunde, unter andern rührenden Beweisen ihrer Theilnahme an meinem Verluste auch eine von Rd. Westmacott gearbeitete Marmorbüste des Verstorbenen. Dass ich diese Büste so lange ich lebe bewahren werde versteht sich von selbst. Ich werde aber anordnen, dass dieselbe nach meinem nicht mehr fernen Ableben ebenfalls an die Universitätsbibliothek in Göttingen übersandt werde. — Nun bitte ich mir nur von der vor-

gesetzten Behörde dieser Bibliothek ein schriftliches Versprechen aus, dass die Büste, wenn Ihr dieselbe übersandt worden, in einem der Bibliotheksäle aufgestellt werden solle. — Das Bild eines zu früh dahingerafften Mannes, der sich nicht bloß durch Gelehrsamkeit, sondern auch durch unermüdete Dienstfertigkeit gegen andere Gelehrte die Achtung und Liebe seiner Zeitgenossen erworben, und dessen Namen auch in Göttingen nicht vergessen ist, wird diesen Sälen nicht zur Unzier gereichen.

Detmold den 25sten Sept. 1852.

Dr. Ballhorn-Rosen,
F. Lipp. Canzler."

Die in diesem Briefe erwähnten Handschriften, neun Folio-Bände, wurden der Bibliothek im October und December des Jahres 1852 übersandt, zusammen mit einem Exemplare des 7ten Bandes der *Asiatic Researches*, das ebenfalls aus Colebrooke's Bibliothek stammt und manche Bemerkungen von seiner Hand enthält, und einem Exemplare seiner *Essays*. Die Büste Friedrich August Rosen's ziert seit Februar 1856 den großen historischen Saal der Bibliothek.

Es ist nicht meine Absicht, eine Beschreibung sämmtlicher Handschriften zu liefern, die so in den Besitz der Bibliothek übergegangen sind; und ich brauche dies um so weniger zu thun, als ein Verzeichniß aller unsrer Sanskṛit-Handschriften[1]) in Professor Wilhelm Meyer's Kataloge der Göttinger Handschriften seine Stelle finden wird. Aber ich halte es für meine Pflicht, hier wenigstens auf die darunter befindlichen Handschriften der Grammatik des Pâṇini aufmerksam zu machen; denn wegen der reichen Bemerkungen Colebrooke's, die sie enthalten, besitzen diese Handschriften noch immer einen grossen Werth. Colebrooke's Versuche die Grammatik des Pâṇini in eine europäische Sprache zu übertragen, mit denen wir hier bekannt werden, zeigen, daß er sich schon gegen das Ende des vergangenen Jahrhunderts wie kein anḍrer Europäer vor oder nach ihm mit der Technik der indischen Grammatik vertraut gemacht hatte. Und die Probe einer Uebersetzung des Pâṇini mit erklärendem Commentare in englischer Sprache, die eine dieser Handschriften im Anhange enthält, verräth überall, durch wie umfassende und tiefgehende Studien im Bereiche der grammatischen Literatur er sich für das von ihm beabsichtigte Werk vorbereitet hatte. Es ist darum nicht zu verwundern, daß Colebrooke's Uebersetzungen mancher schwierigen

1) Bearbeitet von einem meiner Schüler, Herrn H. Lüders.

Regel, die sich in den Handschriften zerstreut finden, bis heute kaum erreicht, viel weniger übertroffen sind; und daß das, was er uns bietet, fast immer geeignet ist uns das Verständniß einer Regel zu erleichtern oder den richtigen Ausdruck für ihre Uebersetzung finden zu lassen, auch wo wir ihm nicht ganz beistimmen können.

Diese Handschriften des Pâṇini sind in den Katalogen der Bibliothek als Cod. MS. Orient. 207, 208, und 209 bezeichnet. Alle drei sind von Eingebornen in Devanâgarî Schrift auf starkem europäischen Papiere großen Formats (etwa 48 Centimeter hoch und 29—32 Centimeter breit) nach Art europäischer Bücher geschrieben.

Das Papier von 208 und 209, um die weniger wichtigen Handschriften vorweg zu nehmen, enthält Wasserzeichen der Jahre 1801 und 1802. In beiden ist es auf beiden Seiten beschrieben, und jede Seite enthält zwei Columnen mit leeren Zwischenräumen, die von Colebrooke für eigne Bemerkungen bestimmt waren und für solche benutzt sind.

No. 208, aus 62 Blättern bestehend, enthält nach Colebrooke's Aufschrift „Pâṇini's Sûtras or Rules of Grammar“; in Wirklichkeit aber in schwarzer Schrift den Text der Sûtras, und in rother Schrift Zusatzregeln oder sonstige Bemerkungen (Vârttikas, Kârikâs etc.) aus der Kâśikâ-Vṛitti. Manche Regeln sind von Colebrooke kurz übersetzt; öfter hat er den Paragraphen seiner Grammatik angegeben, in dem sich die Uebersetzung findet oder wo der betreffende Gegenstand behandelt wird. Außerdem hat er vielen Regeln oder Bemerkungen des Sanskṛit Textes gewisse Zeichen (arbitrary marks, — eine Hand, einen Stern, einen Dolch, u. a.) vorgesetzt, durch welche er, wie er selbst angibt, andeuten wollte, unter welche der folgenden Rubriken eine Regel oder Bemerkung fällt: —

1. A rule premised (d. i. eine Adhikâra-regel).
2. A maxim (d. i. eine Paribhâshâ).
3. An exposition (d. i. eine Saṁjñâ-regel).
4. A rule peculiar to the Veda.
5. An emendatory rule or Vârttika.
6. A remark (Ishṭi) extracted from the Bhâshya.
7. A metrical rule or Kârikâ.
8. A memorial verse.
9. A list from the Gaṇapâṭha.

Colebrooke's in dieser Handschrift enthaltene Uebersetzungen einiger wichtigen Regeln hoffe ich an andrer Stelle nutzbar zu

machen. Hier möchte ich nur noch bemerken, daß zwischen Blatt 1 und 2 dieser Handschrift ein Blatt mit dem Wasserzeichen des Jahres 1801 eingeheftet ist, auf dem Colebrooke die „Grammarians named in the Preface of the Gańaratna Mahódadhi, as explained by Bardhamána (Pupil of Góvinda Súri)“ verzeichnet hat.

No. 209, aus 107 Blättern bestehend, wird am Anfange und am Schlusse vom Schreiber als Pâṇinisûtrabhâshyavârttika bezeichnet, und enthält in der That die Sûtras des Pâṇini mit Vârttikas und andern Auszügen aus dem Mahâbhâshya. Es unterliegt keinem Zweifel, daß wir in dieser Handschrift den ersten Versuch vor uns haben, der Grammatik des Pâṇini die Form zu geben, die sie später in der Calcuttaer Ausgabe der *Ashṭâdhyâyî* erhalten hat. Colebrooke's handschriftliche Bemerkungen sind nicht zahlreich. Doch kann ich auf zwei Punkte aufmerksam machen, welche beweisen wie weit er auch in dem Verständniß und der richtigen Erkenntniß der Natur des Mahâbhâshya seiner Zeit voraus war. Ein formeller Punkt besteht darin daß er, bei Regeln die er studiert hat, die Worte *kartavya* und *vaktavya*, wo sie der Schreiber oder Paṇḍit an das Ende eines Vârttika gesetzt hatte, als nicht zum Texte des Vârttika gehörig gestrichen hat. Und bedeutsamer noch ist der zweite Punkt, daß nämlich Colebrooke schon hier das Mahâbhâshya als einen Commentar zu den Vârttikas bezeichnet, und — wiederum durch arbitrary marks — dann und wann angedeutet hat, daß gewisse Vârttikas von Patañjali adoptiert, andere verbessert, und noch andre vermittelst einer künstlichen Erklärung der Regeln des Pâṇini zurückgewiesen werden.

Wichtiger ist die dritte Handschrift, No. 207 unsrer Kataloge, die von Colebrooke selbst als „A Grammar of the Sanscrit Language; from the text of Páńini, and the commentaries[1]) of Ráma-chandra, Bhattóji-dícshita, and others“ bezeichnet wird. Diese Handschrift enthält zunächst auf 73 Blättern, die das Wasserzeichen des Jahres 1794 tragen, den Text der *Ashṭâdhyâyî*, so geschrieben daß rechts vom Texte reichlicher Raum für handschriftliche Bemerkungen blieb. Da dieser Raum indessen nicht genügte, wurden später noch 81 Blätter[2]),

1) Unter diesen Commentaren sind ohne Zweifel die *Prakriyá-kaumudí* und die *Siddhánta-kaumudí* zu verstehn, die besten Werke, die sich Colebrooke für den Anfang hätte wählen können.

2) Außerdem liegen in der Handschrift einige lose Blätter mit Uebersetzungen einzelner Regeln; und ein Briefkouvert mit dem Wasserzeichen 1797, das von Colebrooke an J. H. Harington Esq., und von diesem an H. Colebrooke Esq. zurück adressiert ist. John Herbert Harington, Civilbeamter im Dienste der East

mit dem Wasserzeichen des Jahres 1796, zwischen den Blättern des Textes eingefügt. Der neben dem Texte gelassene Raum und die so eingeschobenen Blätter enthalten Colebrooke's Uebersetzung von etwa drei Vierteln sämmtlicher Regeln der Grammatik des Pâṇini. Nahezu vollständig übersetzt ist Alles, was sich auf die Technik der indischen Grammatik, auf die Lautlehre, die Declination und Conjugation, die Bildung der Femininstämme, die Bedeutung der Suffixe und die Syntax bezieht; und in den Abschnitten, die von der Composition der Nomina, den kṛit und taddhita Suffixen handeln, sind wenigstens die Regeln allgemeinern Inhalts erklärt und die sich aus den Regeln ergebenden Resultate bisweilen durch tabellarische Uebersichten erläutert worden. Nicht übersetzt sind im Wesentlichen nur die Regeln über die Accente und die Sprache des Veda. Ich hege keinen Zweifel, daß der Anfang mit dieser Uebersetzung gemacht wurde, als Colebrooke zum ersten Male den Pâṇini mit seinen Paṇḍits studierte. Aber es ist sicher, daß er später, als er die Commentare selbst verstehn gelernt hatte, aber schon ehe er seine Sanskṛit Grammatik veröffentlichte, das zuerst Niedergeschriebene immer wieder zu verbessern gesucht hat. Ich könnte mehr als eine schwierige Regel anführen, von der uns die Handschrift drei oder vier Versuche einer Uebersetzung bietet, die aber alle von der in Colebrooke's Grammatik gedruckten Uebersetzung derselben Regel noch übertroffen werden.

Ich bin überzeugt, daß Colebrooke in den letzten Jahren des verflossenen Jahrhunderts die Absicht gehabt hat, den Text der Grammatik des Pâṇini mit einer englischen Uebersetzung und einem Commentare in englischer Sprache herauszugeben, und daß er sich erst später, durch äußere Umstände veranlaßt, entschloß, das von ihm gesammelte Material in seiner (leider nie vollendeten) Sanskṛit Grammatik zusammenzustellen und die Herausgabe des Textes des Pâṇini den Calcuttaer Paṇḍits zu überlassen. Auf jeden Fall enthält unsre Handschrift in einem Anhange auf 11 Blättern Colebrooke's Reinschrift einer Uebersetzung des größten Theiles des ersten Adhyâya von Pâṇini's Werke, und seinen Commentar zu einer beträchtlichen Anzahl von Regeln. Die hier übersetzten Regeln sind P. I, 1, 1—58 und 60—75; 2, 1—52 und 64—73; 3, 1—43; und 4, 1—12; commentiert sind I, 1—20, 27—37, 42—49,

India Company seit 1780, und zuletzt Member of the Supreme Council and President of the Board of Trade, „was also for some years honorary professor of the laws and regulations of the British government in India in the college of Fort William . . . and afterwards president of the council of the college" (*Dict. of Engl. Biogr.*)

und 51; 2, 27—29, und 64—73; und 3, 1—43. Außerdem ist bei vielen Regeln auf dem Rande bemerkt, wo sie oder die in ihnen gelehrten Termini zur Anwendung kommen. Vieles von dem, was unsre Handschrift bietet, hat Colebrooke in seiner Grammatik selbst veröffentlicht. Trotzdem dürfte die Handschrift auch jetzt noch dem, der die Grammatik des Pâṇini ins Englische übersetzen wollte, sehr werthvolle Dienste zu leisten im Stande sein. Zum Beweise hierfür gebe ich die Uebersetzung des ersten Pâda der *Ashṭâdhyâyî*, wie sie Colebrooke in seinen Handschriften selbst gegeben hat. Ich folge im Allgemeinen der erwähnten Reinschrift, gestatte mir aber einzelne Ausdrücke oder Wendungen aus andern Stellen der Handschriften aufzunehmen. Colebrooke's Anmerkungen zu veröffentlichen ist hier nicht der Ort.

Pâṇini Adhyâya I, Pâda 1.

1. *Â*, *ai* and *au* are named *vṛiddhi*;
2. and *a*, *e* and *o* are called *guṇa*.
3. When the substitution of such a letter is enjoined under these denominations, without specifying the letter which gives place thereto, such *guṇa* and *vṛiddhi* element shall be substituted for an *ik* vowel only.
4. The substitution of a *guṇa* or *vṛiddhi* letter, for an *ik* vowel, does not take effect in right of an *ârdhadhâtuka* suffix on account of which some part of the verb is expunged;
5. nor in right of an affix, which does really or fictitiously contain a mute *k* or *ṅ*;
6. nor does it take place in the verbs *dîdhîṅ* 'to shine', or 'to play', and *vevîṅ* 'to move, to pervade, to conceive, to desire, to throw', or 'to eat'; nor in the prefix *iṭ*.
7. Consonants, not separated by intervening vowels, are termed conjunct.
8. An element prolated by the nose and mouth is nasal.
9. Letters, articulated near the same organ of speech and with the same aperture for the voice, are homogeneous;
10. but a vowel and a consonant are not so.
11. *Î*, *û* and *e*, terminating a word in the dual number, are named *pragṛihya* (and are consequently unalterable, even though a vowel follow in connected orthography).
12. So are the same vowels following *m* in the inflections of the pronoun *adas* 'this';
13. and so is *śe* (which is employed in the Veda, in the inflections of the personal pronouns).

14. A particle consisting of a single vowel, except (*â* deduced from) *âṅ*, is likewise named *pragṛihya*;
15. and so is *o*, being the final of a particle.
16. In the vocative case a final *o* is likewise so named, according to Śâkalya, when *iti* follows, unless it be in a passage of holy writ.
17. So likewise (*u* deduced from) *uñ* is named *pragṛihya*, according to the same author, when that particle follows;
18. and so is the nasal vowel ũ, which may be substituted for *uñ* before the same term, according to the same authority.
19. *Î* and *û*, terminating a word that bears the sense of the seventh case, are likewise named *pragṛihya*.
20. The verbs *dâ* and *dhâ*, and such as assume those forms, except *dâp* 'to cut' and *daip* 'to cleanse', are called *ghu*; (*viz*. *ḍudâñ* and *dâṇ* 'to give'; *do* 'to cut'; *deṅ* 'to protect'; *ḍudhâñ* 'to hold, to nourish'; and *dheṭ* 'to drink'.)
21. A single letter is liable to the same inflections as if it were initial or final.
22. *Tarap* and *tamap* (terminations denoting the comparative and superlative degrees) are named *gha*.
23. The words *bahu* 'many' and *gaṇa* 'a set' or 'class' [1]), and terms ending in the suffixes *vatu* and *ḍati* are called numerals.
24. A numeral ending in *sh* or *n* [2]) is named *shaṭ*;
25. and so is one, the termination whereof is deduced from the suffix *ḍati*.
26. *Kta* and *ktavatu* (suffixes with which are formed the participles of the past tense) are called *nishṭhâ*.
27. *Sarva* and certain other words, whether single or terminating a compound, are termed pronouns.
28. They may at pleasure be, or not be, so named in a Bahuvrîhi compound formed of terms signifying regions of space.
29. They are not so named in any other Bahuvrîhi compound;
30. nor in a compound, which, if resolved, would exhibit its other term in the third case; [nor in a phrase equivalent to such a compound;]
31. nor in a Dvandva compound.
32. However, they may at pleasure be, or not be inflected as pro-

---

1) An andrer Stelle: „*bahu* and *gaṇa*, unless they signify greatness or assemblage".

2) Oder „a numeral originally ending in *sh* or *n*"; oder „numerals which in their elementary form end in *sh* or *n*". — Siehe P. I, 1, 24, Vârtt. 1.

nouns, in a Dvandva compound, with *jas*, the termination of the first case in the plural number.

33. *Prathama* 'first', *charama* 'last', derivatives ending in *taya* (deduced from the suffix *tayap*), *alpa* 'little', *ardha* 'half', *katipaya* 'few', and *nema* 'half', may at pleasure be, or not be, inflected as pronouns in the plural number of the first case. [*Ubhaya* 'both', derived from *ayach* substituted for *tayap*, must be inflected like a pronoun in this case and number. Ordinals ending in *tîya* may be inflected as pronouns with the suffixes distinguished by a mute *ṅ*].
34. So may *pûrva* 'east' or 'prior', *para* 'subsequent', *avara* 'west' or 'posterior', *dakshiṇa* 'south' or 'right', *uttara* 'north' or 'subsequent', *apara* 'other' or 'inferior', and *adhara* 'west' or 'inferior', denoting relative situation, unless they be used as appellatives.
35. So may *sva* 'own', unless it be used as an appellative and signify 'kinsman' or 'wealth';
36. and so may *antara* provided it signify 'external' or 'lower garment'.
37. *Svar* and certain other words are indeclinable; and so are particles.
38. So are words ending in a taddhita suffix, to which all the signs of cases cannot be subjoined;
39. and so are words terminated by a kṛit suffix ending in *m* or in a diphthong;
40. or terminated by the suffixes *ktvâ*, *tosun*, or *kasun*.
41. An adverbial compound too is indeclinable.
42. *Śi* (which is substituted for *jas* and *śas* in the inflections of neuter nouns) is called *sarvanâmasthâna*;
43. and so are *su*, *au*, *jas*, *am* and *auṭ*, except in the neuter gender. (The exception does not contradict the preceding rule.)
44. *Vibhâshâ* denotes prohibition together with option. (It signifies "not, optionally however".)
45. An *ik* vowel, which has been, or is to be, substituted for a semivowel (*yaṇ*) [1]), is called *saṁprasâraṇa*.

---

1) Bei einer etwas andern Fassung der Regel fügt Colebrooke hinzu „and the substitution of such a vowel for a semivowel"; and hat die Anmerkung „the rule admits of two interpretations, and must in fact be taken in both senses, as here translated". Er will offenbar sagen, daß *saṁprasâraṇa* nicht nur den für den Halbvocal substituierten Vocal bezeichnet, sondern auch gleichbedeutend ist mit dem Satze „*ik* tritt an die Stelle von *yaṇ*". Vgl. die Vârttikas zu der Regel.

46. That which is distinguished by a mute *ṭ*, is initial; by a mute *k*, is final;
47. and by a mute *m*, is subjoined to the last vowel, (whether this be, or be not, followed by a consonant).
48. When a short vowel must be substituted for a diphthong, only the *ik* element becomes short (but the other element is rejected)[1]).
49. In rules of grammar, the sixth case imports "instead of".
50. When an element is to be substituted for another, the most similar to the original one must be chosen out of those which are offered.
51. When an *aṇ* vowel is substituted for *ṛi*, *r* must be subjoined to it. [In like manner *l* is subjoined to such a vowel substituted for *ḷi*.]
52. What is thus (49) directed to be substituted for a term so exhibited in the sixth case, shall be put in the place of the last letter thereof;
53. and so shall a substitute containing a mute *ṅ* (even though it consist of several efficient letters, 55).
54. A variation of a subsequent term on account of a preceding one affects its initial letter only.
55. A substitute consisting of two or more efficient letters, (without a mute *ṅ*, 53,) or distinguished by a mute *ś*, shall be put in the place of the whole term so (49) exhibited in the sixth case.
56. The substitute is equal to the original, except in regard to operations depending on the particular letters of the original.
57. That, which is substituted for a vowel on account of a subsequent term, is equal to the original so far as the preceding element is concerned;
58. except in regard to operations on the termination of an inflected word; in regard to the duplication of elements; in regard to the preceding element in the instance of *vara*; in regard to the expunging of *y*; in regard to the tone of vowels; in regard to the substitution of a homogeneous element; in regard to the substitution of *anusvâra*; in regard to the lengthening of a vowel; in regard to the substitution of a *jaś* consonant; and in regard to the substitution of a *char* consonant.

---

1) An andrer Stelle: „when a short vowel must be substituted for a diphthong, it shall be an *ik* vowel".

59. . . . .[1])

60. The expunging, obliterating, effacing, or omitting of an element, so that it shall be unheard and unpronounced, is called *lopa* or substitution of a blank.

61. *Luk*, *ślu* and *lup* are names for the expunging of suffixes with such consequent operations, as are denoted by these terms respectively[2]).

62. When the whole of a suffix is expunged, operations, depending on such a suffix, do nevertheless take place;

63. unless the term, by which the suffix is directed to be expunged, contains the syllable *lu*; for, in that case, the radical body[3]) remains unaffected.

64. The last vowel, together with a subsequent consonant (if any there be), is called *ṭi*, the last syllable.

65. The element, which precedes the last letter, is called penultimate.

66. When that, on account of which something is directed to be done, is exhibited in the seventh case, the consequent operation affects a preceding term only.

67. When it is exhibited in the fifth case, the operation affects a subsequent term only.

68. In grammar, the particular form only of a word (abstracted from its sense) is meant; excepting the technical denominations of words, for they, not the word which designates them, are thereby meant.

69. A vowel or a semivowel (*aṇ*), or a consonant to which a mute *u* is annexed, implies the homogeneous elements as well as the particular letter, which is expressed; excepting suffixes.

70. Preceded or followed by the letter *t*, an element implies the homogeneous sounds of the same length as well as the particular one which is expressed.

71. The first term of any set, together with a final mute letter, is a designation of all the intermediate elements as well as of that initial term itself.

---

1) Diese Regel ist nirgends vollständig übersetzt.

2) An andrer Stelle: „the expunging of a suffix with such further consequences as are severally denoted by the terms *luk*, *ślu*, and *lup*, is designated by these terms respectively".

3) Später hat Colebrooke *aṅga* mit „inflective root" übersetzt. Vgl. seine Grammatik, S. 14: „*Luk*, *ślu* and *lup* are also names for the expunging of affixes; and, when a blank is substituted under one of these denominations, the inflective root remains unaffected by the expunged affix".

72. That, by which, as a limitation[1]), a grammatical operation is directed, implies the whole term whereof it is the final.
73. A word, whereof the first vowel is *vṛiddhi*, is named *vṛiddha*;
74. and so are *tyad* and certain other pronouns;
75. and so is a word, whereof the first vowel is *e* or *o*, provided it be the name of an eastern country.

1) An andrer Stelle „as a restrictive term", oder „as an epithet".

Ueber die Stromleitung durch Niederschlagsmembranen.

Von

Gustav Tammann.

Vor kurzem hat Ostwald[1]) ein System aus Kupfersulfat und Ferrocyankaliumlösung, getrennt durch die semipermeable Membran von Ferrocyankupfer, electrolysirt und ist bei der Deutung dieses Versuches zur Ansicht gelangt, daß die semipermeabeln Niederschlagsmembranen die Electricität metallisch leiten. Zur selben Zeit hatte ich gefunden, daß die semipermeabele Membran einen außerordentlich geringen Widerstand dem Durchgange von Wechselströmen bietet[2]). Schon damals hatte ich mir vorgenommen, die Art der Electricitätsleitung durch semipermeable Membranen näher zu untersuchen, und speciell die von Ostwald aufgestellten Ansichten, die ich erst nach Abfassung meiner Mittheilung erfuhr, näher zu prüfen. Inzwischen sind von Oberbeck[3]) die electromotorischen Kräfte, deren Sitz die Niederschlagsmembranen sind, gemessen, es hat sich dabei herausgestellt, daß ihr Betrag von der Eigenschaft der Semipermeabilität wenig beeinflußt wird, ja bei nicht membranartigen Niederschlägen wurden zuweilen größere electromotorische Kräfte constatirt, als bei Systemen mit Niederschlagsmembranen, die nach Ostwald besonders große electromotorische Kräfte ergeben sollten. Die Frage nach der Art der Electricitätsleitung durch die Niederschlagsmembranen ist von

1) W. Ostwald, Zeitschrift f. physik. Chem. 6. p. 71. 1890.
2) G. Tammann, Zeitschrift f. physik. Chem. 6. p. 236. 1890.
3) A. Oberbeck, Wied. Ann. 42. p. 193. 1891.

Oberbeck nicht näher berührt worden; es scheint, daß er sich der Ansicht, die Niederschlagsmembranen seien Isolatoren, hinneigt. Wir sind über die Vorgänge bei der Electrolyse durch Niederschlagsmembranen, besonders was die quantitative Seite des Phänomens betrifft, so mangelhaft orientirt, daß die Frage nach Art und Weise der Stromleitung durch Niederschlagsmembranen nicht ohne neue Versuche zu entscheiden ist.

Sind die sogenannten semipermeabeln Membranen wirklich undurchlässig für die Membranogen-Jonen, so bleibt für diese Membranen nur die Wahl zwischen electrolytischer oder metallischer Leitung, sind dieselben aber ausnahmlos für, wenn auch nur geringe, Mengen anderer Stoffe und besonders für ihre Membranogene permeabel, so könnte man ihre gute Leitfähigkeit auch der Wechselwirkung der Jonen in den Membranporen, wie bei den permeabeln Membranen, erklären. Ich werde im Folgenden auf diese Hauptfrage, giebt es Niederschlagsmembranen, die für die Jonen ihrer Membranogene absolut undurchlässig sind? ein wenig näher eingehn, die Gesamtheit aller meiner diesen Punkt betreffenden Beobachtungen mir auf ein anderes Mal versparend. In vielen Fällen kann es keinem Zweifel unterliegen, daß die vorliegende Niederschlagsmembran für die Jonen ihrer Membranogene permeabel ist. Beispiele für diesen Fall sind außerordentlich zahlreich.

Lösungen von Alkalien, Carbonaten, Silicaten, Phosphaten und Sulfiden geben mit Salzen schwerer Metalle Membranen, die zuerst, gleich nach der Aufeinanderschichtung der Lösungen, dünn sind, sich aber bald augenscheinlich verdicken, so daß kein Zweifel darüber bleibt, daß sich in den Poren der Membran die Fällung fortdauernd vollzieht. Ich habe früher die Bilder, die solche Systeme, betrachtet durch den Schlierenapparat geben, beschrieben[1]). Diese Bilder sind nur im Sinne einer sich beständig vollziehenden Reaction zwischen den Membranogenen zu deuten. Die von Ostwald[2]) als semipermeabel angesprochene Membran aus Kupfersulfid, gebildet beim Aufeinanderschichten der Lösungen von Natriumsulfid und Kupfersulfat, verdickt sich ungemein rasch, ist also sicher nicht semipermeabel. Auch geronnenes Eiweiß, von dem Ostwald annimmt, daß es mit Kupfersulfatlösung eine für Kupferionen undurchdringliche Membran bildet, wird von Kupfersulfatlösung schnell und vollständig imprägnirt. Von diesen Membranen unter-

1) G. Tammann, Wied. Ann. 34. p. 299. 1888.

2) W. Ostwald l. c.

scheiden sich die Ferrocyankupfer, Ferrocyanzink und Ferrocyanquecksilbermembran schon ihrem Aussehn nach; dieselben sind außerordentlich dünn und dehnbar, sie verdicken sich während der ersten 5—10 Minuten lang nicht sichtbar. In concentrirten Lösungen ihrer Membranogene ist die dünne Ferrocyankupfermembran außerordentlich unbeständig, in verdünnten, 0.1 normal und verdünnteren, hält sie sich zuweilen monatelang. Die Verdickung der Ferrocyankupfermembran unterscheidet sich wesentlich von der aller anderen Niederschlagsmembranen; während die anderen sich gleichmäßig auf ihrer ganzen Fläche und etwa proportional der Zeit verdicken, bilden sich auf der Ferrocyankupfermembran warzenartige Auswüchse. Die Fällung geht von einzelnen Punkten der Membran aus, um dann, wenn sie einmal eingetreten ist, bald das ganze Probirglas zu füllen. Die Ferrocyankupfermembran ist also unter Umständen für die Jonen ihrer Membranogene impermeabel, befindet sich aber in einem labilen Zustande, der durch unbekannte Umstände leicht gestört wird. Die Ferrocyankupfermembran ist in der That für eine ganze Reihe von Salzen impermeabel; man kann von vielen Stoffen auch mit sehr empfindlichen analytischen Hülfsmitteln nicht Spuren derselben nachweisen, auch nachdem diesen mehrere Stunden lang Gelegenheit geboten war, die Membran zu durchdringen. Die Permeabilität der verschiedenen Niederschlagsmembranen für fremde Stoffe gedenke ich in einer anderen Mittheilung ausführlicher zu behandeln, und die Ansichten von Ostwald über diesen Punkt näher zu prüfen.

Drei verschiedene Arten des Electricitätstransportes wären durch eine Niederschlagsmembran denkbar. Erstens die Jonen der Lösung wandern durch die Poren der Membran. Auch für die Ferrocyankupfermembran, wäre nach dem beschriebenen Verhalten derselben dieser Fall nicht sofort von der Hand zu weisen. Zweitens die Niederschlagsmembranen leiten metallisch; und drittens dieselben leiten electrolytisch.

Untersuchen wir zur Entscheidung der Frage die Electrolyse eines Systems aus Kupfersulfatlösung und darüber geschichteter Ferrocyankaliumlösung, in die Kupferlösung tauche die Anode und in die Ferrocyankaliumlösung die Kathode:

Kathode | 4 K; 4 Cy, Fe Cy_2 | 2 Cu; 4 Cy, Fe Cy_2 | 2 Cu SO_4 | Anode.

Bei der Stromleitung gehn 2 Kupfer-Jonen an die Membran, ihnen entgegen kommt das Ferrocyan-Jon. Wenn die Membran metallisch leitet, so müssen sich auf ihr einerseits 2 Atome me-

tallisches Kupfer und andererseits ein Ferrocyan abscheiden; letzteres geht unter Entwicklung von 2 respective 1.5 Sauerstoff-Atomen in Ferrocyan oder Ferrocyanwasserstoffsäure über. Das Kalium wandert zur Kathode und das Jon SO_4 zur Anode. Bei oberflächlicher Betrachtung scheint die Electrolyse, wenn an der Membran die Stromdichte groß ist, in der That so zu verlaufen.

In einem Probirglase (2 cm Durchmesser) wurde über eine Kupfersulfatlösung (1 Gramm-Molekel im Liter) eine Ferrocyankaliumlösung (0.37 G.-M.) geschichtet und mittelst, 1.5 cm von einander abstehender, Kupferelectroden der Strom von 4 Leclanchéelementen durchgeschickt. Es verdickte sich die Ferrocyankupfermembran stark und zwar sehr viel schneller, als wenn kein Strom durchgeschickt wurde. Unter der starken Fällung von Ferrocyankupfer fand sich eine cohärente Schicht von Kupfer, die nach der Anode hin blank und metallisch, nach der Kathode hin theils in Kupferoxyd verwandelt war. Vom Kupferoxyd aus entwickelte sich reichlich Sauerstoff, die Ferrocyankaliumlösung enthielt Ferricyankalium und reagirte alkalisch. An der Anode wurde Kupfer gelöst und an der Kathode Wasserstoff entwickelt.

Es scheidet sich metallisches Kupfer auf der Membran aus, gleichzeitig bildet sich aber viel Ferrocyankupfer. Leitet die Membran metallisch so ist nicht einzusehn, wozu sich noch eine reichliche Menge Ferrocyankupfer bildet. Wäre es nicht möglich, daß die Kupferabscheidung nur ein secundäres Phänomen ist?

Schaltet man in den Stromkreis der soeben benutzten Zersetzungszelle ein Silbervoltameter, so wurden in diesem während 24 Stunden 2.266 gr Silber abgeschieden, auf und in der Membran wurden nur 0.314 gr metallischen Kupfers gefunden, während 0.664 gr Kupfer der ausgeschiedenen Silbermenge entsprechen würden. Um das Kupfer vom Ferrocyankupfer zu trennen wurde das Gemenge mit Natronlauge, verdünnter Weinsäure und stark alkalischer Lösung von weinsaurem Natron behandelt. Schwarzes Kupferoxyd hat sich in diesem Falle bei geringerer Stromdichte gar nicht gebildet. Ein zweiter Versuch wurde in der Anordnung von Ostwald ausgeführt; ein mit Pergamentpapier überbundenes mit Ferrocyankaliumlösung gefülltes U-förmiges Rohr (1.5 cm Durchmesser) tauchte in zwei Gefäße mit Kupfersulfatlösung, in 24 Stunden hatten sich bei geringerer Stromdichte als im vorigen Versuch an der Kathode 0.211 gr Kupfer abgeschieden auf der Anoden-Pergamentmembran wurden nur 6 mg metallischen Kupfers gefunden.

Sorgt man für noch geringere Stromdichten an der Ferrocyankupfermembran, so ist auf dieser, auch nachdem 4 grm Silber im Silbervoltameter abgeschieden sind, keine Spur von metallischem Kupfer zu entdecken. Füllt man eine Platinschale, 9 cm Durchmesser, mit Kupfersulfat-Lösung (0.1 Gr.-M.) und legt auf diese Lösung ein die Schale allseitig überragendes Stück Pergamentpapier, auf welches man Ferrocyankaliumlösung (0.04 Gr.-M.) bringt, so scheiden 2 Lelauché - Elemente in 3 Tagen keine Spur von metallischem Kupfer auf dem Pergamentpapier ab und in der Ferrocyankaliumlösung ist kein Ferricyankalium nachzuweisen. In der Ferrocyankaliumlösung sind nur Spuren von SO_4-Jonen und in der Kupfersulfatlösung nur Spuren von Kaliumionen enthalten.

Die Metallabscheidung auf der Niederschlagsmembran hängt wohl von der Fähigkeit des Stoffes an der Kathode, unter Abgabe von negativer Electricität in ein anderes Jon überzugehn, ab. Folgende Systeme: Kathode | Schwefelnatrium | Schwefelkupfer | Kupfersulfat | Anode und Kathode | Ferrocyankalium | Ferrocyanzink | Zinksulfat | Anode gaben auf der Membran Metallabscheidungen, während Systeme: Kathode | Kalilauge | Kupferoxydhydrat | Kupfersulfat | Anode [1]) und Kathode | Kohlensaures Kali | Kupfercarbonat | Kupfersulfat | Anode, keine Metallabscheidung gaben. Die Ausscheidung von Kupfer auf der Ferrocyankupfermembran hat mit der Semipermeabilität der Membran nichts zu thun. Auf der Schwefelkupferausscheidung scheidet sich ja auch Kupfer aus und doch ist die Schwefelkupferausscheidung sowohl für Schwefelnatrium als auch für Kupfersulfat in hohem Grade durchlässig.

Durch Annahme metallischer Leitfähigkeit der Ferrocyankupfermembran wird die Electrolyse unseres Systems schwerlich erklärt. Betrachtet man die Niederschlagsmembran als Isolator und sucht den Electricitätsaustausch in den Poren der Membran, so müßten sich diese bald verstopfen und der Strom müßte sehr bedeutend geschwächt werden, ja nach einiger Zeit nothwendig vollkommen

---

1) Systeme aus Kalilauge und Kupfersulfat leiten nur so lange den Strom, als das ausgeschiedene blaue Kupferoxydhydrat sein Wasser nicht verloren hat; ist eine Schicht der Membran in schwarzes Kupferoxyd übergegangen, so geht durch diese Membran fast gar kein Strom, nur Systeme, deren Lösungen verdünnter als etwa $\frac{1}{4}$ normal sind, kann man längere Zeit electrolysiren. Bei concentrirteren Lösungen wächst der Widerstand so, daß der Strom schnell auf $\frac{1}{500}$ seines Werthes geschwächt wird.

aufhören. Aus den Beobachtungen von Overbeck[1]) ist ersichtlich, daß der Widerstand bei Membranen aus Ferrocyankupfer und Ferrocyanzink sehr erheblich wächst, derselbe wird aber nie so groß, daß der Strom auf mehr als ½ seiner anfänglichen Intensität geschwächt wird; um die Stromschwächung hervorzurufen genügen die Concentrationsänderungen der Lösung um die Membran. Wir werden sehn, daß die Schichten an der Membran sich beständig verdünnen müssen. Außerdem konnte an der Ferrocyankupfermembran Nichts beobachtet werden, was zu Gunsten einer Abscheidung von Ferrocyankupfer in den Poren der Membran sprach. Wäre es nicht wahrscheinlich, daß in diesem Falle die Membran ein besonders festes Gefüge annehmen würde?

Die Ferrocyankupfermembran leite also den Strom electrolytisch. Die Kupferjonen dringen in die Ferrocyankupfermasse der Niederschlagsmembran ein und treiben auf der anderen Seite der Membran Kupferjonen heraus, die sich mit den ihnen begegnenden Ferrocyanjonen zu Ferrocyankupfer vereinigen. Die Kalium- und SO_4-Jonen wandern zu den Electroden und das Resultat ist, daß an der Membran beständig Schichten von reinem Wasser, in welches die Jonen beider Salze hineindiffundiren, gebildet werden.

Schickt man durch unser System den Strom in umgekehrter Richtung, also: Anode | 4 K; 4 Cy, Fe Cy_2 | 2 Cu; 4 Cy, Fe Cy_2 | 2 Cu SO_4 | Kathode, so müßte, wenn die Membran sich wie eine Metallplatte verhielte, auf der zur Anode gewandten Seite der Membran Wasserstoff entwickelt werden und Kalilauge sich bilden, während auf der anderen Seite sich Sauerstoff entwickeln und Schwefelsäure entstehn würde. Nach Ostwald[2]) ist die metallisch leitende Membran aber für Kaliumjonen durchlässig. Warum die Kaliumjonen ihre Electricität nicht der metallisch leitenden Membran abgeben, ist von Ostwald nicht näher erörtert. Dieselben sollen jedenfalls unberaubt ihrer Electricität durch die Poren der Membran in der Kupfersulfatlösung gelangen, in der ihnen die SO_4-Jonen, die die Membran nicht durchdringen können, begegnen. So schwer auch dieser Ansicht beizustimmen ist, so hätte dieselbe doch etwas für sich, wenn in der Kupferlösung die der auf der Kathode abgeschiedenen Kupfermenge aequivalente Kaliummenge gefunden würde. Zwar dringt aus einer Lösung, die Kalium- und SO_4-Jonen enthält, ein geringer Theil derselben

---

1) A. Oberbech l. c.

2) W. Ostwald l. c.

durch die Ferrocyankupfermembran, aber bei unseren Versuchsbedingungen kann es sich, wie ich mich überzeugt habe, nur um wenige Milligramm Kaliumsulfat, die aus der Kupferlösung in die Ferrocyankaliumlösung hinüber diffundiren, handeln. Trotzdem müßte die der Summe der SO_4 Menge (in der Ferrocyankaliumlösung) und der Kaliummenge (in der Kupfersulfatlösung) aequivalente Menge von Kaliumsulfat der an der Kathode abgeschiedenen Kupfermenge entsprechen. Die Analyse ergiebt aber in der Kupfersulfatlösung nur etwa $\frac{1}{4}$ der erwarteten Menge von Kaliumsulfat und in der Ferrocyankaliumlösung ist nicht mehr als $\frac{1}{8}$ derselben vorhanden.

In eine Platinschale (9 cm Durchmesser) wurden 300 cbcm Kupfersulfatlösung (0.1 G.-M.) gebracht, die Lösung mit Pergamentpapier bedeckt und Ferrocyankaliumlösung auf das Papier geschichtet. Es hatten sich nach 24 Stunden auf der Platinschale 0.849 gr Kupfer abgeschieden. In der Kupfersulfatlösung wurden, nach Ausfällung des Kupfers mit Schwefelwasserstoff, 0.671 grm Kaliumsulfat gefunden, während die dem ausgeschiedenen Kupfer aequivalente Kaliumsulfatmenge 2.342 gr betragen würde. Aus der braunschwarz gefärbten Ferrocyankaliumlösung wurde das Jon SO_4 mit Baryumchlorid gefüllt, der ausgewaschene Niederschlag mit Kali und Salpeter geschmolzen und aus der Lösung der Schmelze die Schwefelsäure nochmals aus sauerer Lösung mit Chlorbaryum gefällt. Es wurden so erhalten 0.544 gr Baryumsulfat, entsprechend 0.406 Kaliumsulfat.

Nimmt man auch an, daß die in der Ferrocyankaliumlösung gefundene Menge von SO_4-Jonen mit Kaliumjonen zusammen durch die Membran zurück in die Ferrocyankaliumlösung getreten ist, so könnten im Ganzen doch nur 0.671 gr + 0.406 gr = 1.077 gr Kaliumsulfat in der Kupfersulfatlösung gebildet sein, während nach Ostwald 2.342 gr Kaliumsulfat in der Kupferlösung vorgefunden werden müßten.

Bemerkenswerth ist der Umstand, daß die Ferrocyankupfermembran bei dieser Richtung des Stromes viel dünner ist und bleibt, als wenn unter demselben Umständen kein Strom durch die Membran geht.

Jener und dieser Befund können in einfacher Weise erklärt werden, wenn man der Niederschlagsmembran electrolytisches Leitvermögen zuschreibt. Verfolgen wir den Strom von der Anode aus. Das Ferrocyan scheidet sich an der Anode ab, dieselbe sei aus Platin, und zersetzt das Wasser, indem sich Ferrocyanwasserstoffsäure und Sauerstoff bilden. Dabei treten complicirte Oxydations-

wirkungen ein, die hier nicht weiter interessiren. Die 4 Kaliumjonen wandern von der Anode zur Membran und treten in diese an Stelle zweier Kupferjonen ein, letztere wandern durch die Membran und die Kupfersulfatlösung zur Kathode. Von der Kathode aus wandern die SO_4-Jonen und treten in die Membran an Stelle der Ferrocyanjonen, die durch die Ferrocyankaliumlösung zur Anode wandern. Das Resultat dieses Processes ist eine beständige Auflösung der Ferrocyankupfermembran und Bildung von Kupfersulfat und Ferrocyankalium an der Membran. Natürlich verschwindet die Membran nicht, sondern bildet sich beständig aus den Membranogenen neu, was ja mit ihrer Feinheit unter diesen Versuchsbedingungen übereinstimmt. Bei dieser Neubildung der Membran gelangt ein Theil der Kaliumjonen in die Kupferlösung und ein Theil der SO_4-Jonen in die Ferrocyankaliumlösung. Würden die Kalium und SO_4-Jonen in den Poren der Membran zusammentreffen, so müßten, da beide Jonen gleiche Ueberführungszahlen haben, auf beiden Seiten der Membran aequivalente Mengen von Kalium und SO_4 gefunden werden. Die Summe der jenen aequivalenten Kaliumsulfatmengen müßte der ausgeschiedenen Kupfermenge entsprechen. Ferner ist, wenn der Membran ein Isolator wäre, kein Grund dafür vorhanden, daß die Membran an Substanz verliert.

Von Interesse erschien noch der Fall, in dem sich neben der Membran ein Salz bildet, das die Membran auch nicht in Spuren zu durchdringen vermag. Folgendes System: Anode | Ferrocyanmagnesium | Ferrocyankupfer | Kupfersulfat | Kathode, genügt jener Bedingung. Nach Ostwalds Ansichten wäre bei der Electrolyse dieses Systems eine Abscheidung von Magnesium oder Magnesia auf der Membran zu erwarten. Eine solche fand auch bei größeren Stromdichten nicht statt. Folgender Versuch spricht wie die vorigen für electrolytische Leitung der Membran. Die Versuchsanordnung war die früher beschriebene. Auf der Kathode wurden 1.897 gr metallisches Kupfer abgeschieden, in der Kupfersulfatlösung wurden 0.377 gr Magnesiumsulfat (der Kupfermenge aequivalent wären 3.63 $MgSO_4$) gefunden und aus der Ferrocyanmagnesiumlösung wurden 2.124 gr Baryumsulfat erhalten. Der Kupfermenge aequivalent wären 7.03 gr Baryumsulfat und der in die Kupfersulfatlösung übergetretenen Menge Magnesium wären 0.731 gr Barymsulfat aequivalent. Es sind also bei der bestän-

1) G. Tammann, Zeitschrift f. physikal. Chem. 6. p. 236. 1890.

digen Neubildung der Membran, wenn ein Atom Magnesium in die Kupfersulfatlösung trat, 3 Atome SO_4 in die Ferrocyanmagnesiumlösung getreten. Systeme mit Niederschlagsmembranen entwickeln beim Durchgang des Stromes wohl ausnahmslos einen unipolaren Widerstand.

Wie früher gezeigt besitzen Niederschlagsmembranen, die sich nicht merkbar verdicken, für Wechselströme keinen Widerstand[1]). Anders verhalten sich aber solche Systeme gegen längere Zeit constant wirkende, besonders gegen starke Ströme; bei der Wirkung dieser bildet sich bei einer bestimmten Richtung des Stromes schnell ein starker Widerstand aus. Die oben auseinandergesetzten Verhältnisse bei der Stromleitung unserer Systeme lassen diese Erscheinung vollständig verstehn.

Nach Oberbeck[1]) sind die electromotorischen Kräfte der Polarisationsströme von Systemen mit Niederschlagsmembranen nie größer als ein Volt. Die Stromstärke aber nahm bei Oberbecks Systemen in 5 Minuten auf $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$ ihres Betrages ab. Also wuchs der Widerstand aufs 7 bis 9 fache, da die electromotorische Kraft der Batterie 9 Volt betrug. Wie ich mich mehrfach bei oben beschriebener Versuchsanordnung, Uebereinanderschichtung der Lösungen in einer Röhre mit Electroden, überzeugt habe, entwickelt sich der große Widerstand nur dann, wenn die Jonen, die eine Membran oder nur einen Niederschlag bilden, sich gegen einander, die beiden anderen Jonen sich aber auseinander bewegen. Dadurch entsteht an der Membran oder im Niederschlage eine sehr verdünnte Lösung, in deren Bildung wohl die Hauptursache des großen Widerstandes zu suchen ist. Wendet man den Strom, so wandern die membranbildenden Jonen auseinander, die anderen Jonen aber zur Membran, so daß die Membran oder der Niederschlag jetzt von concentrirteren Schichten umgeben sein wird.

Bei der Electrolyse eines Systems aus Kupfersulfatlösung (1 G.-M.) und Ferrocyankaliumlösung (0.37 G.-M.) mit 4 Leclauché Elementen fiel, wenn die membranbildenden Jonen gegen einander wanderten, die Stromstärke in 2 Minuten auf den 10. Theil ihres anfänglichen Werthes; rückten die membranbildenden Jonen aber auseinander, so änderte sich die Stromstärke nur wenig. Natürlich hängt das Phänomen wesentlich von der Stromdichte an der Membran ab, ist dieselbe gering, so können sich die durch den Strom hervorgerufenen Concentrationsunterschiede sofort wieder durch Diffusion ausgleichen, und der unipolare Widerstand wird

1) A. Oberbeck l. c.

nicht auftreten. Der unipolare Widerstand verschwand bei einer Stromstärke von 10 Milli-Ampère in einem System von Kupfersulfat (0.05 G.-M.) und Ferrocyankaliumlösung (0.02 G.-M.). Für das Auftreten des unipolaren Widerstandes ist es gleichgültig, ob eine permeabele oder semipermeable Membran oder endlich nur ein Niederschlag gebildet wird.

Obige Untersuchung der Electrolyse eines Systems aus Kupfersulfat und Ferrocyankaliumlösung hat gelehrt, daß nur durch Annahme electrolytischer Leitfähigkeit der Membran die beobachteten Erscheinungen genügend erklärt werden. Die electrolytische Zersetzbarkeit der Membran hat im Lichte Hittorf'scher Anschauungen Nichts befremdendes. Sind doch alle Stoffe, die unter den Begriff Salz rubriciren, Electrolyte.

Dorpat im März 1891.

Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der inneren Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Maße.

Von

O. Venske.

Bei den Schwierigkeiten, mit welchen noch heutzutage die Ermittelung genauer Werte der Wärmeleitungsfähigkeit in absolutem Maße verbunden ist, dürfte ein kurzer Bericht über einen neuen Apparat nicht ohne Interesse sein, welcher auf Veranlassung von Herrn Prof. W. Voigt construiert ist und die Bestimmung dieser Constante für schlecht leitende Substanzen in einfacher Weise ermöglicht.

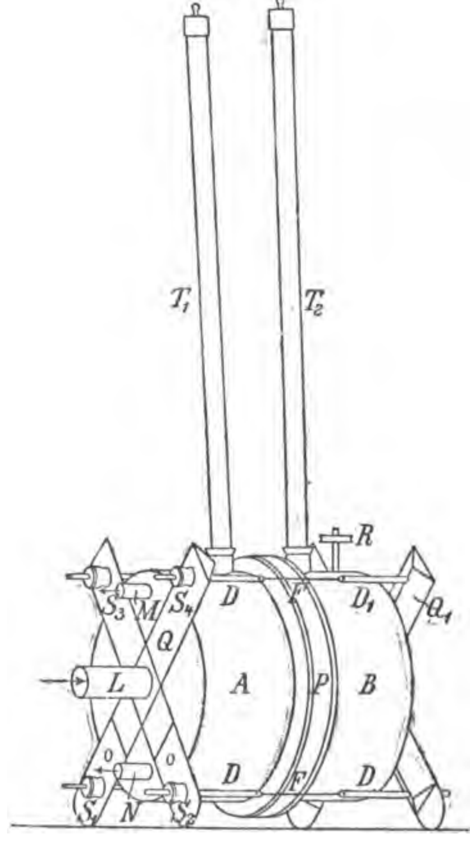
Die Messungsmethode des Herrn Prof. W. Voigt gründet sich auf die Bestimmung der Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit aus einer Wassermasse von der Temperatur ϑ_2 in eine andere von ihr durch eine planparallele Wand der zu untersuchenden Substanz getrennte Wassermasse von der Temperatur ϑ_1 übergeht. Führt man folgende Bezeichnung ein:

calorimetrische Wärmeleitungsfähigkeit der Wand k,
äußere Wärmeleitungsfähigkeit der Wand gegen die
Wassermasse von der Temperatur ϑ_1 bezw. ϑ_2 h_1 bez. h_2,
Dicke der Wand δ,

Stärke der Wärmeströmung berechnet für den Querschnitt 1 Q, so besteht, falls ϑ_1 und ϑ_2 sich so langsam mit der Zeit ändern, daß der Zustand in der Platte sich nur sehr wenig von dem stationären unterscheidet, der bei constanten Temperaturen der beiden Bäder eintreten würde, bekanntlich die Gleichung

$$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{\delta}{k} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}.$$

Bestimmt man experimentell die Werte, welche die linke Seite dieser Gleichung für verschiedene Wanddicken annimmt, so gewinnt man folglich Gleichungen, aus denen sich die Unbekannten k und $1/h_1 + 1/h_2$ berechnen lassen. Diese Bestimmungen können bequem und genau mit dem oben erwähnten Apparate ausgeführt werden.



A und B sind zwei mit ihren Mündungen einander zugekehrte cylinderförmige Gefäße, welche je eine Höhe von 5 cm und einen

Durchmesser von 10 cm haben. Dieselben befinden sich zwischen zwei Holzkreuzen Q, Q_1, welche durch die Drähte D, D_1 und die Seidenschnüre F mit einander verbunden sind. Die äußeren Enden der Drahtstücke D sind mit Schraubengewinden und Muttern S_1, S_2, S_3, S_4 ausgestattet. Durch Anziehen der letzteren werden die mit Gummi gefütterten Gefäßränder wasserdicht gegen eine dazwischengeschaltete kreisförmige Platte P aus der zu untersuchenden Substanz gepreßt. A und B sind mit zwei Stutzen versehen, welche dem Rande möglichst nahe liegen und zur Aufnahme zweier in zehntel Grade geteilter Thermometer, T_1 bezw. T_2, dienen. In dem rechten Gefäß befindet sich ein Rührer in Form einer Turbine, die durch das Rädchen R von außen bewegt wird; in die Wand des linken sind drei Röhren L, M, N eingelötet. Die Röhre L tritt in das Innere des Apparates und trägt an ihrem Ende eine dem Thermometer T_1 möglichst nahe stehende kreisförmige Scheibe von circa 8 cm Durchmesser, welche dazu bestimmt ist, einen eintretenden Flüssigkeitsstrahl dicht an der Platte P hinzuleiten.

Die Benutzungsweise des Apparates ist so einfach, daß wenige Angaben zur Klarlegung genügen werden. Durch einen Vorversuch hat man die äußere Wärmeleitungsfähigkeit der Gefäßwände gegen Luft zu bestimmen. Man verfährt hierbei so, daß man die Platte P entfernt, die unmittelbar an einander gepreßten Gefäße A und B mit warmem Wasser füllt und, während man den Rührer arbeiten läßt, die Abkühlung bestimmt. Da die beiden Hälften des Apparates sehr nahe gleiche Oberflächen besitzen, so ist die bei dem Vorversuch gefundene Wärmeabgabe an die Umgebung das Doppelte von derjenigen, die bei der Berechnung der eigentlichen Messungen in Betracht kommt. Nachdem dies geschehen, können die definitiven Beobachtungen angestellt werden. Man schaltet zwischen A und B eine Platte P der zu untersuchenden Substanz und läßt in das linke Gefäß Leitungswasser durch L ein, durch M, N ausströmen. Hat das Thermometer T_1 einen constanten Stand angenommen, so füllt man B mit warmem Wasser, setzt die Rührvorrichtung in Bewegung und bestimmt, während die Abkühlung vor sich geht, in geeigneten Zeitabschnitten die Lufttemperatur, die Temperatur ϑ_1 des Kühlwassers und die Temperatur ϑ_2 des warmen Wassers.

Von Herrn Prof. W. Voigt aufgefordert habe ich untersucht, wie man im Einzelnen verfahren muß, wenn man die Beobachtungen nach der oben aufgestellten einfachen Formel berechnen will. Es hat sich mir Folgendes ergeben. Die Grundvoraussetzung der

bezeichneten Formel, daß in der Platte P die Isothermen zur Begrenzung parallele Ebenen sind, ist dann und nur dann erfüllt, wenn der Plattenrand durch Ueberkleben mit Stanniol gegen Wärmeverlust durch Strahlung geschützt wird, und die Stärke des Kühlwasserstromes sowie die des Rührens eine beträchtliche ist. Ferner fand ich, daß die Größen h_1 und h_2 nicht nur von der Temperatur, sondern auch von den beiden letztgenannten Factoren abhängen. Auf Grund dieser Erfahrungen achtete ich bei den Beobachtungen, welche ich mit einander combinierte, darauf, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Kühlwassers, sowie die Umdrehungsgeschwindigkeit des Rührers stets gleich stark war, und zwar wurde bei denselben ein Querschnitt der Röhre L in einer Secunde von 47 cm^3 Wasser durchflossen, während der Rührer in derselben Zeit 40 Touren machte. Um mich von der Veränderlichkeit der äußeren Wärmeleitungsfähigkeiten h_1, h_2 mit der Temperatur zu befreien, berechnete ich aus meinen Messungen, welche ich an sieben verschieden dicken Spiegelglasplatten anstellte, die Größe

$$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

für dieselbe bestimmte Stärke des Wärmestromes Q, nämlich für

$$Q = 0{,}0654 \left[\frac{\text{gr. Tem.}}{\text{sec. cm.}^2}\right].$$

Die Resultate, zu welchen ich gelangte, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

δ [cm.]	$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1)\left[\frac{\text{sec. cm.}^2}{\text{gr.}}\right]$ beobachtet	berechnet
0,271	155	155
0,287	163	163
0,368	196	194
0,548	269	268
0,647	306	308
0,972	439	439
1,170	521	520.

Aus den Werten der zweiten Columne findet man bei Benutzung der Formel

$$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{\delta}{k} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$$

für die innere Wärmeleitungsfähigkeit k und die Summe der beiden reciproken äußeren Wärmeleitungsfähigkeiten $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}$ die Werte

$$k = 0{,}00247 \left[\frac{\text{gr.}}{\text{sec. cm.}}\right],$$

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2} = 46{,}0 \left[\frac{\text{sec. cm.}^2}{\text{gr.}}\right].$$

Mit diesen beiden Werten ist die dritte Columne berechnet.

Wie aus der guten Uebereinstimmung der Werte der 2ten und 3ten Columne hervorgeht, kann man bei Anwendung eines geeigneten Verfahrens die angestellten Beobachtungen nach der einfachen Formel für linearen Wärmefluß in der Platte berechnen. Mit Hülfe des beschriebenen Apparates läßt sich also die absolute Wärmeleitungsfähigkeit wenigstens schlecht leitender Körper in einfacher Weise ermitteln.

Universität.

Petsche-Stiftung.

Als Aufgabe zur Erlangung des Preises der Petschestiftung, soweit er diesmal von der Theologischen Fakultät zu verleihen war, (167 M.), hat die Fakultät die folgende gestellt: „Welche Stellung zur Lehre der Kirche hat Priscillian nach seinen neuerdings veröffentlichten Schriften eingenommen?“ — Es ist eine Bearbeitung derselben mit dem Motto: „Ich habs gewagt“ rechtzeitig eingegangen. Der Verfasser dieser Abhandlung hat das Thema nicht ganz dem Sinne desselben entsprechend aufgefaßt und es bei der Untersuchung im einzelnen an der rechten wissenschaftlichen Schärfe in der Bestimmung der zu untersuchenden Begriffe fehlen lassen, auch ist die Darstellungsweise in sprachlicher Hinsicht nicht ohne Mängel. Der Arbeit konnte darum der Preis nicht zuerkannt werden.

Da der Verfasser indessen auf dem von ihm eingeschlagenen Wege das Verhältnis Priscillians zur katholischen Kirche wenigstens in der Hauptsache richtig dargestellt hat, so war von der Fakultät beschlossen, ihm einen Teil des ausgesetzten Preises (120 M.) zu bewilligen, wenn er sich bei dem Dekane meldete. Diese Meldung ist inzwischen erfolgt, und hat ergeben, daß der

Cand. theol. und Stud. hist. H. Rüther aus Nordleda die Arbeit verfaßt hat.

Goettingen, den 1. März 1891.

Der Dekan der Theologischen Fakultät
Dr. K. Knoke.

Für das Jahr 1894 stellt die philosophische Fakultät folgende neue

Beneke'sche philosophische Preisaufgabe:

Der bedeutenden Rolle, die die Sprache der kaiserlichen Kanzlei in der Entstehungsgeschichte der neuhochdeutschen Schriftsprache gespielt hat, entspricht es nicht, daß uns eine zusammenhängende und umfassende philologische Untersuchung jener Sprache bisher noch völlig fehlt. Wir wünschen eine Geschichte der deutschen kaiserlichen Kanzleisprache von ihren Anfängen bis auf Maximilian, die in angemessenen, zeitlich begrenzten Abschnitten das Constante und das Schwankende in den Laut- und Flexionsverhältnissen, sowie möglichst auch in Wortbildung und Wortwahl zur Anschauung bringt und mundartlich erläutert; eine Beschränkung auf das Lautliche würde nicht genügen; Benutzung ungedruckten Materials wird nicht verlangt. Aeußere Verhältnisse, wie der wechselnde Sitz der Kanzlei, Heimat und litterarische Beziehungen der Kaiser und Kanzleivorstände, die Herkunft der Schreiber, der Einfluß wichtiger Reichstage, die etwaige Rücksicht auf die Mundart der Adressaten und ähnliches sind eingehend zu berücksichtigen und darzulegen. Auch das Verhältnis der kaiserlichen Kanzleisprache zu den Anfängen einer oberdeutschen *Κοινή* im 14. und 15. Jahrhundert darf nicht außer Acht bleiben: namentlich wird zu untersuchen sein, ob die Sprache der Nürnberger Kanzlei auf die der kaiserlichen eingewirkt habe, oder umgekehrt.

Erwünscht, wenn auch nicht unerläßlich, ist es endlich, daß an der Sprache der Urkunden und der ältesten Drucke einiger außerbairischen literarischen Centren Süddeutschlands die Bedeutung der kaiserlichen Kanzlei für die Milderung der mundartlichen Gegensätze im 15ten Jahrhundert geprüft werde: neben Nürnberg käme etwa Augsburg, für das Vorarbeiten vorliegen, und Straßburg in Betracht.

Bewerbungsschriften sind in deutscher Sprache abzufassen und bis zum 31. August 1893 mit einem Spruche auf dem Titelblatte an uns einzusenden zusammen mit einem versiegelten Briefe, welcher auf der Außenseite den Spruch der Abhandlung, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben sein.

Auf dem Titelblatte der Arbeit muß ferner die Adresse bezeichnet sein, an welches die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird.

Der erste Preis beträgt 1700 Mk., der zweite 680 Mk.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1894, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1891 und 31. August 1892 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen im Jahrgang 1889 Seite 345 und 1890 Seite 151.

Göttingen d. 1. April 1890.

Die philosophische Fakultät.

Der Dekan

A. von Koenen.

Preisaufgaben der **Wedekindschen Preisstiftung** für Deutsche Geschichte.

Wiederholt aus Nr. 4 der Nachrichten vom Jahr 1887 S. 69 ff.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den fünften Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1886 bis zum 14. März 1896, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungs-

zeitraum gestellte Aufgabe: er verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem Mainzer **Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen.

Nach den älteren Vorarbeiten von Dümgé, Mone, Aschbach, Droysen hat neuerdings v. Hagen in der Einleitung zu seiner Uebersetzung (Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 79. Leipzig 1886) über das Verhältniß von dreien der wichtigsten Handschriften (Gotha, Cheltenham, Hannover) zu einander gehandelt und danach zwei von dem Verfasser selbst herrührende Redactionen unterschieden, auch die Annahme abgewiesen, daß die Handschrift zu Cheltenham ein Original sei. Für den Bearbeiter ist die Heranziehung der anderen bekannten und von v. Hagen S. VII, Anm. 2 aufgeführten Hdsch. schon deßhalb erforderlich, um die Richtigkeit der Aufstellung v. Hagen's zu prüfen und festzustellen, ob etwa noch mehr als zwei Ausgaben des Werkes vorliegen.

Von den drei im Archiv III, 429 verzeichneten Vaticanischen Hdsch. wird der Verwaltungsrath demnächst Beschreibungen anfertigen lassen, welche ihre Classificirung ermöglichen. Diese Beschreibungen sollen dem Bearbeiter durch Vermittelung der Verwaltung der Kgl. Universitätsbibliothek zur Verfügung stehen. Von der Heranziehung dieser drei Hdsch. zur Textconstitution glaubt der Verwaltungsrath im übrigen den Bearbeiter befreien zu sollen[1]).

Bei der Bearbeitung des Textes wird es vor allem darauf ankommen, daß die von dem Verfasser herrührenden Unterschiede der verschiedenen Redactionen klar und übersichtlich zur Erscheinung kommen, davon auch äußerlich dasjenige geschieden und gekennzeichnet werde, was etwa fremder Ueberarbeitung seinen Ursprung verdankt. Die originalen Rubriken und Capitelüberschriften sind in die Ausgabe aufzunehmen.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung. Sind von denselben abweichende Texte oder die Originale bekannt, so ist darauf in den Anmerkungen hinzuweisen, geeigneten Falls der

---

1) Vgl. den Bericht über diese Hss. in den Nachrichten 1888 S. 11 ff.

abweichende Text zum Abdruck in der Anmerkung zu bringen. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Einleitung soll sowohl die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klarlegen, als auch eine eingehende Erörterung über die Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und anderen namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung geben.

Die sprachliche Behandlung des Textes hat sich, falls nicht etwa eine Originalhandschrift auftauchen sollte, nach den von Weizsäcker im I. Bande der Reichstagsakten für die Vereinfachung der Schreibung spätmittelalterlicher deutscher Texte aufgestellten Grundsätzen zu richten.

Der Ausgabe ist ein Wortverzeichniß, entsprechend demjenigen des 1. Bandes der Mainzer Chroniken (Städtechroniken Bd. XVII), sowie ein ungetrenntes Verzeichniß der Personen- und Ortsnamen beizufügen.

Von der Cheltenhamer Handschrift befindet sich eine genaue Abschrift auf der Kgl. Universitätsbibliothek, welche bereitwilligst von der Bibliotheksverwaltung zur Benutzung ausgeliehen wird.

Für den zweiten Preis

schreibt der Verwaltungsrath

eine Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts

aus.

Nach einem einleitenden Rückblicke auf die karolingische Zeit ist der Schwerpunkt der Arbeit in die Verfassungsgeschichte des bezeichneten Zeitraums zu legen, da die politische Geschichte Schwabens zur Genüge behandelt worden ist. Das schwäbische Herzogthum ist in seiner Entwicklung bis zur Auflösung zu verfolgen, sein Verhältnis zu der königlichen Gewalt einerseits, wie zu den Bisthümern, Grafschaften, Herrschaften und Städten andererseits darzulegen. Nach der gründlichen und erschöpfenden Untersuchung des Einzelnen erwartet der Verwaltungsrath eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung. Neben den Nachrichten der Geschichtschreiber hat der Bearbeiter

dem reichen Urkundenmaterial eingehendste Aufmerksamkeit zu widmen und es nach allen Richtungen für den bezeichneten Zweck auszubeuten. Als Beilage der Arbeit wünscht der Verwaltungsrath Regesten der Urkunden, an welchen die Herzöge von Schwaben in irgend einer Eigenschaft betheiligt sind oder in welchen sie Erwähnung finden.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. **Ueber die zwei ersten Preise.** Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. **Ueber den dritten Preis.** Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größten (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des neunten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vor-

handen sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. **Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller.** Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohlthun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres, vor dem 14. März 1896, mit dem das zehnte Jahr beginnt, dem Direktor zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung.** Die Mitglieder

der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. **Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingischen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Direktor von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder, wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Direktor.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich,

so wird sie den Verfasser oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll alsdann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. **Bemerkung auf dem Titel derselben.** Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1887.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

John Hopkins University:
a. American Journal of mathematics. Vol. XII. No. 3. 4. Baltimore 1890.
b. Studies in historical and political science. Eighth Series 1/2. 3. 4. Ebd. 1890.
Transactions of the Wagner Free Institute of science of Philadelphia. Vol. III. August 1890. Philadelphia.
The Charlemagne Tower Collection of American colonial laws. Ebd. 1890.
Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Part 1. Jan. —March 1890. Philadelphia 1890.
Proceedings of the American philosophical Society. Vol. XXVII. No. 131. Vol. XXVIII. No. 132. 133. Ebd. 1889. 90.
26th annual report of the Alumni Association ... for the year 1889—90. Ebd. 1890.
Proceedings of the American Academy of arts and sciences. New series. Vol. XVI. (Whole series vol. XXIV). From May 1888 to May 1889. Boston 1889.
Publications of the Washburn Observatory. Vol. VI. Part 1/2. Madison. Wis. 1890.
Annales de la Oficina meteorológica Argentina. Tomo VII. Buenos Aires 1889.
Annales de la Sociedad científica Argentina. Tomo XXX. 1890. Entr. 1, 2 u. Suppl., 3. Nebst: Indice general de las volúmenes I á XXIX. 1876—89. Ebd. 1890.
Actas de la Academia nacional de ciencias de la República Argentina en Cordoba. Tomo VI mit Atlas. Ebd. 1889.

Mittheilungen des Deutschen wissenschaftl. Vereins in Mexico. 1. Bd. 2. Heft. Mexico 1890.
Verhandlungen des Deutschen wissenschaftl. Vereins zu Santiago. 2. Bd. 2. Hft. Santiago 1890.
Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. 44. Heft. (Bd. 5 Seite 149—189.) Yokohama (u. Berlin) (1890).
Acta historica res gestas Poloniae illustrantia ab anno 1507 usque ad annum 1795. Tom. XII. Cracoviae 1890.
Akademya umiejętności w Krakowie.
Sprawozdanie komisyi fizyjograficznej. Tom. 22—24. Kraków 1888. 89.
Pamiętnik a. Wydziały: Filologiczny i historyczno-filozoficzny. Tom. VII. Ebd. 1889.
b. Wydział Matematyczno-przyrodniczy. Tom. XVI. XVII. Ebd. 1889. 90.
Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Akademii umiejętności.
a. Wydziału historyczno-filozoficznego. Tom. 22—24. Ebd. 1888. 89.
b. — matematyczno-przyrodniczego. Tom. 19. 20. Ebd. 1889. 90.
c. — filologicznego. Tom. 13. Ebd. 1889.
Rocznik zarządu Akademii umiejętności w Krakowie. Rok 1888. Ebd. 1889.
Starodawne prawa Polskiego pomniki. Tom. IX. X. Część I. Ebd. 1888. 89.
Scriptores rerum Polonicarum. Tom. XIII. XIV. Ebd. 1889.
Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce. Tom. VI. Ebd. 1890.
Zbiór wiadomości do antropologii Krakowej. Tom. XIII. Ebd. 1889.
Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. Tom. IV. Zeszyt 1. 2. 3. Ebd. 1889.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 1. 2 nebst Karten. Ebd. 1887. 88.
Biblijoteka pisarzów Polskich. 8 Hefte. Ebd. 1889. 90.
Magyar tudományos Akademia:
Almanach 1890. Budapest 1890.
Évkönyv. (Jahrbuch). XVII. Köt. 7. Darab. Ebd. 1889.
Értesítő (Sitzungsberichte). (XIII.) 1889, 2—5. 1890. Füz. 1—5 (Jan.-Május). Ebd. 1889. 90.
Emlékbeszédek (Gedenkreden). V. Köt. 9. 10. Szám. VI. Köt. 1.—7. Szám. Ebd. 1889. 90.
Nyelvtudományi Értekezések (Sprachwissenschaftliche Abhandlungen). XIV. Köt. 11. 12. Szám. XV. Köt. 1.—5. Szam. Ebd. 1889. 90.
Sexti Pompei Festi de verborum significatu quae supersunt cum Pauli epitome ed. Aem. Thewrewk. Pars I. Ebd. 1889.
Simonyi Zsigmond: A magyar határozók. (Die Bestimmungsworte im Ungarischen). I, 2. Ebd. 1890.
Nyelvtudományi Közlemények. (Philolog. Mittheilungen). XXI. Köt. 3.—6. Füz. Ebd. 1889. 90.
Kúnos Ignacz: Oszmán-török népköltési gyűjtemény. (Sammlung osmano-türkischer Volksdichtungen). II. Köt. Ebd. 1889.
Abel Jenő: Magyarországi tanulók külföldön. (Studierende aus Ungarn im Auslande). I. Ebd. 1890.
Történettudományi Értekezések. (Historische Abhandlungen). XIV. Köt. 5.—9. Szám. Ebd. 1889. 90.
Társadalmi Értekezések. (Sozialwissenschaftl. Abhandlungen). X. Köt. 3. 5.—10. Szám. Ebd. 1889. 90.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

3. Juni. | № 4. | 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. Mai.

Schwarz legt einen Aufsatz des Herrn Julius Petersen in Kopenhagen vor: „Ueber Normalformen mehrfach zusammenhängender Flächen."

Voigt legte einen Aufsatz des Herrn Dr. O. Venske vor: „Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der inneren Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Köeper in absolutem Maaße".

de Lagarde zeigt schriftlich an

1. für die Nachrichten:
   - a. „Thevenot's caffarre."
   - b. „Ueber das aramäische Evangeliar des Vatican."
   - c. „Neue Ausgabe der διατάξεις τῶν ἀποστόλων und der drei Gestalten der Clementinen."
2. für die Abhandlungen (Band 38): „Septuagintastudien, 5. Stück."

Thevenots caffarre.

Von

Paul de Lagarde.

In meiner Uebersicht 89$_3$ 229—237 habe ich 1890 dargethan, daß כַּפֹּרֶת dem arabischen كفّارة entspricht. Es war gewis ein Beweis, wie wenig sachverständig die Lexikographen des jüdischen Canons und die über die Theologie des alten Testaments schreibenden Leute sind, daß sie diese Gleichung nicht gekannt haben.

ARitschl hob 1870 sein erstes größeres Werk mit dem Satze an

· Die christliche Lehre von der Rechtfertigung und Versöhnung bildet die concrete Mitte des theologischen Systems.

In der Vorrede hatte er versichert, schon als Student darüber klar geworden zu sein, daß er

für seine theologische Bildung vor Allem des Verständnisses der christlichen Idee der Versöhnung bedürfe.

Er hat später

mit der nothwendigen biblisch-theologischen Substruction die dogmatische Darstellung der bezeichneten Lehren

unternommen.

Die ihm gelieferte „Substruction" — trotz meiner Warnung hat er sich mit ihr begnügt — hatte selbst noch eine „Substruction" nöthig: denn כַּפֹּרֶת ist kein Begriff des Mosaismus, sondern, weil Arabern und Juden gemeinsam, ein Begriff des Semitismus, der von der „Offenbarung" umgebildet worden sein kann (ob und wie das geschehen, bleibt zu untersuchen), der aber von vorne herein der „Offenbarung" nicht angehörte.

Dem für meine Arbeiten leider in Betracht kommenden Personale gegenüber ist nöthig, immer aufs Neue zu sagen, daß wie jedes Essen ein Verdauen zur Folge hat, so jede Aneignung eines Wortes eine Deutung dieses Wortes, jede Aneignung einer Anschauung eine Umbildung dieser Anschauung nach sich zieht. Ich verbitte mir die Verleumdung oder aber die Dummheit, welche glauben machen will, daß ich bei irgend einem Worte alter Zeit, wenn noch die neue Zeit es braucht, mit dem Worte ohne Weiteres in historischen Zeiten den ursprünglichen Begriff verbunden glaube.

Drei mal bin ich zu Ostern in Rom gewesen, und habe auf dem Pincio und auf der Salita di S. Onofrio den Iudasbaum blühen sehen. Der Baum heißt bei uns so, weil Iudas sich an ihm erhenkte, und er aus Scham über die Berührung des Verräthers über und über roth wurde. Ich wußte durch ChIosJagemann, daß er auf italiänisch albero di San Giuseppe genannt wird: näheres über diesen Namen zu erfahren begierig, fragte ich oft, aber nicht suggestiv, wie der dort blühende Baum heiße. Rothe Acacie oder Oleander, antworteten die „Gebildeten", denen die Tracht des in Rede stehenden Beschämten nicht anders vorkam als die der rothen Acacie oder des Oleander. Endlich jetzt nannte ihn mir am 26 April 1891 auf dem Gianicolo ein Gärtner Scielsine sine quastume: der Mann buchstabierte auf meine Bitte den Namen, der aus drei Worten bestehe. Da hat Cercis siliquastrum den albero di San Giuseppe verdrängt. Scielsine aus Cercide: κερκίς hat κερκίδος.

Da hat ein neuer fremder Name den alten heimischen Namen verdrängt: die Sache ist dieselbe geblieben. Wir Deutschen (mit Ausnahmen natürlich) erzählen die Sage noch, die den Baum mit Iudas in Beziehung setzt: kein mir in den Weg gelaufener Italiäner kannte auch nur den Namen albero di San Giuseppe, geschweige, daß er die dazu gehörige Sage gekannt hätte.

Am 5 Januar 1891 verlangte in meiner Gegenwart in der Goettinger Universitätsapotheke eine Arbeiterfrau gegen den Husten ihres Knaben Fuchslungensaft und Schneckensaft: sie erhielt Lakrizen und Eibisch.

Da haben also früher unbekannte Arzneien die Namen in alter Zeit geschätzter Arzneimittel zu führen lernen müssen. Wir haben da alte Worte für neue Dinge.

Dies ist als Ergänzung des in meiner Uebersicht ad vocem גָּפְרִית Vorgetragenen, aber auch für die Religionsgeschichte, zu brauchen, in der Aehnliches vorkommt. Vergleiche meine Beiträge zur baktrischen Lexikographie 28, wo nachgewiesen wird, daß ein und dasselbe Wort Regenwasser, Kuhharn, Seifenkraut bedeutet hat. Vergleiche auch was CdeHarlez JAP 1879 1 161 auseinandersetzt.

Ich habe im Register zu meiner Uebersicht 69 aus Thevenot angeführt, daß „caffarre“ eine Uebergangsgebühr bezeichne, und habe das gleichbedeutende gáffar Seetzens für identisch mit Thevenots caffárre erklärt.

Letzteres ist falsch. Herr Professor Albert Socin wies mich unter dem 11 April 1891 auf Dozy unter غفر und auf Berggrens Guide français-arabe unter péage غفر ghåffar hin, womit Burckhardts Reisen in Syrien 553 غفر „Steuer“ zu vergleichen seien. Er hätte noch aus FrCañes anführen können

> peage el tributo que se paga por pasar algun puente ó barca غفر:

wer den ġafar bezahlt, وفى: wer ihn auferlegt, وضع. Entsprechend Cañes unter pontage pontazgo. ECastle 2847 غفر = vectigal, ital. gabello [so]: über gabella die von HvKap-herr in der Zeitschrift für Geschichtswissenschaft 1891$_{88}$ ^{r} citierten Stellen. Dies غفر erwähnt EWLane nicht: es gehört also der Volkssprache an, und ist gerade darum werthvoll: عامة ist mehr als لغة.

Daß غفر existiert, ist mithin sicher. Da das Zeitwort غفر *vergab* bedeutet, ist auch dies غفر für die Theologen von Wichtigkeit. Mir ist lieb, daß die nothwendige Berichtigung einer meiner Aussagen darauf hinweist, daß solche Dinge nur in großem Zusammenhange besprochen werden dürfen.

11*

Thevenot (geboren 7. 6. 1633, † zu Miana, dreißig Stunden vor Tabrîz, 28. 11. 1667) behandelt kaffarre als Femininum: und sprach das Wort natürlich nach Analogie von bizarre. R double (lehrt die Académie française) se prononce comme si elle était simple: die drei Arten Ausnahmen, die diese Regel erleidet, treffen auf kaffarre nicht zu. Thevenot, ein sehr sorgsamer Mann, braucht ein Femininum caffarre wiederholentlich: wer französisch versteht, weiß, daß caffarre den Ton nur auf dem zweiten a gehabt haben kann. Bis auf Weiteres wird also kaffâre als Synonymum von ġafar zu gelten haben: doch werden die Theologen gut thun, vorläufig für sich als Gebühr für das Recht einen Fluß oder eine Brücke zu überschreiten nur ġafar zu verwenden. Was in der Uebersicht 229—237 steht, wird von der Beantwortung der Frage ob kaffârat neben ġafar vorkommt, oder aus ġafar nur verhört ist, nicht berührt. Der Interprète du Roi La Croix Paitis (oder de la Croix) bezeugt von Thevenot (es ist nicht ohne Werth dies hier zu wiederholen) vor dem zweiten Bande des Voyage de Levant

> Ces trois langues [Turquesque, Arabesque et Persienne] qu'il possedoit si bien, ... l'avoient rendu si profond dans toute cette erudition Orientale ....
>
> On ne doit pas se formaliser si l'on trouve quelque diversité de prononciation és mots Orientaux dans ce Livre, principalement lors qu'il est question de Voyelles ou des Consones Kha, hha, Kef et quelques autres: La différence des Païs fait qu'elles sont diversement prononcées; en des lieux l'on prononce Naméh, Bender et Bazerghian, et en d'autres Namah, Bendar, Bazerghion: les uns disent Kher et les autres Hher, les uns Gomron, les autres Komoron, et il en est ainsi de beaucoup d'autres; mais les lettres figuratives se rencontrent toûjours aux uns et aux autres mots.

Was doch wohl beweist, daß Thevenot auf den Klang der Worte aufmerkte.

Man wird übrigens nicht vergessen dürfen, daß Numeri 15_{30} eine Versöhnung für die בְּיָד רָמָה begangenen Sünden nicht kennt. Es muß allerdings erst untersucht werden, ob Leviticus die Sache ebenso ansieht wie Numeri, und ob die Gesammtanschauung, die Israeliten und Semiten von der Schuld hatten, das Numeri 15_{30} Ausgesprochene für ein Princip zu halten gestattet. Bis auf Weiteres wird aber behauptet werden dürfen, daß das Opfer sich nur auf בִּשְׁגָגָה begangene Verfehlungen beziehen durfte. Dann ist aber das Opfer nichts wesentlich Anderes als was das Recht Europas Recognitionsgebühr nennt. Wer zum Beispiel einen Wasserlauf

aus seinem Gebiete unter einer öffentlichen Straße durchleitet, zahlt eine solche Gebühr, meist geringen Betrages, nur zu dem Erweise, daß er durch seine Leitung nicht ein Recht ausübt, sondern eine widerrufbare Vergünstigung genießt: es ist so eine Form gefunden, unter der als Ein Recht verstattet wird was Das Recht verbietet. Empörung gegen den König Gott ist unverzeihlich: wer aus Irrrthum sündigt oder aus Leichtsinn, hat nur das dominium als dominium anzuerkennen, um straflos auszugehn. סְלַח־נָא = indulge: das Opfer des alten Testaments ist in der Kirche durch die indulgentiae vertreten: es wird nicht Sünde gesühnt, sondern die fällige Strafe der Sünde in Folge einer Satisfactio erlassen. Gesühnt wird durch das Anerkenntnis gefehlt zu haben nichts: Iohannes α 1₉. Das Opfer als כַּפֹּרֶת erkennt die Thatsache an, daß man durch die mittelst des Opfers zuzudeckende Handlung nicht hat die Rechtsordnung stören wollen: weiter thut es nichts. Die semitische Anschauung von der kaffârat = כַּפֹּרֶת faßt die sühnbare Sünde als etwas nicht Erhebliches, also nicht eigentlich als Sünde, und kennt auch nicht sühnbare Sünden. Daß die Kirche die Sache nicht ebenso ansieht, daß kein das Leben kennender Mensch sie so ansehen darf, liegt auf der Hand. Dogmatiker werden daher gut thun, ihre Urtheilsfähigkeit nicht entweder dadurch in übles Licht zu rücken, daß sie die christliche Anschauung für identisch mit der des alten Testaments und der Semiten halten, oder aber dadurch, daß sie objektive Unwerthe wie die Sünde durch eines, nur in Folge eines Werthurtheils geltenden, Menschen Tod beseitigen zu können meinen: es handelt sich nicht um „Zudecken“, sondern um Vernichten der Schuld, vor Allem aber um Vernichtung der Sünde, aus der die Schuld immer von Neuem emporwächst. Deutsche Schriften 58. Mit dem von RALipsius in dem theologischen Jahresberichte für 1883 auf Seite 272 ff. über Ritschls Theologie Vorgetragenen bin ich einverstanden.

So leicht wird jetzt niemand der mitzureden befugt ist, semitisches Wesen aus indoceltischen Texten und Sprachen erklären: Creuzer und Bähr, die in meiner Studentenzeit noch Auctoritäten waren, sind beseitigt. Aber was der Linguist und der Historiker nicht darf, darf mit Vorsicht der Psychologe. So setze ich aus der Zeitschrift für deutsches Alterthum und deutsche Litteratur **35** 262 her was mir während mein Aufsatz im Drucke ist, durch Edward Schröders Güte zugeht:

> Im gotischen ist gilstr zahlung abgabe, während die altertümlichere bedeutung opfer bei ahd. gelstar erhalten ist,

Das opfer wird als eine abgabe aufgefaßt, oder richtiger: es ist die älteste form der abgabe.

In den deutschen Schriften 379 385 unterscheide ich zwischen Steuern und Gebühren: Ulfilas Rom. 13_6 gilstr φόρος, Lucas 2_2 gilstrameleins ἀπογραφή. Jedermann verständlich gild φόρος Lucas 20_{22}, kaisaragild κῆνσος [ἐπικεφάλαιον?] Marcus 12_{14}. Vergelten, entgelten.

Ignoscere heißt „nicht kennen": die romanischen Sprachen haben ignoscere durch pardonner und dessen Schwestern, also durch eine romanische Uebertragung des deutschen vergeben ersetzt, offenbar doch, weil sie eine andere Grundanschauung über die zu bezeichnende Sache hegten als die Römer: 1863 zu Proverb. 22_{21} (Seite 73).

Das aramäische Evangeliar des Vatican.

Das aramäische Evangeliar des Vatican ist durch den Catalog der Bibliotheca vaticana 1 2_{70-103} seit 1758 bekannt, durch Iac GeChrAdlers Aufsatz in meines Vorgängers IDMichaelis Bibliothek 19 126—131, durch desselben Gelehrten biblisch-kritische Reise nach Rom 118—127 und sein Buch novi testamenti versiones syriacae 135—202 in den Jahren 1782 1783 1789 bekannter geworden. Der Graf Francisco Miniscalchi-Erizzo hat es 1861 ganz gedruckt, und 1863 mit einem Glossare und anderen Zuthaten versehen, Herr Theodor Noeldeke hat 1868 ZDMG 22 443—527 über den in ihm gebrauchten Dialect in einem sehr fleißigen Aufsatze Auskunft gegeben.

Ein Evangeliar ist ein Buch, in dem die für die kirchliche Lesung bestimmten Abschnitte der Evangelien in der Reihenfolge der Festtage des Kirchenjahrs zusammengeschrieben oder aber gedruckt sind. Es erhellt, daß man eine Stelle der Evangelien in einem solchen Buche nur findet, wenn man den Sonn- oder Feiertag kennt, an dem sie in den Kirchen gelesen wird. Ein Register kann das Finden erleichtern: immer sind von dem zur Benutzung eines Registers Gezwungenen zwei Stellen eines Evangeliars nachzuschlagen, nicht Eine, wann er es für die Zwecke der Grammatik, des Lexicons, der Kritik des Textes benutzen will.

Ich habe mir daher im Sommer 1877 eine Abschrift jenes Evangeliars gemacht, in der die Perikopen nach der Folge unserer Bibeln stehn. Hätte ich gewußt, daß ich je meine Abschrift mit dem Codex der Vaticana werde vergleichen können, so hätte ich mir viel Zeit und Mühe dadurch erspart, daß ich Miniscalchis nur auf der Einen Seite syrisch bedrucktes Werk zerschnitten und

die Perikopen in der mir meine Arbeiten erleichternden Folge aufgeklebt hätte.

Da ich nach EBertheaus Tode mich zum Semitisten umarbeiten mußte, habe ich meine Abschrift, nachdem ich sie mit dem Originale verglichen hätte, in meiner Bibliotheca Syriaca zu drucken beschlossen: denn der Dialekt, den das Buch zeigt, ist wichtig. Ich habe allerdings auch die Absicht, durch meine Arbeit die Urkunde für die Kritik des Evangelientextes nutzbar zu machen: denn wenn auch der Gunst der ersten Facultäten mich nicht erfreuend, fühle ich mich doch stets als Theologe.

Ich bin deshalb den October 1890 wie den März und April 1891 in Rom gewesen, und werde im October 1891, um die Vergleichung zu Ende zu führen, noch einmal nach Rom müssen.

Da die für die Benutzung meiner Arbeit in Betracht kommenden Personen theils schwer von Begriffen sind, theils absichtlich misverstehn, gebe ich ein Jahr vor der Zeit, in der mein Band erscheinen kann, eine kurze Notiz, um jene an das Verstehn des Buchs zu gewöhnen, diesen das Geltendmachen ihrer „Misverständnisse“ zu verleiden.

Die Handschrift ist nach 194[4] = BS 276 vom Schreiber حسب طاقته (so gut wie sein Können es ihm gestattete) geschrieben worden. Schwiegersohn eines Oberen konnte ein Klosterbruder nicht sein, noch auch so leicht Sohn desselben: folglich wird man ihn wohl für das ihm aufgetragene (schwere) Geschäft wirklich tauglich gehalten haben: der Augenschein lehrt, daß der Abt sich in ihm nicht geirrt hatte, und dies festzustellen ist Pflicht. Daß der Mann die ihm zugemuthete Arbeit ungerne übernommen hat, und daß er bescheiden dachte, folgt mir daraus, daß er ausdrücklich sie als حسب طاقته ausgeführt bezeichnet.

Ich habe Grund zu der Annahme, daß der Schreiber nicht den Befehl bekommen hat, ein älteres Evangeliar abzuschreiben, sondern den, aus einem Evangelium ein Evangeliar selbst herzustellen: denn offenbare Fehler wiederholen sich in mehrfach vorkommenden, räumlich von einander getrennten Lesestücken: da der sorgfältige Arbeiter sich nicht mehrfach in gleicher Weise verschrieben haben wird, nehme ich an, daß die Fehler in seiner Vorlage standen, die zu ändern er nicht wagte.

Der Schreiber, der im Jahre 1341 der SeleucidenAera mit seinem Buche fertig wurde, arbeitete zum Glücke für mich mit einer honiggelben Tinte. Was er geschrieben hat, ist fast auf allen Blättern, und zwar zu verschiedenen Zeiten und von verschiedenen Händen, schwarz überfahren, geändert und um Vokal-

zeichen und Interpunctionen vermehrt worden: die honiggelbe Tinte scheint aber doch auch an vielen Stellen wo es nur auf das mit Ihr Geschriebene ankommt, durch.

Der erste Schreiber setzt Vocale nie, Interpunctionen selten. Er schreibt ܟ̰ sehr häufig, nicht selten ܟ̈, den Doppelpunkt als Bezeichnung des Plurals nicht regelmäßig.

ܟ̈ kann ܟ mit Pluralpunkten sein: in den meisten Fällen bedeutet es χ: wenn die Zunft nicht eine so große Nichtachtung meiner Arbeiten in ihr Programm aufgenommen hätte, würden wenigstens die Lehrer der hebräischen Grammatik aus meiner Genesis 6 das Scholion des Baseler Codex kennen, das zu Χοῦς = כּוּשׁ anmerkt οὔτε χ οὔτε κ, ἀλλὰ μέσον τῶν δύο· στοιχεῖον δὲ ἐστὶν ἁρμόττον τῇ τῶν Ἑβραίων καὶ Σύρων γλώττῃ: gequetscht wird ܟ zu ts, ܩ über č zu ܨ = ç. Der Dialekt des Evangeliars hatte wenigstens zu der Zeit, in der die Handschrift des Vatican punktiert wurde, eine (krankhafte) Neigung ܠ „weich" zu sprechen (geschrieben wird dann ܟ̰), und ܟ̈ mag durch seinen Doppelpunkt (der Codex kennt auch ܟ) eine noch größere „Weichheit" ausdrücken als durch ܟ. Das bleibt aber Alles noch zu untersuchen. ܦ ܦ̈ ܦ̤ scheinen sich nicht zu unterscheiden: ܦ sieht in der Hds. wie ܦ aus, da ܦ wie ein umgekehrtes ܦ aussieht.

Wenn die über das Buch gekommenen Späteren — die Tinte wie die Form der Schrift lehrt, daß ihrer mehrere waren, die nicht zu gleicher Zeit lebten — wenn diese Späteren nur die, übrigens unnöthige, Mühe sich auferlegt hätten, die honiggelbe Schrift des Ersten anzuschwärzen, so würden sie dem Vorwurfe geschmacklose Dummköpfe gewesen zu sein nicht entgehn können. Sie änderten aber auch, und nur der Umstand, daß sie ohne es zu wollen, für die Geschichte der Sprache Nutzbares geliefert haben, macht nothwendig sich um sie bekümmern.

Der Dialekt braucht die Artikelform der Nomina nur da wo im Griechischen der Artikel steht. Allerdings habe ich gelegentlich auch falsche Artikelformen herausgegeben, weil ich nicht sah, daß ein Aelteres unter dem jetzt vorhandenen Texte stak: ich bin aber überzeugt, daß diese Stellen zu emendieren sind. Vorläufig wollte ich nur was ich sah, vorlegen.

Der Dialekt braucht noch gerne Verbindungen der Nomina mit einem Genetive ohne ܕ, sagt also ܐܪܥܐ ܦܠܫܬܝܡ, nicht ܐܪܥܐ ܕܦܠܫܬܝܡ: er braucht ܕ vor Genetiven auch wo die Verbindungs-Form vorhergeht. Dieses Alles ist von C geändert worden: die erste Hand ist in diesen Fällen allen erkennbar.

Der Dialekt braucht die Participien da wo man im Schrift-

Syrischen ܗܡ zuzusetzen hat, ohne ܨܡ, das erst die Späteren, nicht gleichmäßig, nachgetragen haben. Die Fälle liegen alle klar.

Es war meine Pflicht, was die erste Hand bot, in meinen Text zu setzen, was die Correctoren (die zu scheiden ich nicht unternehmen durfte) aus der ersten Schrift gemacht haben, am Rande zu geben.

Wo die honiggelbe Tinte des Ersten auch nur mit einem Scheinchen hervorleuchtete, ermöglichte Sie das Richtige zu finden. Wo die Stiefelwichse der Späteren alles deckte, mußte ich mich bescheiden. Und ich habe mich beschieden, weil nach langer und wiederholter Beschäftigung mit der Handschrift es mich verboten däuchte zu recensieren, es mir vorläufig allein erlaubt schien, die Urkunde als Urkunde vorzulegen.

Mehr wird sich thun lassen, nachdem mein Text erschienen, und eine Concordanz über ihn ausgearbeitet sein wird.

In der BS sind natürlich die Zeilen gezählt: die Concordanz wird ihre Citate nicht nach Evangelien, sondern nach Seiten und Zeilen der BS geben, weil viele Perikopen mehrfach vorkommen, jede andere Zählung also Weiterungen verursachen müßte. Am Rande der BS sind die Columnen der Handschrift angezeigt: jede Columne ist ungefähr fünf Zeilen meines (Quart)Druckes lang. Mithin ist jedes Wort, das in der Concordanz steht, ohne Mühe in der Handschrift nachzuschlagen.

Eine endgültige Ausgabe des Textes zu liefern behalte ich mir vor.

Die Punctation zeigt gelegentlich ostSyrische Vokale, gelegentlich Punkte die ich noch nicht begreife: im Allgemeinen ist ihr Princip leicht zu durchschauen. Mein Leben ist von vorne herein mit dadurch verwüstet worden, daß jemand der gar nichts von der Sache verstand, über die er schrieb, obwohl ich ausdrücklich gesagt hatte, ich wolle als Varianten nur geben was critici usus foret, die Zunft mit einer Sammlung von Schreibefehlern der Einen von mir benutzten Handschrift erfreute: die Zunft druckte und glaubte diese Liste, und der GORR Schulze veranlaßte den Herrn von Raumer sie zu benutzen: jetzt AErman Jahresbericht für 1880 [ZDMG] 193, verglichen mit dem für 1879 [ZDMG] 179. Ich bin also gewarnt, und habe pedantisch treu wiedergeben wollen was die Handschrift bietet. Ich habe in meiner Ausgabe der Didascalia (aus dem deutschen Gelehrtenleben 76) v/vj über meine Wiedergabe der in dem pariser Codex vorliegenden Punctation geredet: die dort angebotene Liste hat nie jemand verlangt: Universitätsprofessoren und ein unverheiratheter Direktor eines Gymnasiums erbaten lieber

(wegen ihrer „Armuth“) von dem Schulamtscandidaten das ganze Buch als Geschenk, ohne jene Liste. In meiner Ausgabe der koptischen Uebersetzung des Pentateuch ix schrieb ich

> etwa zu notieren „ⲉ̇ⲣⲉ ist ohne Punkt, weil der Schwanz eines darüberstehenden ϣ (oder eines ähnlichen Kometen) gerade über ihm herabhängt“ oder „ⲛ̄ⲧⲉ ist ohne Punkt, weil ⲧ̄ wie ein Schirm über ⲛ und ⲉ übersteht“, das hieße denn doch mit der Zeit leichtsinniger umgehn als man verantworten kann.

Statt aber die Leute, die so etwas notiert verlangen, mit dem danab fîl zu liebkosen, habe ich versucht, die Punkte genau wie die Handschrift zu setzen: als alter Mann wird man milde, und mehr noch als früher geneigt, gefällig zu sein. Der Setzer hat Feile und Messer anwenden müssen, um den Größen des Tages zu genügen: nicht mit dem die strengen Anforderungen gewissenhafter Arbeiter befriedigenden Erfolge: die Punkte stehn noch immer gelegentlich ein zehntel Millimeter schief, und da Typen, unliebenswürdiger als die heut zu Tage typischen Menschen, nicht zur Annahme des Grundsatzes zu bewegen sind „hier steh' ich, ich kann auch anders“, so habe ich diesem Mangel beim besten Willen nicht abhelfen können. Es wird sogar leider vorgekommen sein, daß ich, obwohl manches fünfmal verglichen worden ist, sowohl beim Lesen des Codex wie beim Lesen der Druckbogen Punkte übersehen habe. Man vergleiche was in meinen Analectis xiv steht. Ich habe 1860 in der Vorrede zu den Geoponicis drucken heißen, wir seien was die syrische Philologie anlange, jetzt im Zeitalter der Aldinen und Iuntinen: die Einsicht findet sich nunmehr auch bei HWinckler, Bezolds Zeitschrift für Assyriologie 5 311. Ich bitte meine Ausgabe des aramäischen Evangeliars als eine Art Aldina anzusehen.

Diese meine Aldina folgt nun der Handschrift gelegentlich auch da, wo ein Anderer als ich ihr nicht gefolgt wäre.

Die Handschrift wechselt zwischen ܠܟܘܢ und ܠܟܘܢ. Beides kann erklärt werden. Da der Punkt über ܟ die „weiche“ Aussprache dieses Buchstaben anzeigt, ist ܠܟܘܢ = לָכֶם aus meiner Uebersicht 164 2 14 leicht begriffen: das *a* des Zielfalles in ܠ wirkte noch auf ܟ. Hingegen ܠܟܘܢ entspricht dem Gebrauche der OstSyrer, wie dem der WestSyrer, die den in dieser Handschrift vorliegenden Dialekt sprechen, und der durch Epiphanius (meine Mittheilungen 2 363) völlig sicheren Form ελιχων = עליכון der Elcesaiten.

Anders steht es mit ܠܟܘ̇ܢ und ܠܟܘ̇ܢ. Der Punkt in ܠܟܘ̇ܢ ist — mir — unerklärlich: ich habe gleichwohl ܠܟܘ̇ܢ, wo es in meiner Vorlage deutlich stand, erhalten, darum erhalten, weil ich meine

Leser mit dem Gedanken vertraut zu machen wünschte, daß die Handschrift nicht unfehlbar ist.

Ein Alter (vielleicht nicht oder nicht immer der erste Schreiber) braucht ∵ ⁘ als Interpunctionszeichen, aber die Neuern können diese drei Punktgruppen nicht leiden, und, wo sie sie nicht auskratzen, decken sie sie durch einen Zornausbruch ihrer plumpen Feder oder durch eine Vergrößerung des nächst liegenden Consonanten zu: eine Rasur, in welcher es Vertiefungen gibt, ist gelegentlich der einzige Beweis für das Dasein jener drei. Dabei läßt sich nicht immer ausmachen, ob :. oder :· oder ∵ gemeint war: denn die Schrift dieser Schreiber steht nicht wie Druckschrift. Das Zeichen ⁝ scheint mir, da sein mittelster Punkt gelegentlich dicker ist als die anderen, oder eine Kleinigkeit ausweicht, nichts als eine durch den Raum veranlaßte Verderbnis von .: oder :.. Wann : unter und über der Zeile vertheilt wird (= diducitur), ist es schwerlich Interpunction, sondern soll zu eng sich auf dem Halse stehende Wörter trennen.

Nicht selten (alle Fälle sind am Rande verzeichnet) hebt mit :· oder ·: die Zeile an: Kenner des griechischen Lesens werden vielleicht aus diesem Umstande etwas schließen können.

Unser Genosse, Herr Theodor Noeldeke, der selbst einige Seiten aramäischer Texte herausgegeben hat, nannte es ZDMG 29 89 einen „Luxus“, alle „Punkte und Pünktchen der Handschriften“ wiederzugeben. Dem Evangeliare des Vatican gegenüber stand auf jeden Fall die Sache anders, da aus dessen Punkten die noch unbekannte Aussprache eines Dialekts festgestellt werden muß. Zu meiner Sicherung gegen Leute wie die im zweiten Bande der Mittheilungen und sonst aufbewahrten setze ich her was Herr Noeldeke geschrieben hat.

ZDMG 27 492: Ich habe unten in dem ersten Textstück die Punctation der Handschrift möglichst genau wiedergegeben; hoffentlich gerieth der Druck einigermaßen und wird nicht zuletzt alles durch das unglückliche Abspringen der Punkte verdorben.

ZDMG 29 89: Mit den Ribbûi-Puncten wird grosse Verschwendung getrieben . . . . . Aber hier ist so wenig Consequenz wie bei den sonstigen Puncten, namentlich den Interpunctionszeichen. Ich halte es für ziemlich überflüssig, bei der Herausgabe grösserer Texte alle die für uns grösstentheils nur lästigen Puncte und Pünctchen wiederzugeben bei denen weder innere Consequenz noch Uebereinstimmung der verschiedenen Handschriften Statt zu finden pflegt. Bei so kleinen Stücken wie unseren hier kann man sich diesen Luxus eher erlauben. Allerdings ist es schon typographisch nicht ausführbar, die

Stellung der Puncte immer genau auszudrücken; auch will ich es nicht für unmöglich erklären, daß mir bei diesen Puncten trotz aller Achtsamkeit einzelne kleine Versehen begegnet sein sollten.

Ich war im October 1890 nahe daran, die Arbeit am Evangeliare aufzugeben, so schwierig fand ich sie, und ich habe mir nicht verhehlt, daß die unerfreuliche Hetzjagd, in der einem pflichttreuen Philologen und Historiker in Rom zu leben obliegt, die Güte gerade dieser Arbeit mehr als die anderer Studien beeinträchtigen könne. Da haben mich in ETezas Aufsatze cose armene (Atti del Istituto Veneto 7 1) die Seiten 906—913 weiter zu arbeiten bestimmt: zufälliger Weise hatte mir Ignazio Guidi das Heft mitgetheilt. Allerdings ist den Agathangelus herauszugeben leichter als das aramäische Evangeliar des Vatican zu bearbeiten: jenes eine Rheinparthie um Pfingsten, dies eine Meerfahrt im Schneesturme wie ich sie am 10 und 11 Januar 1853 einmal 26 Stunden hindurch auszuhalten gehabt habe. Ich will aber Herrn Teza, den ich unlängst flüchtig auf der Straße gesehen, doch öffentlich für seinen Aufsatz danken, der in Deutschland freilich weder erscheinen noch, falls er erschienen wäre, beherzigt werden dürfte: die principes mediocritatis und die Fremden dulden bei uns nichts was mir helfen oder meine Arbeiten zur Geltung bringen könnte.

Die Liste der Perikopen habe ich vor meinem Texte zusammengestellt: jede Perikope trägt ihre Nummer, und diese Nummer ist vor der Perikope im Evangelientexte zwischen [] wiederholt: das Auffinden ist mithin ohne Mühe möglich, und eine Uebersicht über das Kirchenjahr unserer Aramäer erleichtert. Schade, daß diese verderbte Welt dabei um einen Heiligen gekommen ist: für „evangelia leguntur ieiunio sancto Banscira“ Miniscalchis 236 ist nämlich „evangelia quae leguntur in ieiunio sancto εἰς τὴν παννυχίδα“ zu lesen (Nilles 2 237).

Das aramäische Evangeliar des Vatican gibt mir erwünschte Gelegenheit, einmal ein Glossar einer semitischen Sprache in der Gestalt herzustellen, die ich für die allein wissenschaftliche halte: mein Schüler ARahlfs hat in den von ihm angefertigten Register zu meiner Uebersicht, soweit es da thunlich war, meine Grundsätze schon befolgt: freilich nur intellegentibus. Vorab bitte ich Symmicta 1 98 $_{37}$ ff. Orientalia 2 1 ff. nachzulesen.

PSmith hat die Vokabeln des Evangeliars in seinen Thesaurus aufgenommen. Haben die Grimm Berolinismen oder Allemannisches in ihrem Werke?

Die arabischen Wörterbücher, die wir benutzen, ruhen auf

den GlossenSammlungen und den Speculationen der arabischen Grammatiker. Das Vollkommenste was wir auf dem Gebiete besitzen, ist EWLanes Werk. Da an ein methodisches Studium der Quellen nicht zu denken ist — aus Handschriften kann man es nur zu eigenem Gebrauche vornehmen: die Vorlagen zu drucken ist der großen Kosten wegen unmöglich —, so muß man für das Arabische das thun was ich für das Persische zu thun vorgeschlagen habe (persische Studien 65, Mittheilungen 2 246 (352)): das von den einheimischen Lexikographen gebotene Material sauber geordnet als das Fachwerk benutzen, in das hinein man den Wortschatz der Classiker und der technischen Schriftsteller sammelt: den ersten, weil die Classiker eben Classiker, also Muster und Typen für Andere sind, weil sie den Durchschnitt der Sprache geben: den andern, weil nur Techniker die Sprache des Lebens bieten, da wer classisch schreibt und für Gebildete mit deren an fünf Fingern herzuzählendem Lebensinhalte arbeitet, die Sprache nicht erschöpft. Also die Uebersetzungen des Galen, Avicenna: die Botaniker usw. Als das Fachwerk, in das hinein man auch Bemerkungen der Neueren einträgt, nur nicht so desultorisch wie das Dozy gethan hat: und wenn man Nachlässe veröffentlicht, den Quatremères, Fleischers, Thorbeckes mittelst der Zeichen QΦΘ geschieden, in einem und demselben Bande.

Aber den Pedro de Alcala, das Leidener Vocabular, Schiaparellis Buch, den in Petersburg liegenden Diwan von Granada hat man — und zwar falls es angeht, zusammen — in einem Sonderbande vorzulegen.

Für die aramäischen Dialekte sind Sonderwörterbücher nöthig, knappe aber concordantielle Bücher: das Ziel muß ein aramäisches Wörterbuch sein, das was dem Edessenischen, Palaestinischen, Babylonischen usw. (Uebersicht 91r 95r 238) gemeinsam ist als Text, das den Dialekten Eigenthümliche eingerückt in kleiner Schrift bietet: die kleine Schrift wird mit der Zeit vielfach zu Textschrift werden müssen.

Geht man so vor, so wird der Eine Bruder lehren was der andere weil er es vergessen hat, nicht mehr lehren kann.

Ich habe seit vierzig und mehr Jahren den Verdacht gehegt, daß رچي زمن, die natürlich identisch sind, aus dem awestischen זרואן (Mittheilungen 2 38 ff.) entstanden seien: Eznik und Elišê schreiben (Blender wollen sich die ihnen nöthige Gelahrtheit durch die Register beschaffen) զրուան = ζρουαν, haben mithin wie das Awesta (und Justi 128) keinen Vokal zwischen z und r: meine gesammelten Abhandlungen 149 20 ff. NeuPersisch (der von dem „großen" Jules Mohl einst gekrönte Vullers hält زمان *Zeit* für arabisch, nur in der Be-

deutung *Tod* für éranisch) زمان, armenisch ժամ *Stunde*, ժամանակ = زمانه. Wegen des ժ gegen des Elišê զ ist ժամանակ arsacidisch: die Wurzel ज्ञ γερ- erscheint im Haikischen als ծեր. Herr SFränkel, CBezolds Zeitschrift für Assyriologie 3 52[r], schrieb 1888

> Nicht selten erfolgte die Verwandlung eines ursprünglichen B in M unter dem Einflusse eines benachbarten N wie in זמן für zarvan ܙܒܢܐ.

Nur durch den Dialekt des Evangeliars wird erweisbar, daß ܙܒܢ (mit weichem B) aus dem awestischen זרואן entstanden ist: denn dies Buch schreibt ܙܒܢ, das bedeutet bei ihm, B ist nicht weich, sondern hart. ܙܒܢ mit hartem B, also etwa zabban, [für zanban] gesprochen, wurde zu zaban, danach zu zeʙan.

In einem nach meinen Grundsätzen bearbeiteten arabischen Wörterbuche wäre das Stichwort زمان, und hinter diesem würden die Denominativa zamina zâmana azmana auftreten.

Warum זרואן in das Aramäische und Arabische aufgenommen worden ist, weiß ich nicht, noch weiß ich ܚܙ zu erklären, das im Evangeliare für *Zeit* durch mich gesichert »scheint« (ܚܙܝ C): schon jetzt vermag ich zwei für die Geschichte der Religion wichtige Vokabeln zu benutzen: ܩܒܠ = qiʙal σκότος und ܢܒܝܐ προφήτης.

Das erste erweist, daß die „qibla", die Himmelsgegend, nach der hin diese Aramäer beteten, der Westen war: denn es kann nur das arabische qibal *gegenüber* sein. Vergleiche Ezechiel 8 16, und erwäge daß die Praxis der Kirche den Altar zu „orientieren", im Gegensatze zur Synagoge eingeführt ist, die nach Osten zu beten verboten hat.

ܢܒܝܐ (mit Artikel regelrecht ܢܒܝܐܐ) erweist, dass diese Aramäer ein einheimisches Wort für προφήτης hatten. Die Araber besaßen wie die Totenklagelieder erhärten, ein Zeitwort نبأ *zeigte an*, aber ihr نبى ist, wie die entsprechende syrische Vokabel, Lehnwort, also für נְבִיא unverwendbar.

Ich möchte in Anknüpfung an eine oben ausgesprochene Klage hier noch einem Wunsche Ausdruck geben, dessen Erfüllung mich, da voraussichtlich Ich nur noch Einmal nach Rom zu gehn haben werde, persönlich nicht mehr interessiert, einem Wunsche, der vielen tüchtigen Männern aus der Seele gesprochen sein dürfte.

Ich habe in Folge meiner Beziehungen zu den ††Cardinälen Pitra und Hergenröther und meiner durch WWright vermittelten Bekanntschaft mit IohBollig S.I. in Rom Vergünstigungen genossen, für die ich in der Ankündigung 3 und in meiner pars prior iv v auch öffentlich gedankt habe. Daß ich, um den von mir und mei-

nen Landsleuten für Pater Bollig gehegten Empfindungen einen bleibenden Ausdruck zu leihen, in den Schriften der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen die von Bollig für den Druck vorbereiteten Schriften des Iohannes von Euchaita herausgegeben habe, dürfte bekannt sein. Monsignore Isidoro Carini, des Monsignore Stefano Ciccolini Nachfolger, hat mich ebenso verpflichtet, wie der wohlwollende Mann, der vor ihm in der Bibliothek thätig war, jetzt an einer andern Stelle seinem Fürsten und seiner Kirche dient, und mir bis heute freundlich gesinnt geblieben ist. Ich habe mich aber stets geschämt, würdige Gelehrte, die mir an Eifer der Wissenschaft zu dienen nicht nachstehn, nicht derselben Gunst wie ich genießen zu sehen: ich habe zweitens nie vergessen können, daß jede facilità widerruflich, und zwar von Tage zu Tage widerruflich, also eine ArbeitsEintheilung auch für den privilegiato im Vatican nicht möglich ist. Da wir Alle Zeit wie Geld zu Rathe zu halten haben, ist dieser Zustand auch den privilegiati nicht erwünscht. Man darf nicht außer Acht lassen, daß für so gut wie alle Gäste der Bibliotheca Vaticana die Woche, deren Donnerstage (und Sonntage) stets wegfallen, nur zwanzig Arbeitsstunden hat.

Kein mir bekannter Gelehrter, der schon öfter in Rom gearbeitet hat, kann dem heiligen Stuhle die Anerkennung versagen, daß das Wohlwollen gegen die der Bibliothek des Vatican in immer größeren Schaaren zuströmenden Gelehrten von Jahre zu Jahre zugenommen hat: „mehr Zeit“ und „Studio auch an den Donnerstagen“ wird freilich der Anerkennung stets unmittelbar folgen. Wir hoffen Alle, weil wir erfahren haben, daß man unsere früheren Hoffnungen zu errathen wußte.

Was die im Vatican arbeitenden Gelehrten anlangt, so dürften sie mit dem Papste natürlich nur durch eine Bittschrift verkehren, und in dieser nur persönliche Bitten vortragen, deren Erfüllung meines Erachtens nicht füglich in Aussicht stehn kann. Aber da die weitaus größeste Zahl dieser Gelehrten von den „historischen Commissionen“ Deutschlands, Oesterreichs, Frankreichs oder aber von Akademien beauftragt ist, so brauchen die Herren doch nur ihren Vorgesetzten die Sachlage zu schildern: für recht viel Geld werde wenig geleistet: was geleistet werde, könne in der Zuverlässigkeit und in dem Umfange, in dem es wirklich zu Stande kommt, nur in Folge ganz außerordentlicher, aufreibender Anspannung aller Kräfte zu Stande gebracht werden, die man um so mehr vermeiden müsse als die Kost in Rom ungenügend sei, und schon die zurückzulegenden Entfernungen große Anstrengungen erforderten. Ich vermuthe, daß die Regierungen sehr wohl befähigt, und eigentlich auch verpflichtet sind

mit dem heiligen Stuhle darüber zu verhandeln, daß die Arbeitszeit der Vaticana auf acht Stunden erhöht werde, daß man die Donnerstage in den ArbeitstagsStand erhebe, und außer den Sonntagen und den kirchlich gebotenen Festtagen vom ersten October bis zum letzten Juni ununterbrochen in der Bibliothek zu arbeiten gestatte. Die Diplomatie dürfte sich in der Wahl der für die Verhandlung zu benutzenden Ausdrücke weniger leicht vergreifen als unser einer, dem es freilich auf die Sache mehr ankommt, als einem ihm fremde gelehrte Interessen vertretenden Gesandten, der aber dafür die Kenntnis der in Betracht zu ziehenden Persönlichkeiten der päpstlichen Regierung, und Uebung im GeschäftsStyle nicht besitzt.

Daß ein durch Oberlicht, und nur durch dies, erleuchteter Kuppelsaal in ein cortile des Vatican einzubauen, daß die Sammlung gedruckter Bücher leicht zugänglich zu machen, daß sie auf den Gebieten der alten Philologie, der Romanistik, der Patristik, der Geschichte des Mittelalters auf dem Laufenden zu erhalten, daß gar manches Andere zu beschaffen sein wird, über das ich auf Befehl gerne Bericht erstatten werde, das versteht sich von selbst. Schon hier will ich versichern, daß ich an das allen Londonern bekannte Museum-head-ake sehr wohl denke, und an die, von mir sogar öffentlich ausgesprochene, Klage über die unter der (jetzt Niemanden mehr belästigenden) Kuppel der Laurentiana drückende Hitze ebenfalls: und ich will versichern, daß ich vorkommenden Falles nicht vergessen würde, auf eine genügende Ventilation des beantragten Kuppelsaales zu drängen.

Weiter versteht sich ganz von selbst, daß die verhandelnden Regierungen einen Theil der für die neuen Einrichtungen auflaufenden Kosten ebenso gewis werden übernehmen müssen, als die Fremden für den Zutritt zu den Kunstsammlungen des Vatican Gebühren zahlen. Die Regierungen sparen an Reisekosten und Diäten für die von ihnen Beauftragten, falls diese täglich mehr Zeit zur Verfügung haben als bisher, mehr als was sie etwa dem Vatican an Eintrittsgebühren für ihre Leute zu entrichten haben können.

Je mehr Regierungen sich zu dem von mir vorgeschlagenen Antrage vereinigen, desto mehr Aussicht hat er, angenommen zu werden, weil die Catholicität der Kirche durch ihn in der freundlichsten Form als eine Thatsache anerkannt werden würde, mit der auch die Welt zu rechnen gehabt hat.

Die zu erbittenden Erleichterungen sind aber durchaus auch im Interesse des heiligen Stuhls. Wer herrschen will, muß das Gute fördern: und wer irgend ein Gutes fördert, hat schließlich immer eine Stellung auch in der Welt. Die Vorsehung hat den Nach-

folgern Petri eine Handschriftensammlung ohne Gleichen zu eigen gegeben: ich glaube, die Sammlung so allgemein und so bequem wie möglich zugänglich zu machen, müsse der Kirche als eine Aufgabe erscheinen, weil das Ansehen der Kirche durch die gewährte Erleichterung erheblich wachsen wird. Legen die Orden — Jesuiten, Dominicaner, Benedictiner — Werth darauf, ihre besten Leute in die Verwaltung der geradezu einzigen Sammlungen des Vatican zu bringen, weil der Ruhm der Congregation durch ihre so zu sagen vor die Front gerufenen Angehörigen wächst, warum sollte die ganze Kirche nicht dasselbe Mittel anwenden wie ihre Orden, um sich als eine Macht zu erweisen? Oesterreichs Ruf ist in der gelehrten Welt an dem Tage ich kann nicht sagen um wie viel gestiegen, an dem WvHartel Oberbibliothekar in Wien wurde: die Kirche wird ein Missionswerk thun, wenn sie ihre Bibliothek mit einem Introite hic dii sunt so weit wie möglich öffnet. Sie macht jetzt durch ihre Krankenpflege Propaganda: sie kann auch durch ihre Bibliotheksverwaltung Propaganda machen. Die Wissenschaft ist unbeeinflußbar unabhängig, aber dankbar, und μεγαλοψυχία sogar dem principiellen Akatholiken gegenüber das beste Mittel, dem jetzt fühlbaren Mangel an Gemeinschaft zwischen Katholiken und Akatholiken seine Schärfe zu nehmen.

Als Theodor von Sickel 1881 die bekannte Urkunde Ottos des Großen, über die er 1883 in einer berühmten Schrift gehandelt hat, für authentisch erklärte, freute sich (Cardinal Hergenröther hat mir das an dem Tage an dem es geschah, erzählt), der Papst Leo der Dreizehnte so, daß er so ehrlichen Akatholiken das Archiv weit zu öffnen befahl. Keiner von denen, die in der Bibliothek arbeiten, steht den im Archive forschenden Gelehrten in der von ThSickel natürlich für selbstverständlich erachteten Eigenschaft der Ehrlichkeit nach: wie wäre es, wenn die oben genannten Behörden dies vor dem heiligen Vater geltend machten, der, wenn auch kein Gelehrter, doch ein gelehrter Mann (eines seiner lateinischen Gedichte steht in der Nationalzeitung vom 27 April 1878 Nummer 195) und obenein ein wohlwollender Herr ist wie wenige?

Die biblioteca Vittorio Emanuele ermöglicht in ihren Räumen die Benutzung aller in den Staatsbibliotheken Italiens aufbewahrten Handschriften: es wird zu erwägen sein, ob nicht die Vaticana die den Kirchenbibliotheken gehörenden Codices zugänglich machen kann. Mittelpunkt muß man sein, wenn man wirken will: die Vaticana kann ein Mittelpunkt werden. Der heilige Vater genießt in Italien Portofreiheit: Kosten erwüchsen mithin aus der von mir so eben vorgeschlagenen Einrichtung nicht.

Nachtrag.

30 Mai 1891.

Ueber das so vielen Abschnitten des Evangeliars voraufgehende ܒܗܘ ܡܘܥܕܐ hat sich meines Wissens nur Herr Noeldeke ZDMG 22 509 geäußert, und zwar nur durch eine Uebersetzung: „in *der* Zeit“.

Matth. 26_{44} ist ܒܗ̇ܘ ܡܠܬܐ ὁ αὐτὸς λόγος: darum darf ܒܗܘ ܡܘܥܕܐ ἐν τῷ αὐτῷ καιρῷ übersetzt werden. Ist diese Uebersetzung richtig, so sollen die mir bis heute unverständlich gebliebenen Worte ܒܗܘ ܡܘܥܕܐ anzeigen, daß der auf sie folgende Abschnitt an demselben Sonn- oder Festtage gelesen werde wie der [im Evangeliare] nicht mitgetheilte [nicht aus einem Evangelium entnommene], der ihm vorhergeht. Dann aber ist das vom Verfasser des Evangeliars benutzte Evangelium nicht die unmittelbare Vorlage des Schreibers gewesen, dessen Arbeit uns erhalten ist. Der Schreiber muß dann die „Rubriken“ eines Lectionars gedankenlos kopiert haben: erst der Verfasser des Lectionars (Proben sind aus meinen Orientalia 1 zu beziehen) hat eine nicht überall vollständige Handschrift eines Evangeliums für seine Arbeit benutzt.

Ueber die Plurale der Bildung מַלְכַיָּא sagt SDLuzzatto § 23 nichts Näheres. Herr EKautzsch sieht § 52° in מַלְכַיָּא „die ursprüngliche Endung des status constructus ־ַי“ + des „determinierenden ā“ (vergleiche GHoffmann, ZDMG 32 759), faßt קַדְמַיָּא als קַדְמַיְיָא. Ueber ܚܝ̈ܘܬܐ und die irgendwie ihm Analogen Herr Noeldeke § 72, Herr Duval § 259. Kautzsch hatte ־ַיְ [ai, nicht ay] zu schreiben.

Die auf ܝܐ endenden Plurale des Evangeliars setzt Herr Noeldeke ZDMG 22 477[r] den auf ־ַיָּא auslaufenden der Chaldäer des alten Testaments gleich. Er behauptet das: ich beweise es.

ܦ̈ܝܣܐ = πεῖσαι hat seine Pluralpunkte, weil seine andere Sylbe wie αι = ε klang. Für Ἰουδαία schreibt das Evangeliar Matth. 24_{16} = BS 304_{4} ܝܗ̈ܘܕܝܐ, Lucas 1_{5} = BS 327_{20} ܝܗܘ̈ܕܝܐ [Lucas 1_{65} = BS 328_{27} ܝܗܘܕܝܐ], Lucas 3_{1} = BS 332_{21} ܝ̈ܗܘܕܝܐ. Also noch C (denn diese Pluralpunkte hat C geschrieben) hat die Aussprache Ἰουδαία dadurch angedeutet, daß er zu den einen Singular wiedergebenden Consonanten Pluralpunkte setzte.

Folglich endete der Plural im Dialekte des Evangeliars auf αια.

Daß meine Abhandlungen 159_{7}, meine Symmicta 1 37_{24} benutzt werden könnten, ist natürlich allen, die mit den Condottieri rechnen, undenkbar. Φουρδαια Mittheilungen 2 380.

Als ich oben von ܚܙ̈ sprach, habe ich *scheint* in » « gesetzt. Denn trotz des mitunter sicheren ܚܙ̈ des Codex komme ich immer wieder auf die Vermuthung zurück, Zeit habe diesen Aramäern עֵד geheißen, das von وعد (zu dem auch מוֹעֵד gehört) hergeleitet,

das Masculinum zu dem hebräischen, von Wetzstein zu وعد gestellten עֵת = עדת = ʿidat wäre. Die Zeitrechnung ist immer etwas Conventionelles, da man nach Sonne Mond oder Sternen messen, und von einem beliebigen Anfange an rechnen kann.

Neue Ausgabe Clementischer Schriften.

Wer weiß unter welchen Mühsalen ich die Didascalia, die relliquiae iuris ecclesiastici antiquissimae, die διατάξεις τῶν ἀποστόλων, die syrische Uebersetzung der Recognitiones Clementis und die Κλημέντια hinausgegeben habe, wird zugestehn, daß der Wunsch, die verbesserten Wiederholungen dieser Bücher selbst zu liefern, ein natürlicher ist.

Ich habe meine Rechte, die vielleicht nicht in vollem Umfange vor den Gerichten geltend zu machen sein, aber von jedem Gentleman als unantastbar anerkannt werden werden, stets vorbehalten: ich kann nicht gestatten, daß unter so vielen Schwierigkeiten und mit so vielen, nur durch große Entsagungen aufzubringenden Kosten gesammelte Materialien von dem ersten Besten ohne Weiteres angeeignet werden. Vorrede zum Ḥarîzî.

Im zweiten Bande der Bibliotheca Syriaca werden Recognitiones, Didascalia und andere Clementina 1893 neu erscheinen: eine die Urkunden scheidende Ausgabe der Constitutiones apostolorum soll (sie liegt seit vielen Jahren handschriftlich vor) im nächsten Winter unter die Presse kommen. Die recognitiones und Κλημέντια werden, erstere ohne die Handschriften von Verona und Vercelli, deren für JBLightfoot gemachte Vergleichungen in JARobinsons Händen sind, letztere ohne die Handschrift von Ierusalem, bearbeitet werden: es kommt mir nur darauf an zu zeigen, in welchem Verhältnisse der Grieche zum Syrer steht.

Sowie meine Kosten gedeckt sind, wird meine Texte zu neuen Ausgaben zu benutzen gestattet sein, aber nicht einen Augenblick früher. Mittheilungen **3** 254 **4** 138 = GGA **1890** 394ᶠ.

Beiläufig berichte ich, daß die syrische Urschrift von Ephraims Commentare zur Evangelienharmonie des Tatian gefunden sein soll. Daß ich hinter ihr her bin, versteht sich von selbst. Constitutiones vijʳ.

Die Schwingungsdauer des Gauss'schen Bifilarpendels.

Von

Karl Heun in Berlin.

Die mathematische Theorie des Bifilarpendels kann mit Benutzung von hyperelliptischen Functionen, die durch zehn Verzweigungspunkte characterisirt sind, vollständig ausgeführt werden. Wenn auch einer solchen Untersuchung keineswegs unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstehen, so wäre doch damit dem Rechner wenig gedient, denn die allgemeinen Gleichungen müßten für die Bedürfnisse der Anwendungen wesentlich vereinfacht werden. Man hat sich bisher mit der von Gauss gegebenen Gleichung für die Schwingungsdauer begnügt und in denjenigen Fällen, wo eine Berücksichtigung der Amplitude nothwendig würde, nur die Gleichgewichtslage beobachtet. Diese Beschränkung hat aber, wie Gauss[1]) zuerst hervorgehoben hat, für feine Kräftemessungen nicht unbeträchtliche Nachtheile. Ich theile deßhalb im Folgenden für die Schwingungsdauer des Bifilarpendels eine Formel mit, welche auch für die verhältnißmäßig kurzen Pendel, welche man jetzt häufig bei electrodynamischen Messungen verwendet, ausreichen wird. Insbesondere mache ich auf die Fehlerschätzung aufmerksam, die für genauere Berechnungen dieser Art geradezu unentbehrlich ist.

1.

Die Aufhängefäden seien parallel und von gleicher Länge, welche wir im Folgenden gleich Eins setzen. Der Abstand der Fäden in der Ruhelage sei gleich $2l$. In der durch die unteren Fadenenden gehenden horizontalen Geraden werden im Abstand des Trägheitsradius (k) des Pendelkörpers in gleicher Entfernung (k) von der Mitte zwei materielle Punkte angenommen, auf deren Bewegung die Schwingungen des wirklichen Pendels reducirbar sind. Der Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems werde in der Mitte zwischen den beiden materiellen Punkten gewählt. Die z-Axe gehe durch die verticale Schwerpunktsaxe des Pendels nach oben und die x-Axe durch die schweren Punkte. Jeder derselben bewegt sich dann auf einer doppelt gekrümmten Bahn, welche bestimmt ist durch die Gleichungen:

---

1) Gauss Werke, herausgegeben von Schering, Bd. V p. 100.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= k^2 \\ 2l^2(k-x) &= kz(2-z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Ist g die Beschleunigung der Erdschwere ausgedrückt in Theilen der Fadenlänge, dann heißt die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{s^2 + 4k^2(1-z)^2}{s^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(h-z) \quad \ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$s^2 = 4l^2 z(2-z) - z^2(2-z)^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

h bedeutet die Integrationsconstante erster Ordnung, welche durch das Princip der lebendigen Kraft eingeführt ist.

Wird der kleinste Werth von x gleich $k \cos \alpha$ gesetzt, so bestimmt sich h als Function der „Amplitude" α aus der Gleichung

$$h(2-h) = 2l^2\left((1-\frac{x}{k}\right).$$

Man erhält hieraus

$$h = 1 - \sqrt{1 - 4l^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist die verticale Erhebung des Pendelkörpers, wenn die Amplitude der Elongation gleich α wird.

Aus der Gleich. II) folgt durch Integration für die Schwingungsdauer T die Gleichung

$$\sqrt{2g} \,.\, T = 2\int_0^h \frac{s^2 + 4k^2(1-z)^2}{s\sqrt{h-z}\sqrt{s^2 + 4k^2(1-z)^2}}\,dz \quad \ldots \quad \text{III)}$$

Die 10 Verzweigungspunkte dieses Integrals sind:

$$0,\ h,\ 1-\sqrt{1-4l^2},\quad 1+\sqrt{1-4l^2},\ 2,\ \infty$$
$$1 \pm \sqrt{1 + 2(k^2 - l^2) \mp 2\sqrt{(k^2-l^2)^2 + k^2}}.$$

Für die meisten Anwendungen besitzt nun die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ in der Entwicklung

$$\frac{\sqrt{s^2 + 4k^2(1-z)^2}}{s\sqrt{h-z}} = \frac{1}{\sqrt{z(h-z)[4l^2 - z(2-z)]}} \cdot \mathfrak{P}(z)$$

eine genügend starke Convergenz. Wir werden uns deßhalb im Folgenden auf diesen Fall beschränken und das ganze hyperelliptische Integral in dem Ausdruck für T nach der Gauss'schen

Quadraturmethode mit Benutzung eines einzigen zweckmäßig zu wählenden Argumentwerthes $z = z_1$ angenähert ausführen.

2.

Das nach der Gauss'schen Methode zur Quadratur vorgelegte Integral habe die Form

$$J = \int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\, dx,$$

wo $\varphi(x)$ eine convergente Potenzreihe von der Form

$$\varphi(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \text{in inf.}$$

bedeutet. Die Function $f(x)$ besitzt die Verzweigungspunkte. Soll mit einem einzigen Argumentwerthe $x = x_1$ interpolirt werden, dann ist:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + \lambda_1(x - x_1) + \lambda_2(x^2 - x_1^2) + \cdots + \text{in inf.}$$

Folglich

$$J = a_1 . \varphi(x_1) + \lambda_1(a_2 - a_1 x_1) + \lambda_2(a_3 - a_1 x_1^2) + \cdots + \text{in inf.}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$a_r = \int_\alpha^\beta x^{r+1} f(x)\, dx.$$

Damit nun der Fehler bei der approximativen Darstellung

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\, dx = a_1 \varphi(x_1)$$

möglichst klein werde, muß man x_1 so wählen, daß es der Gleich.

$$a_2 - a_1 x_1 = 0$$

genügt. Dann erhält man für den Fehler „zweiter" Ordnung C_2 den Ausdruck

$$C_2 = \frac{a_1 a_3 - a_2 a_2}{a_1} \cdot \lambda_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

3.

Durch die lineare Substitution

$$z = \frac{\varepsilon' h \xi}{\varepsilon' - h + h\xi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

nimmt der Ausdruck für T die Legendre'sche Form an:

$$\sqrt{2g}\,.\,T = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon'-h)}}\int_0^1 \varphi\left(\frac{\varepsilon' h\zeta}{\varepsilon'-h+h\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-m^2\zeta)}},$$

worin $\varepsilon = 1-\sqrt{1-4l^2};\quad \varepsilon' = 1+\sqrt{1-4l^2}\quad \ldots\ldots \quad (4)$

$$m^2 = \frac{h(\varepsilon'-\varepsilon)}{\varepsilon(\varepsilon'-h)}\quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{z^2+4k^2(1-z)^2}{2-z}}$$

ist.

Wendet man nun das eben entwickelte Gauss'sche Quadraturprincip auf das vorstehende Integral an, dann erhält man nach einigen leicht erkennbaren Reductionen das Resultat:

$$T = (1+\theta)\pi\frac{k}{l}\sqrt{\frac{1}{g}}\quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

Die Größe θ ist bestimmt durch die Gleichung

$$1+\theta = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'-h}}\cdot\Phi(z_1)\quad \ldots\ldots \quad \text{V)}$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z}{2}}}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2-l^2}{k^2}z(2-z)-\frac{z^2(2-z)^2}{4k^2}}\\ z_1 &= \frac{\varepsilon' h\zeta_1}{\varepsilon'-h+h\zeta_1};\quad \zeta_1 = \frac{1}{m^2}\left(1-\frac{E}{K}\right)\end{aligned}\right\}\quad \ldots \quad \text{VI)}$$

K und E sind die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in der Legendre'schen Form für den Modul m.

Die Reihenentwicklung der Function $\Phi(z)$ und die Berechnung der Integrale a_2 und a_3 giebt nach Gleich. a) für die Fehlerfunction [1]) den Ausdruck

$$C_2 = -\frac{2-3(k^2-l^2)}{2k^2}\left[\tfrac{1}{3}\frac{2\zeta_1-1}{m^2}+(\tfrac{2}{3}-\zeta_1)\zeta_1\right]\frac{KK}{\pi}\cdot h^2\quad \ldots \quad \text{A)}$$

Dies ist für positive Werthe von k^2-l^2 zugleich die „obere Fehlergrenze“, wie die Betrachtung der Coefficienten λ_3, λ_4, etc. zeigt.

Für $\theta = 0$ geht die Gleichung IV) in die Gauss'sche Formel für unendlich kleine Schwingungen über. Die Function θ

1) Bei der Entwicklung von λ_2 konnten einige einflußlose Kürzungen angebracht werden, was jedoch bei den Hauptformeln V) und VI) unterblieb.

kann also nach einigen Vereinfachungen zur Fehlerschätzung bei der Verwendung dieser Formel dienen.

4.

Um die Genauigkeit der vorstehenden Formeln für die Bestimmung der Schwingungsdauer eines bifilaren Pendels von sehr ungünstigen Dimensionen anschaulich zu machen, habe ich die Rechnung für den Fall $l = \frac{1}{10}$ (die Länge der Fäden) $k = \frac{1}{8}$, $\alpha = 10^0$ durchgeführt, welche ich hier im Auszuge mittheile.

$$\varepsilon = 0{,}020\,204\,102\,86 \qquad \varepsilon' = 1{,}979\,795\,897\,14.$$

$$\lg(\varepsilon' - \varepsilon) = 0{,}292\,165\,612\,1 \qquad \lg h = 6{,}181\,654\,971\,0$$

$$\lg(\varepsilon' - h) = 0{,}296\,587\,089\,6 \qquad h = 0{,}000\,151\,934\,0$$

$$\lg m^2 = 7{,}871\,793\,922\,7 \qquad \lg K = 0{,}196\,930\,742\,6$$

$$\lg \frac{E}{K} = 9{,}998\,379\,030\,7 \qquad \frac{P}{K} = 0{,}996\,274\,537\,1$$

$$\lg \zeta_1 = 9{,}699\,386\,329\,3 \qquad \zeta_1 = 0{,}500\,479\,539\,8$$

$$\lg \Phi(z_1) = 9{,}999\,977\,4 \qquad \lg \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon' - h}} = 0{,}000\,032\,8$$

$$\lg(1+\theta) = 0{,}000\,824\,0 \qquad \theta = 0{,}000\,189\,9$$

$$C_2 = -0{,}000\,000\,054\,8.$$

Es ist also in diesem Falle

$$T = 1{,}000\,189\,9 \,.\, \pi \frac{k}{l} \sqrt{\frac{1}{g}} \,.$$

Die Correction C_2 bleibt wegen der Kleinheit ohne Berücksichtigung.

In dem nur selten eintretenden Falle, wenn C_2 einen beträchtlichen Werth annimmt, kann man unter Anderem auch in der Weise eine erheblich schärfere Bestimmung von T als die oben ausgeführte erhalten, daß man in dem vorliegenden Beispiel die Verzweigungspunkte

$$0,\; h,\; \varepsilon,\; 1 - \sqrt{1 + 2(k^2 - l^2) + 2\sqrt{(k^2 - l^2)^2 + k^2}},$$

$$1 - \sqrt{1 + 2(k^2 - l^2) - 2\sqrt{(k^2 - l^2)^2 + k^2}}$$

bei der Quadratur berücksichtigt. Die Rechnung würde aber dann auf Rosenhain'sche Functionen führen.

Berlin, 8. Febr. 1891.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

9. Juli. **№ 5.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Juni.

Klein legt eine Arbeit des Herrn Schilling vor: Geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie für den Fall complexer Argumente.

Riecke legt vor:

a. Eine eigene Arbeit: Zur Theorie der piëzoelektrischen und pyroelektrischen Erscheinungen.

b. Von Herrn Dr. G. Tammann: Ueber die Permeabilität von Niederschlagsmembranen.

c. Von den Herren Dr. G. Tammann und Dr. W. Nernst: Ueber die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird.

Kielhorn legt zwei Aufsätze vor:

a. Die Vikrama-Aera.

b. Die Nîtimañjarî des Dyâ Dviveda.

de Lagarde legt vor:

a. eine Mittheilung über Arabes mitrati.

b. über Samech

und spricht

c. über den Inhalt des 5. Stückes seiner Septuagintastudien, die er in der Sitzung vom 2. Mai angekündigt hatte.

de Lagarde legt eine Mittheilung des Herrn Professor E. Nestle vor: Eine denkwürdige Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften.

Weiland legt durch den beständigen Sekretär für den 37. Band der Abhandlungen die Abhandlung vor: Die Wiener Handschrift der Chronik des Matthias von Neuenburg.

Arabes mitrati.

Von

Paul de Lagarde.

In meinen Mittheilungen 1 61 habe ich die Vermuthung ausgesprochen, das arabische تاج = tâǧ aus tâg, das armenische Թագ = *θαγ* in Թագաւոր = *θαγαvor* *Kronenträger*, *König* verhalte sich zu dem assyrischen agû *Krone* (das 1881 noch für ursprünglich sumerisch galt) wie tapdû tamlû zu den entsprechenden Stämmen. Ich erwähnte, daß nach einer Mittheilung PHaupts bereits vor mir an einen Zusammenhang der Wörter تاج und agû gedacht worden war, ohne daß man ihn hätte erklären können. Jetzt Friedrich Delitzsch, assyrische Grammatik § 65_{32}. Uebersicht 206_{25}.

Schon 1857 hatte JOppert ZDMG **11** 135 die Yaunâ takabarâ der Grabinschrift Darius des ersten, indem er sich auf die medoscythische und assyrische Uebersetzung des Textes berief, *bezopfte Ionier* übersetzt, da im Vendidad taka für *Pferdeschweif* gebraucht werde. 1864 wird in FJustis Handbuch der Zendsprache 130[1] ein awestisches taka *Pferdeschweif* nicht verzeichnet, aber noch 1882 bietet in seiner Ausgabe des babylonischen Textes der Achaemenideninschriften 34 35 Zeile 18 CBezold nach Oppert

Iamanu šanutú ša magiduta ina ķaķķadišunu našúu:

andere Ionier, welche Flechtwerk auf ihrem Kopfe tragen.

1881 lieferte FvSpiegel, die altpersischen Keilinschriften 219, unter Berufung auf Oppert takabara *Kronen oder Flechten tragend*, und FJusti hat GGA 1882_{483} ff. dazu keine Bemerkung gemacht, obwohl die Kürze des ersten a von takabara vielleicht einer Erklärung bedurfte.

Um vollständig zu sein, füge ich Stellen bei, die mir meine Erinnerung bot, und Estienne zu ergänzen gestattet hätte. Thucydides α 6 *᾿Αθηναῖοι χρυσῶν τεττίγων ἐνέρσει κρωβύλον ἀναδούμενοι τῶν ἐν τῇ κεφαλῇ τριχῶν* [wozu der Scholiast (bei Schöne[1]) 9) *κρωβύλος ἐστὶν εἶδος πλέγματος τῶν τριχῶν, ἀπὸ ἑκατέρων εἰς ὀξὺ ἀπολῆγον*]· *ἀφ᾿ οὗ καὶ ᾿Ιώνων τοὺς πρεσβυτέρους κατὰ τὸ συγγενὲς ἐπὶ πολὺ αὕτη ἡ σκευὴ κατέσχεν*. Estienne hat die andere Hälfte dieses Satzes nicht ausgeschrieben, die Dindorf haben sie charakteristischer Weise nicht ergänzt, und JOppert wie FrSpiegel sagen von der ganzen Stelle und von der Sache nichts: vor Paul Güßfeldt gebildet

1) der einst in meinem Hause Thuc. ε 50 βίᾳ θύσωσι in βιασθῶσι änderte.

wie sie sind: was wird erst nach Paul Güßfeldt werden? Xenophon Anabasis ε 4 13 εἶχον κράνη σκύτινα κρωβύλον ἔχοντα κατὰ μέσον ἐγγυτάτω τιαροειδῆ, wo also der κρωβύλος nahezu Tiaraförmig heißt. Neben κρωβύλος hat Hesychius κροβαλός, das MSchmidt in der kleineren Ausgabe 927 allerdings an den Rand verwiesen hat. Ich suche in der ersten Sylbe dieser Vokabeln शिरस् *Kopf*, und vergleiche սաղաւարտ = σαλαvαrτ *Helm*, woraus ich schon 1848 ܣܪܒܠܐ erklärt hatte: wenn PSmith aus meinen gesammelten Abhandlungen 72 180 unter Beschweigung des սաղաւարտ berichtet, ich habe سربند verglichen, so verleumdet er. Sarabara capitum tegmina, Isidorus ιθ 23: סַרְבָּל Daniels? gesammelte Abhandlungen 206 16 ff., armenische Studien § 1937.

Ueber das aus ж entstandene ճ des Armenischen habe ich in den Mittheilungen 2 26 ff. gesprochen: ich darf es mit gleichem Rechte ǧ wie č umschreiben.

Տաճիկ = Taǧik der Armenier ist eine arsacidische Vokabel, das i derselben lang. NeuPersisch muß Տաճիկ تاجى oder تازى lauten. Eine Erklärung dieser Vokabeln ist nur dann richtig, wenn sie alle beide erklärt, da die Identität der Wörter nicht zu bezweifeln ist.

Տաճիկ Ἄραψ Maccab. β 12 10, der Isaias 13 20 15 7 9 Արաբացի heißt (armenische Studien § 231, wo nachgewiesen wird, daß der Akademiker FchMüller die Uncialen Յ = յ ж und Ց = ց ʒ nicht hat unterscheiden können). Das große Venediger Wörterbuch, das auch die Gleichung տաճիկ = تازى bietet, weist 2 842[2] nach, daß տաճիկ Synonymum von Agarener, Saracene ist.

Տաճիկ übersetzt Ciakciak 1355[1] außer durch *Arabo* auch durch *di veloci piedi*, *di rapido corso*. Er irrt: vermuthlich auf Grund der im großen Wörterbuche 2 842[2] gegebenen Materialien. Die Scheidung zwischen haikischem, arsacidischem und sasanidischem Sprachgute, die ich für das Armenische 1866 in den gesammelten Abhandlungen 298 habe eintreten lassen, und die mir plaudente plebe doctâ in so bubenhafter Weise gestohlen worden ist, bewährt sich auch hier. Թաղել = θαζel, ein vulgärarmenisches Wort, zeigt durch sein Թ = θ wie durch sein ղ für ճ, daß es einer anderen Periode der Sprache als տաճիկ = ταčικ angehört. Թաղել ist allerdings ein persisches تاختن *laufen*, aber weder der Lautbestand noch das Suffix իկ = ى gestattet, տաճիկ mit تاختن zusammenzubringen. Ein ձի տաճիկ ist ein arabisches Pferd.

Endlich տաճկինակ *Kantschuh*, angeblich auch *Bastonade*, ist das persische تازيانه *Geißel*, *Peitsche*, ein Wort, das der von JMohl einst angekrönte JoAuVullers mit تاختن und تازيدن, wie es scheint als

das laufen machende, zusammenbrachte, das aber leicht *Arabisch* bedeuten kann: die Semiten sind ja gegen unterworfene Völker nie sehr gütig gewesen.

Maccab. β 3_5 $4_{4\,22}$ steht Tačkastan für *Φοινίκη*, armenische Studien § 2182.

Wie *Φοινίκη* vom Armenier so übersetzt werden konnte, muß erklärt werden.

Theodoret kennt in der von mir in meiner Uebersicht 91 ausgehobenen Stelle einen in *Φοινίκη* gesprochenen aramäischen Dialekt. Ich habe die über Derartiges nicht unterrichteten Leser meines Buches auf die Notitia dignitatum, Orient § 32, verwiesen. Das genügt für Menschen, die wissen, daß ein Citat gegeben wird, um nachgeschlagen zu werden. Hier berufe ich mich noch auf Partheys Hierocles § 51 52 und Leos in den Mittheilungen 2 176 von mir benutzte *τάξις τῆς προκαθεδρίας τῶν ἁγιωτάτων πατριαρχῶν.*

Es gab zwei *Φοινίκη*, die *παραλία* und die *λιβανησία*. Erstere lag da, wo jeder Schuljunge Phoenicien sucht, die andere enthielt die Städte Emesa, Laodicea (natürlich nicht die Küstenstadt, sondern das südlich von Emesa belegene: KFurrer ZDPV 8 31, Schürer [2]1 597), Damascus, Heliopolis = Baalbekk, Abila (*Ἀβελὰ τῆς Φοινίκης μεταξὺ Δαμασκοῦ καὶ Πανεάδος* Eusebius in meinen OS [2] 243_9), Palmyra. Das *κλίμα Ἰαβρούδων* [Parthey falsch *Ἰαμβρούδων*] liegt um Yabrûd, SocinBenzinger 377, ohne daß die Angabe Leos 990, es habe zu *Φοινίκη* gehört, uns viel hülfe: wichtig ist das *κλίμα Μαγλούλων* (denn so muß man für *Μαγλούδων* Partheys lesen), da es beweist, daß *Φοινίκη* weit nördlich über Damascus hinausgriff (Fischer-Guthes Karte 36° 32′ O), da es den Syrern als ܡܓܠܘܠܐ bekannt ist, WWrights catalogue 1344, da es noch in später Zeit غ zeigt.

Die notitia dignitatum kennt equites Saraceni indigenae als Garnison von Betproclis, und equites Saraceni als Garnison von Thelsee. Nur in großem Zusammenhange wird die Frage beantwortet werden können, wann Araber in der *Φοινίκη λιβανησία* so zahlreich wurden, daß man die Provinz Tačkastan *Araberland* nennen durfte.

Das zweite Buch der Maccabäer setzt voraus, daß *Φοινίκη* nicht *κοίλη Συρία* ist, zu der doch nicht wenige der oben aufgeführten Städte gezählt werden müssen. Für den Historiker bleibt hier also noch viel aufzuklären. Für die Armenier scheint *Φοινίκη Araberland* nur in einer Zeit haben heißen zu können, in der ihnen Mitren tragende Araber nur aus der *Φοινίκη λιβανησία* bekannt waren.

Plinius ς 162 Arabes mitrati degunt aut intonso crime. barba abraditur praeterquam in superiore labro: aliis et haec intonsa.

Das heißt, ein Theil der Araber trug den tâǧ, und hieß daher tâǧî, was im pahlawî taǧik lauten mußte.

Wie dieser tâǧ ausgesehen hat, weiß ich nicht. Der Titel des Wörterbuchs tâǧ alârûs *die Brautkrone* [EWLane, ZDMG 3 91 93] weist darauf hin, bei Hochzeiten sogar neuerer Zeit ein Bild des alten tâǧ aus der Zeit des Aelius Gallus zu suchen: denn Hochzeitsgebräuche erhalten sich. Allein EWLane, manners and customs of the modern Egyptians, sagt 1 210 nur Upon the head of the bride is placed a small pasteboard cap, or crown. Daß die griechische Kirche für die ihr angehörende Braut ebenfalls eine Krone braucht, soll angemerkt werden.

Die Araber gelten für ein kriegerisches Volk, haben aber nach Wetzsteins Zeugnis die Vorsicht stets für den besseren Theil der Tapferkeit erachtet: die mitra, die einige von ihnen täglich trugen, war gewis kein Helm. Wie der Helm ausgesehen haben kann, muß sich nach der Waffe entscheiden lassen, gegen die er zu schützen hatte, und nach der Art, in der diese Waffe geführt wurde. Ich weiß darüber nichts, wenn es sich um die Zeit des Aelius Gallus, überhaupt um die ältere Kaiserzeit handelt.

Denn die arabische Litteratur ist jung. Alle Welt weiß wann Muḥammad gelebt hat: und was an arabischen Schriften älter als Muḥammad wäre, wie viel und wie authentisch ist es? Ein Paar Notizen über die Helme der Araber gibt GWFreytag, Einleitung in das Studium der arabischen Sprache, 255. Später entlehnten die Araber κῶνος als قونس, meine Symmicta 1 59 $_{24}$ [1871], SFränkel, die aramäischen Fremdwörter im Arabischen 54 241 [1886] [1]).

Das persische تاجيك oder تازيك ist offenbar mit Տաճիկ identisch: es bezeichnet Ureinwohner Erâns, solche die in Erân weder Araber noch Türken sind. EQuatremère hat zu Maqrîzîs histoire des sultans mamlouks 2² 154 schon 1845 Տաճիկ تازى und تازيك für identisch erklärt. Ich habe nie etwas Anderes in diesen Tâǧîk gesehen, als Leute, welche die altpersische Kopfbedeckung gegen den Fez und Turban der semitischen Eroberer beibehalten haben.

EQuatremère erklärt anders. Er leitet die Worte von طى ab (er schreibt طاى), dem Namen einer Gruppe arabischer Stämme, der den Syrern ܛܝܝܐ *Araber* geliefert habe. Wie »Leute, die weder Araber noch Türken sind« und in OstErân wohnen, von dem arabischen Stamme Θayy haben benannt werden können, wie aus طى je تازيك = تازى hat entstehn können, das dürfen wir den gelehrten

1) Herr Fränkel durfte 238 meine gesammelten Abhandlungen 24 $_{29}$ und die armenischen Studien § 524 für ܓܘܕ (in deutschen Eigennamen [auch *Gott* ist aus Eran entlehnt] Gund-), 239 meine Beiträge 75 $_{10}$ ff. für عسكر = لشكر nicht anführen.

Mann nicht fragen, der nicht einmal an رازی = *Einwohner von Rai* [= راجی, ClHuart, JAP 1885 2 502] als Parallele zu seinem تازی طی gedacht hat. سکزی = *սագճիկ aus Sacastene gebürtig* heißt Rostom = *Uruçtataḳma, Symmicta 1 120₂₄. Auch Ḳâqânîs von Khanykow JAP 1864 2 155 nicht verstandenes₈ مرغزی gehört hierher: es ist soviel wie مروزی Yâqût 4 507₇ *Margianer* (die gewis sehr boshafte Aeußerung Ḳâqânîs verstehe übrigens auch ich nicht). Ich vermuthe, daß زی = جی in راجی = رازی ungefähr dasselbe sei was زی in den Namen der awġânischen Stämme ist. Das زی der Kurden wechselt mit زا, da PLerch in den Mélanges asiatiques 2 631 berâzi *Neffe väterlicher*, xoarzi *Neffe mütterlicher Seite* schreibt, wo Justi 41[2] brâzâ brâza, 161[1] kvárzá bietet, und auf persisch برادرزاده und خواهرزاده deutet: bei Socin, Curdica 1 285 finde ich brâzîk *Nichte*.

Ich darf nicht wagen, die Gestalt der von den Arabern getragenen Mitren näher anzugeben: schon ARichs Wörterbuch des römischen Alterthums genügt zu erweisen, daß die Alten verschiedene mitrae kannten. Der den Darius begleitende Perser der Mosaik von Pompeii hat eine andere mitra als Paris und die Amazonen. Robert Sinker gibt in dem Dictionary of christian antiquities viel Material und die wichtigste Litteratur.

تغفور gesammelte Abhandlungen 84₈, تكفور Quatremères Maqrîzî 2 2₁₉₀.

Samech.

1

Der Name Samech findet sich als *Σάμεχ* dann und wann bei 𝔊, wo ein alphabetisch geordnetes Stück ihn zu nennen räth. Er findet sich in Folge davon auch bei christlichen Theologen, griechischer wie lateinischer Zunge. Samech mandatum humile, Hieronymus OS[2] 51₁₂. Samech firmamentum: quidam erectionem vel adiutorium sive fulturam putant, ebenda 79₂₉. Samech firmamentum, licet quidam erectionem vel adiutorium vel fulturam putant, ebenda 191₉. Samech enim auxilium nostro sermone vocatur, die alte Murbacher Hds. in meinem Psalterium Hieronymi xiv₁₅. Vergleiche Omont bibliothèque de l'école des chartes 1881₄₂₉, JBonnard revue des études juives 4 255, ADarmesteter ebenda 259. Isidorus Origines ϛ. Hieronymus, Brief an Paula über Psalm ριη, Vallarsi[1] 1 144 ff., Ambrosius expositio in psalmum cxviij § 15, und die meist nur aus diesen zweien schöpfenden späteren Ausleger der Psalmen.

Zur Deutung צו מך mandatum humile[1]), G סָמַךְ ἐστήριξεν und

1) לצו צו Isaias 28₁₀ übersetzt Symmachus ἐντολὴ οὐκ ἐντολή, hat also in ל

dessen Zusammensetzungen, *ἐπέθηκεν*, *ἀντελάβετο*, *ἀπηρείσατο*: siehe Konrad Kirchers Concordanz. Ueber ܣܡܟ belehrt PSmith. Ein arabisches Aequivalent fehlt. *Σίγμα* müßte [§ 11] * סִמְכָה sein = dem archaischen (das Femininum noch durch ܬ ausdrückenden) ܣܡܟܬ.

2

Ich bin Historiker, meine Gegner sind Rationalisten. Unbequem für beide Theile ist, daß ich als Historiker durch einen Bericht über die Thaten meiner Vorgänger meine Versuche als erlaubt nachweisen muß.

Ueber ס reden HEwald[8] § 50 und FBöttcher 1 § 148 hin und her. IOlshausen schweigt. Herr BStade belehrt uns § 68

ס verhält sich zu ת wie ז zu ד, es entspricht unserem tonlosen *s*,

ohne zu wissen, daß in naturâ rerum ד sich zu ז verhält, wie ת zu שׁ, und daß in der Lehre von den Dentalen, Assibilaten, Sibilanten ס gar keine Rolle spielt. Herr König Seite 35

ס ist der tonlose Sibilant, das anlautende *s* im Deutschen.

Man sollte meinen, daß die Herrschaften Moses, David, Isaias, Aggaeus, diese durch viele Jahre von einander getrennten und doch die Buchstaben gleich aussprechenden Männer, bei sich zu Tische gehabt haben, oder daß sie vorEdisonsche Phonographen besitzen, in denen das von jenen Hineingesprochene jeder Zeit erweckbar aufgespeichert liegt.

3

Die Erfinder der semitischen Schrift haben die Entdeckung gemacht, die Consonanten ihrer Rede seien aus dieser Rede als Consonanten ausscheidbar, die Griechen sind ihnen mit der anderen Entdeckung gefolgt, daß es Vokale *α ε η ι ο* gebe, und sie haben den Muth gefunden, *θέσει* die Consonantenzeichen der Semiten א ה ח י ע, für welche sie eine Verwendung in ihrer Consonantenschrift nicht hatten, zu Zeichen der Vokale zu machen.

Was nach der Ausscheidung der zu Vokalen erklärten א ה ח י ע im phoenicischen Alphabete übrig bleibt, entspricht von *β* bis *τ* der Reihe nach den Consonanten der Hellenen.

4

Bemerkungen sind hier nur zu ס ץ ש zu machen.

Ich setze die bekannten Stellen her, auf die es ankommt.

---

die Negation לא gesehen, wie ich Mittheilungen 3 257[r] in dem mit langem a gesprochenen ל des Namens ܠܥܙܪ *Λάζαρος*. Isaias 33$_{21}$ derselbe Symmachus צי *ἐντολή*. Da von צוה II kein Nomen çav herzuleiten, und Isaias 33$_{21}$ צי überliefert ist, muß Symmachus צִי gelesen haben, das sich zu צוה verhält wie כי *Brandmal* zu כוה, wie צי *Steppe* zu צהה. Daß מך = ܡܟܝܟ *ταπεινός* sein kann, folgt aus Levit. 25$_{39}$ 27$_{8}$ und aus Aquilas מכתם *ταπεινόφρων καὶ ἁπλοῦς* Psalm 16$_{1}$.

Herodot berichtet *α* 139 von den Persern *τὰ οὐνόματά σφι ἐόντα ὁμοῖα τοῖσι σώμασι καὶ τῇ μεγαλοπρεπείῃ, τελευτῶσι πάντα ἐς τὠυτὸ γράμμα, τὸ Δωριέες μὲν σὰν καλέουσι, Ἴωνες δὲ σίγμα. ἐς τοῦτο διζήμενος εὑρήσεις τῶν Περσέων τὰ οὐνόματα, οὐ τὰ μέν, τὰ δ᾽ οὔ, ἀλλὰ πάντα.*

Herr FrSpiegel hat 1867 in seiner Grammatik der altbaktrischen [wo gibt es NeuBaktrisch?] Sprache § 47 48 104 und 1881 in seinem Buche über die altpersischen Keilinschriften[2] 172[1]) die Notiz Herodots nicht erwähnt. Herodots Angabe wird durch den Befund nicht bestätigt, soweit der Awesta und die Keilinschriften in Betracht kommen. Nur auf *u* oder *i* ausgehende Mannsnamen haben einen auf einen Sibilanten ausgehenden Nominativ. Das alte Testament aber zeigt, daß wenigstens auch der Name des Xerxes[2]) der von Herodot aufgestellten Regel folgte: denn zu כֹּרֶשׁ = Kuru-š und דָּרְיָוֶשׁ = Dârayâwu-š gesellt sich אֲחַשְׁוֵרוֹשׁ als Nominativ von kšayâršâ = շաւարշ armenische Studien § 1688 [persische Studien 76].

ܡܓܘܫ der Syrer kann *μάγος* sein, wie ܐܕܘܫ *εἶδος* ist, und ܦܘ̈ܫܐ *παῦσαι*: es kann aber auch aus der Beobachtung Herodots erklärt werden. ܥܫܪ aus *αἰσχρός*.

Aus Herodots Worten folgt, daß dorisches *σαν*, ionisches *σιγμα*, das Nominativzeichen der persischen Mannsnamen und das ש der Hebräer einen und denselben Laut hatten.

Athenaeus bespricht *ια* 30 die *γραμματικὰ ἐκπώματα*, und citiert dabei Verse des Tragikers Achaeus, in denen *σαν* als ein im Namen des Gottes *Διώνυσος* vorkommender Buchstabe erwähnt wird.

---

1) Eine Schmach für Deutschland ist es, daß Spiegel noch 1881 Seite 139 dem verstorbenen ChrLassen »die Entdeckung« zuschreiben kann, daß »die bei Niebuhr mit I bezeichnete Inschrift ein Völkerverzeichnis enthalte«. Nicht ChrLassen hat das entdeckt, sondern Eugène Burnouf. Dies aufs Neue hervorzuheben, ist gerade jetzt Pflicht, da EBurnoufs Briefe, von seiner Tochter gesammelt, so eben erschienen sind, und das Bild des edlen Mannes, der von einem in Deutschland wohnenden Norweger so ehrlos bestohlen worden ist, frisch vor die Seele rufen. Ich habe schwer dafür zu leiden gehabt, daß ich im Januar 1854 vor dem Hefte »zur Urgeschichte der Armenier«, nachdem AHoltzmann aus Lassens eigenhändigen Briefen an PvBohlen des Bonner Professors Büberei öffentlich erwiesen hatte, den Satz drucken hieß »Nur einen großen Diebstahl hat die Zunft ohne obligate sittliche Entrüstung gelassen«. Meine Symmicta 2 129 ff., Mittheilungen 2 314 ff.. Lassens an PvBohlen geschriebener Satz »Burnouf hat die Namen aller altpersischen Provinzen aus einer der großen Keilinschriften entziffert« geht eben auf Niebuhrs I, die bei Herrn von Spiegel auf Seite 49 abgedruckt steht.

2) Herodot ς 98 ist von mir in den gesammelten Abhandlungen 182 besprochen worden: ich wünschte wohl, daß ein Philologe sich ansähe was da steht: es ist mit dem 45 Gesagten, mit Purim 51 ff. 40[r] und Agathangelus 136 ff. zusammen zu benutzen.

Die bei Achaeus sprechenden *Σάτυροι*

> *τὸ σὰν ἀντὶ τοῦ σίγμα δωρικῶς εἰρήκασιν. οἱ γὰρ μουσικοί, καθάπερ πολλάκις 'Αριστόξενός φησι, τὸ σίγμα λέγειν παρῃτοῦντο διὰ τὸ σκληρόστομον εἶναι καὶ ἀνεπιτήδειον αὐλῷ, τὸ δὲ ῥῶ διὰ τὸ εὔκολον πολλάκις παραλαμβάνουσι. καὶ τοὺς ἵππους τοὺς τὸ* ϶ [1]) *ἐγκεχαραγμένον ἔχοντας σαμφόρας καλοῦσιν*,

was aus des Aristophanes Wolken 122 belegt wird.

> *καὶ Πίνδαρος δὲ φησὶ*
>
> *πρὶν μὲν εἶρπε σχοινοτένειά τ' ἀοιδὰ*
> *καὶ τὸ σὰν κίβδηλον ἀπὸ στομάτων.*

Es darf aus Herodots Worten allerdings gefolgert werden, daß *σὰν* und *σίγμα* ihm als gleichlautend galten. Aus den von Athenaeus beigebrachten Zeugnissen des Aristoxenus ergibt sich aber das Gegentheil: diesem Sachverständigen ist *σαν* für die Musik bequemer als *σιγμα* erschienen. Distingue tempora [et regiones], et concordabit scriptura.

Später ist *σαν* der am WortEnde, *σιγμα* der in der Wortmitte stehende Sibilant. Philosophumena ς 49: vergleiche Epiphanius *λδ* 8, Irenaeus *α* 8_{11} = *α* 12_{1} = *α* 15_{1}.

5

צ ist wie ש und ס in die Alphabete Griechenlands und Italiens übergegangen: es ist hier nicht meine Aufgabe über צ zu sprechen, da eine Verweisung auf AKirchhoffs bekanntes Buch und auf WCorssens Werk über Aussprache, Vokalismus und Betonung der lateinischen Sprache² 1 277 für mich ausreicht. Ich merke an, daß 𝔖 den Namen des צ *τσαδη*, Hieronymus (ich habe nur wenige Hdss. zur Verfügung gehabt) OS² 79_{1} 191_{12} Sade schreibt, und füge zu den in den Mittheilungen 1 234 384 von mir veröffentlichten Gleichungen צְרִי ضرو [Uebersicht 179ʳ 2_{8}] *στύρ-αξ* und חֵץ *ὀϊστός* die neue [illegible] *ἄγρωστι-ς*. Ueber die צ und ש vertretenden griechischen Zeichen wird meinem Leserkreise genügen was mir selbst genügt hat, Boeckhs Staatshaushaltung der Athener, an den durch das Register der anderen Ausgabe unter *Σ* zu suchenden Stellen.

6

Wie sich *σίγμα* und *σαν*, ס und ש wirklich zu einander verhalten, wird zu erforschen sein: aber man kann ohne Maßstab nicht messen. Man kann dies Verhältnis untersuchen, indem man ס und ש haltende Wörter untersucht, die in nichtSemitischer Schrift — der aegyptischen, assyrischen, griechischen — aufgezeichnet sind,

---

1) Ich habe ϶ eingesetzt, ich hätte auch ש einsetzen können. Noch Kaibel druckt C.

und indem man zweitens innerhalb des Semitismus studiert, wie ס שׂ שׁ sich zu einander verhalten.

Aber was wissen wir von der Aussprache der aegyptischen, assyrischen, griechischen Buchstaben?

Ich stehe der Aegyptologie und Assyriologie als Laie, aber doch mit dem Bewußtsein gegenüber, daß der Stand unserer Kenntnisse noch nicht hoch genug ist, um für Untersuchungen wie die hier zu führende, weit genug sehen zu lassen. Die Eine Bemerkung, die GSteindorff in den von FDelitzsch und PHaupt herausgegebenen Beiträgen zur Assyriologie 1 344 über einen der verständlichsten Eigennamen פתרס = Patarisi = peterês *Südland* macht, wird zu meiner Entschuldigung ausreichen. Ich will aber noch hinzufügen, daß mir ein š in den Pronominibus šu ši šunu (Delitzsch § 56) gegen היא הוא هم an und für sich, und darum unwahrscheinlich ist, weil das altAegyptische bei Adolf Erman, die Sprache des Papyrus Westcar 21, als Aequivalent des »šunu« sn zeigt: ich kann mich von dem Glauben nicht losmachen, daß das älteste Aegyptische mit dem Semitischen näher zusammenhängt, als jetzt angenommen wird. Ich halte es für sehr schädlich, daß man sich gewöhnt hat, das Assyrische uns nur in lateinischem Gewande vorzustellen: der Entscheidung des Lesers ist dadurch noch weit schlimmer als in den von mir in den Mittheilungen 1 157 zur Sprache gebrachten Fällen (ج und ر) vorgegriffen: die Originalgestalt des Assyrischen nach den großen Londoner Drucken zu ermitteln habe Ich keine Muße.

Հերիսայ = עֲרִיסָה neben إِصْبَع Mittheilungen 3 208. ج = ش שׁ ϣ Mittheilungen 2 15 3 23 4 192 und sonst.

Ich habe früher, wann ich für שׁ š setzte, nie einen Vorbehalt gemacht, da ich die allgemeine Annahme, daß שׁ š bedeute, als Theologe zu untersuchen keine Veranlassung gehabt hatte. Jetzt mache ich einen Vorbehalt, weil ich nicht mehr für sicher halte, daß שׁ den Laut š = sch überall und von jeher gehabt hat.

Ich habe 1883 (jetzt Mittheilungen 1 152) aus des IFaber Stapulensis Psalterium (das 1509 erschien) die Notiz ausgezogen, daß die am Rheine vorkommenden Juden für שׁ š, die spanischen Juden s sagten. Herr DKaufmann »machte« den Herrn DHMüller, der natürlich von dem so eben Citierten nichts wissen darf, »aufmerksam« [derselbe Idiotismus wie im Dialekte von OberSitzko, Mittheilungen 2 179], daß die in Littauen wohnenden Juden שׁ wie s, שׂ wie š sprechen. Seit 1864 konnte man aus ZDMG 18 338 ff. [jetzt HLFleischer »kleinere« Schriften 3 436 ff.] wissen, daß die im Maġrib (dem Kaiserreiche Marokko) vorhandenen Juden, wann sie (was

oft geschieht) arabisch mit hebräischen Buchstaben schreiben, ס für ص und ش, ק für س, ש für س setzen. Fleischer macht die Bemerkung

Die Vertauschung des . . . ش mit س und des س mit ش

das ist elend unlogisch ausgedrückt

gehört speciell dem Jüdisch-Arabischen

so steht wirklich da

an, und es ist merkwürdig, daß zwischen den beiden . . . Buchstaben hier dasselbe Verhältniss wie im Althebräischen und Arabischen wiederkehrt.

Auch hier läßt die Logik grüßen.

Fleischer versichert die Sache »merkwürdig« zu finden, wie er denn je und je auf dem Standpunkte der MirabiliaSchreiber gestanden hat, und meint damit alles Nothwendige gethan zu haben.

Auf das von mir am 15. 4. 1887 (Mittheilungen 2 259) über ش س Vorgetragene dürfen die kleinen Semitisten nicht Rücksicht nehmen, da sonst der Ruhm der »großen« Semitisten in die Brüche gienge. Das Alphabet dient auch als Zahlzeichenreihe. Auf ن = ν = 50 folgt im Naskî سعفص قرشت, in der Schrift des Maġrib, die ich auf das Kûfî zurückgeführt habe, صعفض قرست. Das heißt für den, der so etwas zu lesen versteht, ס ist bei einem Theile der Araber durch س, bei einem anderen Theile durch ص, ש bei einem Theile der Araber durch ش, bei einem anderen Theile, der ش als neu erfundenen Buchstaben an das Ende des Alphabets stellt, durch س vertreten.

Ich habe im Mai 1882 ϛ, das Ende des Wortes ἀριθμός, also das oben aus den Philosophumena von mir nachgewiesene σαν, als das Vorbild des ش erkannt, durch das die arabischen Mathematiker die Unbekannte bezeichnen: ich habe vermuthet, daß ش 𝔰𝔢𝔦 genannt worden, und so شي = cosa (die Kos des sechszehnten Jahrhunderts) der Name für die Unbekannte geworden sei. Ξ hieß nicht ξι, sondern ξει: der Murbacher Psalter vor meinem Psalterium Hieronymi xv 16 xei gradum viduae moderatur rite secundum, wozu ich der ersten Facultät durch Citierung der Constitutiones γ 1 zu der Uebersetzung verhelfen zu müssen geglaubt habe »Eine Witwe darf nicht vor ihrem sechzigsten Lebensjahre in das χηρικόν der Kirche aufgenommen werden«. Ich will erwähnen, daß die Syrer εἶδος als ܐܝܕܘܣ haben, wo ܝ nur Lesemutter ist: auffällig ist (mit Artikel) ܐܝܕܐ.

Die Juden des Maġrib haben nicht in der Schrift »س mit ش, س mit ش, ص mit س« vertauscht, sondern sie haben ס bald wie ص, bald wie ش, ק w ie ض [punktiert], ש wie س auszusprechen gelernt. Das heißt, die ihnen gewordene Ueberlieferung war eine andere als die Schule des †† Gesenius und Ewald, die sich grundsätzlich um

Geschichte nicht kümmert, annimmt. Hingegen eine andere Ueberlieferung anders dachte.

Welche der beiden vorhandenen Aussprachen die ursprüngliche ist, weiß noch Niemand, wird vielleicht auch nie jemand wissen. Die Frage nach den »Sibilanten« der semitischen Sprachen wird aber nicht eher beantwortet werden dürfen, als bis der von mir gestellten Vorfrage ihr Recht geworden sein wird. Die Wahrheitsliebe unserer »großen Männer« ist nicht erheblich: man wird sich schon Zeit nehmen und vorläufig zu der Waffe greifen (deutsche Schriften, Vorrede), die am nächsten liegt.

Wenn ich nun auf das Edessenische und das Targumische Bezug nehme, so finde ich, daß in

שְׂבָכָה	شبكة	ܣܒܟܐ [σαβαχα 𝔊 Regn. δ 25_{17}]
שָׂבֵעַ	شبع	ܣܒܥ
שָׂהֵד	شهد	ܣܗܕ
שָׂב	شب	ܣܐܒ
שִׂיחַ	شيح	ܣܝܚ [Orientalia 2 53 ff.]
שְׂמֹאל	شمال	ܣܡܠܐ
שָׂנֵא	شنئ	ܣܢܐ [𝔗 besser סני]
שֵׂעָר	شعر	ܣܥܪ
שָׂפָה	شفة	ܣܦܬܐ [oft ܣܦܬܐ ܒܣܦܬܐ : PSmith]

שׂ von den im Maġrib und in Littauen wohnenden Juden so gesprochen worden ist, daß sein Laut mit dem in den entsprechenden arabischen Vokabeln gebrauchten identisch war, daß ihm aber im Aramäischen, sowohl dem Edessas wie dem Palaestinas (denn der Targum ist in Palaestina zu Hause, nicht in Babylonien) ein ܣ ס gegenübersteht.

Wenn ich danach folgende Reihe überlege

שָׁאַל	سال	ܫܐܠ
שָׁבֵעַ	سبع	ܫܒܥ
שִׁבֹּלֶת	سنبلة	ܫܒܠܬܐ
שָׁלֹם	سلام	ܫܠܡ
שָׁנָה	سنة	ܫܢܬܐ

so erhellt, daß שׁ von den im Maġrib, in Spanien, in Littauen wohnenden Juden so gesprochen wurde, daß sein Laut mit dem in den entsprechenden arabischen Vokabeln identisch war, daß ihm aber im Aramäischen, sowohl dem Edessas wie dem Palaestinas, ein ܫ gegenübersteht.

Daß die Juden Littauens mit denen Maroccos und Spaniens übereinstimmen, ist ein Beweis dafür, daß wir es mit einer wirklichen

Ueberlieferung zu thun haben. Es muß untersucht werden, »woher haben die am Rheine angesiedelten Juden den ihnen 1509 von Jacques Lefèvre d'Étaples bezeugten Laut š für שׂ?«.

Was Herr Schreiner in des Herrn Stade Zeitschrift **6** 213—259 »zur Geschichte der Aussprache des Hebräischen« geschrieben, hilft uns sehr wenig.

Wären nicht die littauischen Juden, so wäre vielleicht die Annahme gestattet, daß die unter Arabern wohnenden Israeliten שָׂהֵד darum šáhéᴅ lasen, weil die Araber ihnen alle Tage šahida vorsprachen. Man kann aber auch behaupten, die nach Deutschland verschlagenen Juden seien aus aramäischen Gegenden hergekommen, und hätten dort שָׂהֵד nach ܣܗܶܕ gemodelt. »Auffassen« läßt sich Alles.

In den von französischen Juden hebräisch geschriebenen Büchern finden sich französische Vokabeln in hebräischer Schrift. Ein Glossar, das her gehört, ist durch Herr ANeubauer im ersten Bande der romanischen Studien des Herrn Boehmer veröffentlicht worden: zusammenfassend arbeitete Herr Darmesteter, glosses et glossaires hébreux français [Paris 1878] (über ihn ABerliner in meinen Mittheilungen **2** 290ʳ). Man wird in diesen Glossen und Glossaren für das französische s nicht ס, sondern שׂ finden.

Spanien liefert ähnliches Material.

Natürlich wird man die »rabbinische« Bibel, die man besitzt, bei Iudices 12 ₆ einsehen. Ich gewinne dadurch aus Yiçḥáqî (Buxtorf Blatt רעח ᵛ), daß die Ephraimiten מגמגמין: und David Qamḥî (ebenda) braucht denselben Ausdruck: Levy ² **1** 339 vergleicht جمجم [= *he spoke indistinctly* Lane 449 ¹ = غمغم Lane 2289 ³, Ḥarîzî Durra bei SdeSacy Anthologie 64 ₁]. David Qamḥî macht dann die mich hier viel angehende Bemerkung über die Ephraimiten אולי היה אויר ארצם גורם להם זה כמו אנשי צרפת שאינן מבינים לקרא השין וקוראין אותה כמו תיו רפה. Diese Stelle citiert Lipman Zunz, die synagogale Poesie des Mittelalters 2 [= die Ritus des synagogalen Gottesdiensts] 55 ohne sie auszuschreiben (ich verdanke das Citat Herrn Schreiner ZATW **6** 258 ʳ), wo er lehrt

in Aegypten, Palästina, Magreb, überhaupt bei den mostarabischen

مستعرب hier nicht christiano, sondern Judeo mezclado con los Alaraves, meine Evangelien arabisch xvj: ein in Deutschland lebender Jude wäre مستنمسى

Gemeinden, wie man im Gegensatze zu den aus Europa eingewanderten die Eingeborenen in Aegypten, Tripolis, Syrien nennt, die später auch unter dem Namen Moriscos vorkom-

men. Sie unterscheiden sich in manchen bürgerlichen Einrichtungen, in der Sprache, in der Aussprache des Lautes Schin, welches die spanischen und französischen nicht von Sin unterschieden.

David Qamḥî (sein Satz steht oben) sagt von den jüdischen Gästen ÇárePaTs aus, daß sie statt שׁ (ohne Punkt) weiches ת sprachen. Was LZunz weiß, dankt er also nicht diesem David Qamḥî, den er mithin gar nicht nennen durfte. Vielleicht steht es bei »Asulai בִּרְכֵּי יוֹסֵף zu Tur 1 50«, welches Buch ich nicht nachschlagen kann. בִּרְכֵּי יוֹסֵף *Kniee Josephs* stammt aus Genesis 50_{23}: der Titel sagt nur aus, daß das Buch von einem Joseph verfaßt worden ist. Den Titel ברכי יוסף bespricht Beniacob unter § 629: Ḥayyîm IôséP DáwîD Azûlâî aus Livorno hat ספרי שם הגדולים ועד לחכמים geschrieben, aus deren Wilnaer Drucke von 1852 ich mich nicht habe unterrichten können: seine in Livorno gedruckte *Kniee Josephs* sind mir unzugänglich. Meine Wilnaer Ausgabe der ארבע טורים enthält nichts mir hier Brauchbares. DHoffmann, der Schulchan Aruch [Berlin 1885], hat mich im Stiche gelassen: ebenso des Herrn von Pavly Uebersetzung 1 212 ff. und Loewes Uebersetzung 4 20 ff. [1]). Es wird mithin des † Zunz Ausgabe noch von Kundigeren auf ihre Begründung zu prüfen sein.

Auf einen in Chartres liegenden Psalter, der den Urtext in lateinischer Umschreibung bietet, verwies ich — ohne Nutzen, natürlich! — in der Vorrede zu meinem Psalterium iuxta Hebraeos Hieronymi.

Man wird sich aber bei diesen Untersuchungen gegenwärtig zu halten haben, daß wer die 1891 irgendwo — dies Wort gehört nothwendig in meinen Text — übliche Aussprache eines französischen Buchstaben kennt, darum noch lange nicht weiß, wie ihn Yiçḥáqî 1050 in Troyes ausgesprochen hat.

JFoerster, spanische Sprachlehre 13 § 9

> wir finden im diálogo de las lenguas angegeben »en muchas partes de Castilla convierten la s en j [x] y por sastre dicen xastre« . . . d. h. man sprach es wie sch, denn so klang damals j oder x.

GrMayans y Siscar, origenes de la lengua española, Madrid 1737, 1 150

> S, mudada en J, que tiene el mismo valor que la G gutural.

1) Es handelt sich in den Paragraphen 46 bis 57 um das Hersagen der vorgeschriebenen Segenssprüche. Bei dieser Gelegenheit konnte es aber wohl kommen, daß die Aussprache gewisser Buchstaben berührt wurde. Von »Chajim Josef David Asulai« (etwa 1726 bis 1807) spricht DCassel, Lehrbuch 419.

A sapone jabon, salgma jalma, a Salone Jalòn rio, Saetabis Jativa, sirop Arabe jarope, a succo jugo .... Los Arabes regularmente pronuncian Jota donde nosotros S, diciendo Jan por San, Geñor por Señor, Gimon por Simon, pajas por passas. Es genügt, im Yâqût, der seine Namen bequem nach den Anfangsbuchstaben ordnet, اشبونة = لشبون = Olyssipo = Lissabon, اشبيلية = Hispalis = Sevilla und die vielen mit شنت = Sant anhebenden Artikel aufzuschlagen, um zu wissen, daß das hispanische S dem Yâqût als ش zugekommen ist, die Hispanier also vor Yâqût s̨ wie š gesprochen haben. ش ist ohne Zweifel š, die Namenformen sind durch die Reihe, in der sie stehn, sicher.

Vorläufig ist unter Vorbehalt (unten warne ich) anzusetzen: שׂ wurde s gesprochen, und ist mit س identisch: für שׂ haben die Aramäer ܣ. שׁ wurde š gesprochen, und ist mit ش identisch: für שׁ = ش haben die Aramäer ܫ.

7

Es läßt sich denken, daß eine Hieroglyphenschrift, die vielleicht allerhand Geheimnisse anzudeuten oder Winke zu geben hätte, die auf gefällige, dem vorhandenen Raume entsprechende Anordnung ihrer Zeilen zu sinnen veranlaßt wäre, mehr als Ein Zeichen für ein und dasselbe Wort vorräthig hielte. Es läßt sich denken, daß ein Volk, das eine entlehnte Schrift verwandte, ebenso wohl überflüssigen Reichthum vor sich sähe, wie ich sehr viel mehr ز und ڮ von dem Gießzettellosen Drugulin erhalten habe, als ich verwenden kann: die Griechen haben ja drei Formen des »σ« zur Verfügung gehabt, ס צ ש. Es läßt sich aber nicht denken, daß die Semiten, wenn sie sich selbst eine Schrift erfanden, ס erfunden haben sollten, wenn sie für den durch ס bezeichneten Laut schon ש oder צ besaßen. Mit anderen Worten: ist ש oder צ *s*, so ist ס nicht *s*. Und umgekehrt.

Vergleichen wir das griechische Alphabet mit dem semitischen, so ist ס = ξ. So kann jeder Secundaner schließen. Ursprünglich ist ס ξ, schließt ein vorsichtiger Mann, und wenn er so viel grundböses und gedankenloses Volk vor sich hat, wie der arme Schreiber dieser Zeilen, so erläutert er sein »ursprünglich« durch die Anmerkung »so wenig aus dem Cicerone wie es Iosue Carducci oder Sansone (vulgo Salvatore) Barzilai der Galaadit spricht, folgt, daß *Κικέρων* der Griechen unrichtig sei, so wenig folgt daraus, daß ס, das, als vor der ersten Olympiade die Griechen es übernahmen, ξ ausdrückte, auch für Moses Maimonides oder Abraham Berliner wie ξ klang und klingt.

Als PHaupt was ich in meinen Symmicta 1 115 22 geschrieben,

gelesen hatte, theilte er mir — NGGW $1883_{99}{}^{r}$ — mit (ich habe das in den Mittheilungen 1 152 weiter gegeben), daß 1866 auch EHinks die Secundanergleichung ס = ξ aufgestellt habe.

8

Seit Adolf Kirchhoffs bekanntem Buche ist leicht zu ersehen, daß die griechische Welt, was das von ihr gebrauchte Alphabet anlangt, in vier große Gruppen zerfällt:
in die, welche die nichtphoenicischen Zeichen φχψ und das phoenicische ξ nicht verwendet:
in die, welche ξ als ξ, und die nichtphoenicischen Zeichen φχψ in in dem uns geläufigen Sinne braucht:
in die, welche φ und χ wie wir benutzt, aber ξ durch χσ und ψ durch φσ ersetzt:
in die, welche ξ als *x* nicht kennt, und den nicht phoenicischen Zeichen φχψ die Werthung von φξψ verleiht,
wozu anzumerken lohnt, daß das lateinische X sein Dasein dieser letzten Uebung dankt.

Die Epigraphiker haben sich mit der Feststellung dieser Thatsache begnügt: nach dem Grunde der allgemein zugestandenen Thatsache hat meines Wissens noch keiner von ihnen gefragt.

Mir folgt aus dem von AKirchhoff formulierten Thatbestande, daß ס, so wie es ursprünglich gesprochen wurde, ein nicht allen Griechen bekannter oder genehmer Laut war. Wenn als Regel ausgesprochen wird (eine Ausnahme bei FBechtel, die Inschriften des ionischen Dialekts 41^{r}), daß ξ da nicht vorkommt wo man χσ schrieb, so gilt mir als ausgemacht, daß das ס, wie es zur Zeit der Uebernahme des phoenicischen Alphabets bei den Phoeniciern lautete, nicht χσ lautete, sondern irgendwie, nur nicht so, daß ein Grieche des das Alphabet übernehmenden Stammes — dieser Genetiv ist das Wesentliche — den Laut in seiner Sprache vorfand.

Es folgt für mich aus der Vorlage weiter, daß da wo ξ geschrieben wurde, ursprünglich der Laut des ξ mit dem — phoenicischen? — ס sich deckte.

9

Zu meinem Bedauern bin ich, um mich über die älteste Schrift der Semiten zu belehren, auf die Tafel, die Euting 1882 Chwolsons Corpus inscriptionum hebraicarum, und auf die andere Tafel angewiesen, die eben dieser Euting 1889 des Herrn Kautzsch »Gesenius« beigegeben hat. Kautzsch lobte erstere 1884 in seiner Grammatik des biblisch-Aramäischen § 9, er fügte die letztere der Jubelausgabe seines Gesenius an, muß sie also für tadellos erklärt haben, und

Kautzsch ist, wie sein Buch über die Moabitica lehrt, Epigraphiker von Beruf. Das nabatäische ס bespricht ESachau, ZDMG 38 537.

Mir ist allerdings gewis, daß Herr Euting 1889 die auf dem MesaSteine vorkommende Form des ס noch ebenso unrichtig widergibt wie 1882. Bei Smend-Socin 12 ואסחבה, 18 ואסחבהיים, 21 לספח 25 באסרן, 26 חמסלת, 29 יספתי (Smend-Socin arbeiteten 3 Jahre vor 1889) erblicke ich als moabitisch nicht das von Herrn Euting vorgestellte ס, sondern das ס der Cyprischen Fragmenta aenea, die Herr Euting auf Chwolsons Tafel »circa 700« ansetzt.

Man darf nicht so unbillig sein, zu verlangen, daß ich, als Mann von 61 Jahren gezwungen umzusatteln und den Semitisten zu machen, alsbald in allen Sätteln der Semologie gerecht sein solle: ich komme den semologischen Kattenbusch zuvor, und gestehe freiwillig ein, daß ich dilettiere: müssen die Männer der ersten Facultät entschuldigen, daß ich ab und zu etwa über das Weihnachtsfest oder den Bibeltext dilettiere, so können die Herren des vierten Ordo sehr wohl eine Duldung für meinen Dilettantismus in Semiticis gestatten.

Ich finde nun von Eutings »Meisterhand« zwei Formen des ס gezeichnet, die Ich für verschiedene Werthe anspreche, die in Moab und auf Cypern übliche, welche ersichtlich den Griechen ihr Ξ geliefert hat, und die in Phoenicien usw. vorkommende, welche ich für eine Ligatur aus ק und ש ansehe, welche die Griechen, weil sie Qoppa, nicht Kappa, enthielt, nicht brauchen konnten. So vermuthe ich. Wenn ich von Vermuthen rede, meine ich Vermuthen. Die an der Quelle Siloe gefundene Inschrift enthält kein ס.

10

Ich habe 1881 in den Mittheilungen 1 69 HLFleischers Dissertatio de glossis Habichtianis 58, WSpittas Grammatik 18, GAWallin ZDMG 9 60, Sacys anthologie grammaticale 267 zu dem Erweise citiert, daß die عنعنة zwischen س und ش anders wechselt als die لثغة. Fleischer bemerkt aaO., س werde mitunter in ش verwandelt, ut per pleniorem quandam pronuntiationem ipsa significatio quasi plenior fiat et validior. Ich habe bemerkt, daß Wallins von mir citierter Aufsatz »für ס = ڭ ganz besonders in Betracht kommt«. Länger als zehn Jahre will ich nun nicht abwarten, daß ein weniger als ich überbürdeter Mensch diese Bemerkung ausnutze: ich nutze sie selbst aus, wenigstens so weit Ich es vermag.

Gerade bei den echtesten Beduinen in Nagd und Irâq wird für ك jetzt, wie das vor Alters beim Stamme Rabî: der Fall war, war, kš gesprochen. Auch ks kommt vor. Ferner wird k zu tš, schließlich zu ts.

Ich setze die Gleichung an: ס zu כ wie צ zu ק. War das ס

irgend welcher Semiten — ich bitte die Gerechten, namentlich die Lautphysiologen, um Vergebung, wenn der Ausdruck dem gelahrten Jargon des laufenden Semesters nicht entspricht — war ס in der von Wallin geschilderten Weise eine Quetschung des כ, so konnten die Griechen dieses ס für ξ = kš schreiben. צ ist entweder Assibiation von ﻁ = ﻃ oder Quetschung von ק = č, Uebersicht 30ʳ 2₆ 129ʳ 2₁: die Qarräer sprechen צ č, JHalévy Revue des études juives **21** 233 Ende, während in den Texten meiner persischen Studien erst das punktierte צ das č der Perser vertritt.

Bewährt sich was ich oben über שׂ und שׁ vorgetragen habe, so zeigt das Aramäische diesen zwei Buchstaben gegenüber eine Lautverschiebung. Es verhielte sich aber שׂ = س zu ܣ wie שׁ = ش zu ܫ, nicht wie שׁ = ث zu ܬ oder wie צ = ظ zu ܛ, nicht wie ז = ذ zu ܕ (wo die Stufen vorhanden sind), noch auch wie צ = ص = ܨ, oder ק = ا der Badawiyyîna (wo eine Lautspaltung [ç + ע = ص, k + ע = ק], nicht eine Lautverschiebung vorliegt).

Wie das ܫ der Aramäer in ältester Zeit ausgesprochen worden ist, weiß keine Seele: daß es spitz lautete, folgt nur daraus, daß ܣ dick lautete: es wäre kein gesunder Sachverhalt, wenn ܫ von ش nicht in derselben Entfernung abstände wie ܣ von س.

Ich muß, um nicht mehr unseres knappen und theuren Raumes zu verbrauchen, als unumgänglich ist, hier abbrechen, gebe aber noch zu bedenken, daß angeblich der ganze Canon, jedenfalls ein nicht kleiner Theil des Canons aus der althebräischen Schrift in die sogenannte assyrische, jetzt von uns benutzte Schrift umgeschrieben worden ist: man lese über כתב דעץ und des Epiphanius »deession« GHoffmann 1881 in ZWAT **1** 334 ff. Der einfache senkrechte Keil der Assyrer, auf den ich mich 1877 in den armenischen Studien § 2274ʳ zur Erläuterung des von mir gegen רעץ aus Nathans עָרוּךְ festgestellten דעץ berufen habe, steht 1889 bei FDelitzsch, Grammatik 35 Nummer 204, als diš ṭiš tiz tiš. Daß bei dieser Umschreibung allerhand vorgekommen ist was uns ärmsten Semologen, namentlich mir, dem ἔκτρωμα dieser Gesellschaft, unsere Arbeit erschwert, ist einem Manne nicht zweifelhaft, der, selbstloser als die regierenden Meister der Zunft, so viele Handschriften abgeschrieben und verglichen, und so viele Correcturbogen gelesen hat wie ich.

Ich weiß noch wie heute, mit welcher Freude Ernst Freiherr von Leutsch mir als Geschenk den Aufsatz über die cyprischen Inschriften brachte, den HLAhrens in den Band **35** des Philologus geschrieben hat. Ahrens bespricht § 13, 22 ff., das Zeichen, das Iohannes Brandis unter Nummer 14 (SBAW 1873₆₅₈) mit σ umschreibt, das Moriz Schmidt zuerst ξ, dann σσ oder σ gelesen hat:

Ahrens selbst lehrt 24, es sei nicht ein ξ, sondern ein dickerer Zischlaut gemeint.

Die cyprische Schrift ist stark stylisiert. In jenem hier nicht zu druckenden Zeichen erblicke ich das aus ץ und ש zusammengesetzte ס Phoeniciens, das vom ⵌ der Moabiter nicht bloß der Form nach verschieden sein dürfte.

Ahrens 23 zieht den von Hesychius erhaltenen paphischen Satz zur Erläuterung heran ἐσπόϑ' ἕρπες = [ἐκ] πόϑεν ἥκεις [= ἕρπεις]. Durch Georg Meyer, dessen ich in meiner Abhandlung NeuGriechisches aus KleinAsien 6 gedachte, habe ich (Bezzenbergers Beiträge zur Kunde der indogermanischen Sprachen **10** 177) erfahren, daß das karische -ασσις mit -αξις wechselt, also Ἀρύαξις mit Ἀρύασσις, Βρύαξις mit Βρύασσις, und daß wer archaisiert, ξ, nicht σσ, anwendet.

Da hätten wir also den Weg, auf dem von qs zu ss gegangen worden ist, vor uns. Ueber σσ der griechischen Steine FBlaß in der Satura philologa für Herman Sauppe 121 ff.

Falls סוס (Lotz, die Inschriften Tiglathpilesers des Ersten 160 ff.), das zuerst den Elephanten, erst nachher das Ross bezeichnete, ein Fremdwort ist, so kann die Sprache, der es entnommen wurde, noch einmal die Probe auf meine Rechnung machen. סוּף ist ϫοογϥ (Peyron 400[1]), HBrugsch in meinen Mittheilungen 2 261.

Aus dem Buche der Richter 12 6 ist bekannt, daß die östlich vom Jordan wohnenden Galaaditer שִׁבֹּלֶת, die westlich von ihm sitzenden Ephraimiten סִבֹּלֶת sagten, und letztere gar nicht im Stande waren שִׁבֹּלֶת auszusprechen. Mas:ûdî berichtet in der Histoire des Sultans Mamlouks EQuatremères 2 2 189, daß im Jahre 1302 die Ḥaçarî des Ça:îd [?] daran erkannt wurden, daß sie die ق in دقيق richtig leisten konnten.

Die Nachricht, daß Ephraim das ש Galaads durch ס ersetzte, oder aber Galaad das ס Ephraims durch ש — denn welche der beiden Formulierungen die richtige ist, weiß noch niemand: da auch die Iudäer שִׁבֹּלֶת haben, ist freilich die erste die wahrscheinlichere —, diese Nachricht ist werthvoll. Sie sagt allerdings nichts über die Lautung aus, aber sie mahnt, erstens, vorsichtig in der Annahme des oben über שׂ שׁ Vorgetragenen zu sein. Denn š kann sich leichter sowohl zu s als zu σ-χ ändern, als s zu x oder etwas Aehnlichem. Bei σ-χ denke ich an die Geschichte von dem Münsterländer, der im Palais Royal einen umhersuchenden Herrn mit der Frage anredete Que s-χers-χez Vous?, und die Antwort erhielt Je s-χers-χe mon s-χapeau, worauf dann das Gespräch auf Münsterländisch fortgesetzt wurde. Die Geschichte mahnt zweitens, vorsichtig in der Schätzung der Lautverschiebungen zu sein. Das hasa des c

wie h sprechenden Florentiners verhält sich zu casa nicht, wie das deutsche Hund zum griechischen *κύων*: Galaaditer und Ephraimiten bleiben trotz des Wechsels von ש und ס beide Israeliten.

11

Σίγμα scheint mir zu beweisen, daß ܣܡܟܬ nicht der ursprüngliche Namen des ξ ist: habe ich darin Recht, so ist auch der Satz ܣܡܟ nicht in der ursprünglichen Gestalt erhalten. Auf die Gefahr hin, einem ribaldo irgend eines Condottiere in die Hände zu fallen, will ich bemerken, daß ich die ältere Form des Satzes ܣܡܟ in שְׁכֶם *Σίκιμα* (Uebersicht 57 15) *Schulter* zu erkennen glaube: *σίγμα* = שִׁכְמָה. Ich will weiter bekennen (und behalte mir Näheres vor), daß ich die bei den Griechen übliche Benennung des ξ, nämlich ξει, als Bestätigung meiner eben ausgesprochenen Ansicht ansehe, daß das ס der Moabiter und das ס der Phoenicier von Hause aus zwei verschiedene Buchstaben gewesen sind: von סמך führt kein Weg zu ξει. Ich will drittens bekennen, daß, wenn das sexagesimale Zahlensystem von seiner in Babylonien liegenden Heimath aus (ich bitte Lehmanns Aufsätze nachzulesen) sich weiter verbreitet hat, die Uebereinstimmung von ϣⲉ̄ und שֵׁשׁ (*σῶσσος*) und deren so vielfach wechselnden, durch Volksetymologien entstellten Nebenformen sich daraus erklärt, daß der ursprüngliche Name für 6 und 60 mit dem sexagesimalen Systeme gewandert ist — ἕξ *sex*, die awestischen Formen dieser Zahlen mit ihrem aus drei Consonanten bestehenden Anlaute, usw., wären Lehnworte —: wüßte ich über die älteste Gestalt von ⲥⲟⲟⲩ Bescheid, so würde ich möglicher Weise ξει zu ⲥⲟⲟⲩ stellen. In das System der semitischen Zahlen passt die Vokabel שֵׁשׁ nicht hinein, da אחד, שנים, שלש, ארבע, חמש, שבע, שמנה, תשע, עשר, מאה, אלף drei Wurzelconsonanten zeigen, und sicher noch einmal deutbar werden werden: daß sie deuten zu können von höchstem Nutzen für die älteste Geschichte sein würde, bedarf keiner Auseinandersetzung. سادس ist eine künstliche Parallele zu ثالث, so zu sagen ein שְׁדשׁ neben שְׁלשׁ ܬܠܬ: ܫܬ fällt ebenso aus aller Lautverschiebung heraus wie die awestische Form כשואש [= *kšwakš?]

Σαν ist kaum šinn = שֵׁן, in welcher Vokabel der Vokal *i* haftet. Ξει = ϣⲉⲓ kann sich zu שין = שִׁין* verhalten wie sich zai (Psalterium Hieronymi xiv 1) zu זין = זַיִן verhält. שָׁן = *σαν* kann der (wegen â nicht hochSemitische) Nominativus Dualis des Genetivus Dualis שַׁיִן sein, wie דָּלֶת, wenn nicht eine falsche Lesart, der Nominativus Dualis zu dem Genetivus Dualis דַּלְתַּיִן ist. דלת zu دلو: Uebersicht 82 1. Ꞩs *χσεν* kann für *χσαιν* stehn.

12

Nach den Zeitungen besitzt man in Berlin aramäische Inschriften

aus der Zeit des Isaias. Goettingen, die צָרָה Berlins, ist nicht in der Lage, von diesen Inschriften eher etwas zu erfahren als Buxtehude: ich muß mich daher darauf gefaßt machen, daß was ich so eben vorgetragen habe, vielleicht bald beseitigt oder geändert sein werde: ich hoffe auf alle Fälle einige neue Gesichtspunkte angegeben zu haben.

Die Vikrama Aera.

Von

F. Kielhorn.

Die Entdeckungen der letzten Jahre haben gezeigt, daß die von James Fergusson aufgestellte und durch Max Müller berühmt gewordene Hypothese, nach welcher die Vikrama Aera erst im sechsten Jahrhundert, oder genauer, nach dem Jahre 543 n. Chr. von einem Könige Vikramâditya erfunden sein sollte, unhaltbar ist. Mit Recht schrieb Max Müller im Jahre 1883, daß die ganze Theorie Fergussons zusammenbrechen würde, wenn sich ein einziger Stein finden sollte, der (zeitgenössisch) von 543 n. Chr., d. i. vom Vikrama Jahre 600, oder früher datiert wäre. Solche Steine, aus den Vikrama Jahren 529 und 589, um nur die in jeder Hinsicht sichern Daten hier zu erwähnen, haben sich gefunden [1]; und wir wissen jetzt, daß die Vikrama Aera in der That vor 543 n. Chr. im Gebrauche war, daß die Jahre derselben aber als Jahre nach der Zählung der Mâlavas, Jahre der Mâlava Herrscher u. s. w. bezeichnet wurden. Kann die Aera somit nicht erst im sechsten Jahrhundert von einem Könige Vikramâditya gestiftet sein, so tritt von Neuem die Frage an uns heran, wie es zuging, daß sie in späterer Zeit mit einem Könige jenes Namens in Verbindung gebracht wurde. Ich will mit wenigen Worten zu zeigen versuchen, wie ich mir die Lösung dieses Räthsels denke.

Das älteste bekannt gewordene Datum, in dem das Wort *vikrama* erscheint, findet sich auf der Dholpur Steininschrift des

1) Vgl. meine chronologische Liste der Vikrama Daten im *Ind. Antiquary*, Band XX, S. 125.

Chauhân Chaṇḍamahâsena[1]), in der das Jahr 898 durch die eigenthümliche Wendung —

vasu nava [a]shṭau varshâ gatasya *kâlasya vikramâkhyasya*
„898 Jahre der *vikrama-benannten* (verflossenen) *Zeit*" —

bezeichnet wird. Auch sonst ist gerade dieses Datum für uns von ganz besonderem Interesse. Es ist das frühste sichre Datum der sogenannten Vikrama Aera, dessen Correctheit wir beweisen können; und seine Berechnung zeigt, daß das in ihm erwähnte Jahr mit dem Monate Kârttika (October-November), nicht, wie das Śaka Jahr, mit Chaitra (März-April) angefangen haben muß. Anzunehmen, daß der Schreiber des Datums mit dem Worte *vikrama* eine Person bezeichnen wollte, die er sich als Stifter der Aera dachte, liegen zwingende Gründe nicht vor. Die älteste Steininschrift, deren Datum von einem Manne Vikrama spricht, ist die Gwâlior Sâsbahû Tempel Inschrift des Mahîpâla[2]) vom Jahre V. 1150.

Die älteste echte Kupferplatte, deren Datum das Wort *vikrama* enthält, ist die Râdhanpur Urkunde[3]) des Chaulukya Bhîmadeva I., deren Jahr als *vikrama-saṁvat* 1086 „das vikrama Jahr 1086" bezeichnet wird. Ihr folgt die Sûnak Kupferplatte[4]) des Chaulukya Karṇadeva von *vikrama-saṁvat* 1148. Auch bei diesen Daten würde keine Nothwendigkeit vorliegen das Wort *vikrama* auf eine Person zu beziehen; doch darf ich hierauf kein Gewicht legen, weil wir aus dem Datum von Amitagati's Subhâshita-ratna-saṁdoha[5]) wissen, daß die Aera, von der ich spreche, schon in V. 1050 mit einem Fürsten Vikrama in Verbindung gebracht war. Sicher aber ist, daß sich bis jetzt kein Datum vor V. 1050 gefunden hat, das einen König Vikrama erwähnt, und daß das frühste sichre Datum vom Jahre V. 898 zwar die Zeit, zu der es gehört, als die *vikrama-Zeit* bezeichnet, eine Beziehung auf einen persönlichen Vikrama aber nicht enthält.

Fragen wir, wodurch sich das Vikrama Jahr von dem Jahre der viel allgemeiner gebräuchlichen Śaka Aera in besonders auffälliger Weise unterschied, so kann die Antwort nur die sein, daß das Vikrama Jahr mit dem Monate Kârttika (October-November), das Śaka Jahr dagegen mit dem Monate Chaitra (März-

1) Vgl. *Ind. Antiquary*, Band XIX, S. 35, wo ich die Berechnung des Datums gegeben habe.

2) Ib., Band XX, S. 129, No. 58.

3) Ib., S. 128, No. 47.

4) Ib., S. 129, No. 57.

5) Ib., Band XIX, S. 361.

April) anfing. Auf diesen ursprünglichen Unterschied der Jahre der beiden großen Aeren haben schon Andere aufmerksam gemacht, und ich habe oben bemerkt, daß das Jahr des ältesten berechenbaren Vikrama Datums unzweifelhaft ein *Kârttikâdi*, nicht ein *Chaitrâdi* Jahr war. Das Vikrama Jahr fing im Herbst, das Śaka Jahr im Frühling an.

Nun ist der Herbst (*śarad*) die Zeit des Auszugs zum Kriege; er ist in eminentem Grade der *vikrama-kâla*. Das wissen die Dichter ebenso gut wie die Verfasser der Nîti- und Dharma-śâstras. Raghu unternimmt seinen *digvijaya* im Herbste. Der Herbst, geschmückt mit Lotusblumen, naht sich ihm wie eine zweite Râjalakshmî; er lädt ihn ein auszuziehen, noch ehe Raghu selbst einen Entschluß gefaßt hat; im Herbste suchen selbst die Stiere es ihm an *vikrama* gleich zu thun [1]). Wie Kâlidâsa hier, so spricht Bhâravi vom Herbste beim Auszuge Arjunas [2]). Im Herbste zieht Râma aus Râvaṇa zu erschlagen und Sîtâ wiederzugewinnen [3]). Im Gaüḍavaho bricht Yaśovarman am Ende der Regenzeit, im Herbste, auf, sich den ganzen Erdkreis botmäßig zu machen [4]). Im Harshacharita erklärt Bâṇa die graubärtigen Wangen eines greisen Feldherrn dadurch, daß er den Besitzer den mit seinen blühenden Gräsern weißen Herbstanfang (*śarad-ârambha*) wieder von sich geben läßt, den er zur Kriegszeit (*vikrama-kâle*) getrunken hatte [5]).

Vom Herbste (*śarad*), als dem eigentlichen *vikrama-kâla*, zum Jahre (*śarad*) als *vikrama-kâla* ist nur ein kurzer Schritt; und ich glaube, daß die Inder in der That diesen Schritt gethan haben, und daß die spätere Bezeichnung der Mâlava Aera

---

1) *Raghuvaṁśa* IV, 22.

2) *Kirâtârjunîya* IV.

3) Vgl. *Setubandha* I, 14 und 16; Goldschmidts Uebersetzung: —

„Mühsam gieng dem Dâçarathi dahin die Regenzeit — die Verfinsterung für die Sonne seines Entschlusses, die starke Fessel für den Elefanten seines Zornes, der Käfig für den Löwen seines Sieges."

„Da naht — für den Affenfürsten der Weg des Ruhms, für das Leben des Râghava die erste Stütze, für Sîtâ die Hemmung der Tränen, für den Zehnköpfigen der Tag des Todes — es naht der Herbst."

Vgl. auch I, 34, mit der Erklärung des Scholiasten.

4) *Gaüḍavaho* 192.

5) Die Stelle, welche im 6ten uchchhvâsa (auf S. 156 der schlechten Calcuttaer Ausgabe) steht, ist schon von S. P. Paṇḍit, Gaüḍavaho, Introduction, S. 102 Anm., erwähnt, aber von ihm in ganz andrer Weise erklärt worden. Auch der Text, den er citiert, giebt keinen Sinn. Ich lese: vamann iva vikramakâlapîtam akâlepi vikâsikâśakânanaviśadaṁ śaradârambham.

als der eines Königs Vikrama ihren Ursprung einem Mißverständnisse verdankt. War man gewohnt vom Herbste (*śarad*) als *vikrama-kâla* zu sprechen, so war durch das Wort *śarad* die Beziehung auf das Jahr gegeben; und die Bezeichnung des Jahres als *vikrama-kâla* lag um so näher als man dadurch zunächst gerade das zum Ausdruck brachte was das Mâlava Jahr vom Śaka Jahre unterschied: das Factum nämlich, daß das Mâlava Jahr im *Herbste* anfing. Hatte man sich aber gewöhnt von Jahren als *vikrama-kâla* oder von *vikrama*-Jahren zu reden, so war Nichts natürlicher als daß spätere Geschlechter sich diese Bezeichnung im Sinne ihrer Zeit zu deuten suchten und so die Stiftung der Aera einem Könige Vikrama zuschrieben, der die Jahre, wie ihre eignen Könige, von seinem Regierungsantritte[1]) gezählt hatte.

1) Was die Śaka Aera betrifft, so möchte ich hier bemerken, daß ich in den Worten *Śaka-nṛipati-râjyâbhisheka-saṁvatsareshu* der Bâdâmî Inschrift des Maṅgalîśvara in keiner Weise mit meinem Freunde Fleet eine Spur einer alten Tradition über den Anfang der Śaka Aera entdecken kann. Mir sagen die betreffenden Worte nur, — was uns aus der Haidarâbâd Urkunde des Pulikeśin II. bekannt ist —, daß es *zur Zeit des Schreibers* üblich war die Jahre vom *râjyâbhisheka* eines Königs zu zählen.

Die Nîtimañjarî des Dyâ Dviveda.

Von

F. Kielhorn.

Als ich vor funfzehn Jahren im 5ten Bande des *Indian Antiquary* einen kurzen Aufsatz über die Nîtimañjarî des Dyâ Dviveda veröffentlichte, glaubte ich nicht, daß ich mich nochmal mit diesem Werke, dem nur die im Commentare enthaltenen Citate einigen Werth verleihen, befassen würde. Der Grund, weshalb ich es jetzt dennoch thue, ist folgender. In dem erwähnten Aufsatze hatte ich behauptet, daß Dyâ Dviveda aus Sâyaṇas Commentar zum Ṛigveda abgeschrieben hätte und deshalb natürlich später als Sâyaṇa, also nach der Mitte des 14ten Jahrhunderts gelebt haben müsse. Seitdem hat Professor Peterson auf S. 8 seines *Second Report of operations in search of Sanskṛit MSS.* über eine in der Bibliothek des Mahârâja von Alwar befindliche HS. der Nîtimañjarî berichtet, in der das Vikrama Jahr 1110 = 1053 n. Chr. als das Jahr bezeichnet sein soll, in dem Dyâ Dviveda sein Werk

vollendete. Obgleich diese Mittheilung meines Erachtens auf einem Irrthum beruht, halte ich es doch für richtig, meinen Fachgenossen ein Specimen von Dyâ Dvivedas Commentare vorzulegen, aus dem sie selbst ersehen mögen, ob Sâyaṇa von Dyâ oder Dyâ von Sâyaṇa abgeschrieben hat. Was ich mittheile, ist nicht gerade sehr schön, wird aber einen Begriff von Dyâ Dvivedas Geschmacke geben.

Was das erwähnte Datum betrifft, so kann ich nur sagen, daß die von Professor Peterson auf S. 103 citierten Worte des Originals — *binduśivaikena mite saṁvaty ambudhivatsare* —, die 1110 bedeuten sollen, mir unverständlich sind. Es ist wahr, *bindu* bedeutet 0, *śiva* mag, wie *îśvara*, *śaṁkara*, 11 bedeuten, und *eka* ist 1; aber daß etwas mit diesem Datum nicht in Ordnung ist, zeigen die Worte *ambudhivatsare*, die, wenn *binduśivaika* 1110 bedeuten, keinen Sinn geben. Und ich möchte hinzufügen, daß ich das Wort *saṁvat*, decliniert, bis jetzt nur in ganz modernen Daten gefunden habe. Daß aber Dyâ Dviveda lange n a c h 1053 n. Chr. gelebt hat, folgt schon daraus, daß er Shaḍguruśishyas Commentar zur Sarvânukramaṇî citiert, für dessen Abfassungszeit der Verfasser selbst uns den Tag des Kaliyuga 1565132, d. i. den 24ten März 1184 n. Chr., oder, mit andern Worten, den Tag der Meshasaṁkrânti, mit dem Kaliyuga 4285 = Śaka 1106 endete, gegeben hat.

Die folgenden zwei Verse samt ihrer Erklärung sind dem zweiten Capitel der Nîtimañjarî entnommen.

Aprâptayauvanayâ saha saṅgo na kârya ita âha |

S a h â r o m a k a y â s a ṅ g o n a k a r t a v y o n a r a i ḥ s t r i y â |
B h â v a y a v y o b h a j a j j ñ â t v â R o m a ś â ṁ p r â p t a r o m a k â m ||

Aromakayâprâptalomnyâ striyâ saha saṅgo narair na kartavyaḥ | Bhâvayavyadṛishṭântena draḍhayati | yathâ Bhâvayavyo râjâ Romaśâṁ striyaṁ prâptaromakâṁ jâtalomnîṁ jñâtvâbhajat bheje ||

Âkhyânapûrvike ṛ i c h a u[1]) |

Ấgadhitâ párigadhitâ yấ kaśîkéva jáṅgahe |
dádâti máhyaṁ yấdurî yấśûnâm bhojyấ śatấ ||
úpopa me párâ mṛiśa mấ me dabhrấṇi manyathâḥ |
sárvâhám asmi romaśấ gandhấrîṇâm ivâvikấ ||

Bhâvayavya-Romaśayor dampatyoḥ saṁvâda ity a n u k r a m a ṇ î ||

Tathâ B ṛ i h a d d e v a t â[2]) |

Pañchâmandân Bhâvayavyasya gîtâ
jâyâpatyor dve ṛichau saṁpravâdaḥ |

---

1) Ṛigveda I, 126, 6 und 7.

2) Vgl. Bṛihaddevatâ III, 155—IV, 3.

prâdâch cha tâṁ Romaśâṁ nâma sâmnâ
Bṛihaspatir Bhâvayavyâya râjñe ||
Tatas tat sarvaṁ Harivân viditvâ
priyaṁ sakhâyaṁ Svanayaṁ didṛikshuḥ |
abhyâjagâmâtha Śachîsametaḥ
pratyarchitas tad vidhinâ cha râjñâ ||
Abhyâjagâmâṅgirasî cha tatra
dṛishṭvâ tayoḥ sâ charaṇau vavande |
Indraḥ sakhitvâd atha tâm uvâcha
româṇi te santi [na santi] [1]) râjñi ||
Sâ bâlabhâvâd atha saṁjagâda
româṇi me Śakra parâmṛiśeti |

Sambhogâya prârthito Bhâvayavyaḥ svabhâryâṁ [2]) Romaśâm aprauḍhâṁ matvâ parihasann anushṭubhâha || Ayam arthaḥ | bhojyâ bhogayogyaishâgadhitâ â samantâd gṛihîtâ svîkṛitâ [3]) | tathâ parigadhitâ parito gadhitâ | âdarârthaṁ punarvachanam | gadhyaṁ gṛihṇâter iti Yâskaḥ | yadvâ âgadhitâ â samantâd bhâvena miśrayantî | ântaraṁ prajananena [4]) bâhyaṁ bhujâdibhir ity arthaḥ | gadhyatir miśrîbhâvakarmeti Yâskaḥ pûrvapakshe purushasya prâdhânyam uttarapakshe yoshita iti bhedaḥ | kîdṛiśî sâ | yâ [5]) jaṅgahe atyarthaṁ gṛihṇâti kadâpi na muñchati | atyâge dṛishṭântaḥ kaśîkeva | kaśîkâ nâma sûtavatsâ [6]) nakulî sâ yathâ patyâ saha chirakâlaṁ krîḍati kadâpi na muñchati tathaishâpi | kiṁchaishâ bhojyâ [7]) yâdurî | yâdur ity udakam | retolakshaṇam udakam râti [8]) âdadâti | bahuretoyuktety arthaḥ | tâdṛiśî satî yâśûnâṁ saṁbhogânâm | yâśur iti prajananânâma | tatsaṁbandhîni karmâṇi yâśûni bhogâḥ | teshâṁ śatâ śatâni mahyaṁ dadâtîti parihasantaṁ svabhartâraṁ praty âha | upopa ma iti | bhoḥ pate me mâm | dvitîyârthe chaturthî | upôpa upetyopetya parâmṛiśa samyak spṛiśa | bhogayogyâm avagachchhety arthaḥ | me mamâṅgâni dabhrâṇi alparomâṇi | dabhram arbhakam alpasyeti Yâskaḥ | mâ manyathâ mâ budhyasva | adabhratvaṁ viśadayati | ahaṁ sarvâ romaśâ bahuromayuktâsmi | yatoham îdṛiśy ataḥ saṁpûrṇâvayavâsmi | romaśatve dṛishṭânto gandhârîṇâm avikeva | Gandhârâ deśâs teshâṁ saṁbandhiny avijâtir iva | taddeśasthâ avayo meshâ

1) Die Worte in Klammern fehlen.
2) MS. svabhâvaṁ.
3) MS. tsvîkṛitâ; vielleicht matsvîkṛitâ.
4) MS. prajanena.
5) MS. om.
6) MS. sûtavatsâ yâ nakulî sâ kadâpi na muñchati· yathâ.
7) MS. bhogyâ.
8) MS. udakaṁ eti.

yathâ romaśâs tathâham asmi | yadvâ yathâ gandhârîṇâṁ garbhadhâriṇînâṁ strîṇâm avikâtyantaṁ tarpayantî yonir iva | tâsâṁ âprasavaṁ româdikartanasya śâstre nishiddhatvâd yonî romaśâ bhavati | yatoham îdriśy ato mâm apraudhâṁ mâ budhyasveti || Sâmagrihye[1]) | nâjâtalomnyopahâsam ichchhed iti || Tathâ Karmapradîpe |

ajâtavyañjanâlomnî na tayâ saha saṁviśed iti ||

Agnir ârâdhya ity artha âha |

Dhîmadbhir agnir ârâdhyo yaṁ vinâ na sukhî bhavet |
mukto Dîrghatamâḥ śâpâd agninâ hi Brihaspateḥ ||

Dhîmadbhir buddhimadbhir viprair agnir ârâdhyo yam agniṁ vinâ na sukhî bhavet | brâhmaṇasyâgneḥ sukhaṁ bhavatîty arthaḥ | hi yasmâd Dîrghatamâ rishir Brihaspateḥ śâpâd agninâ mochitaḥ[2]) || Taddarśanâyetihâsaḥ[3]) | Uchathya-Brihaspatinâmânau dvâv rishî âstâm | tatrochathyasya Mamatâ nâma bhâryâ sâ cha garbhiṇî tâṁ Brihaspatir grihîtvâramayat | śukranirgamanâvasare prâpte garbhasthaṁ retaḥ prâvâdît | he mune reto mâ tyâkshîḥ pûrvam ahaṁ saṁvasâmi retaḥsaṁkaraṁ mâ kârshîr iti | evam ukto Brihaspatir balât pratiruddharetaskaḥ sañ śaśâpa | he garbha tvaṁ yato retorodham akaror atas tvaṁ dîrghaṁ tamaḥ prâpnuhi jâtyandho bhaveti | evaṁ śâpato Dîrghatamâ ajâyata[4]) | sa utpannas tamovyayâyâgnim astaushît | sa cha stutyâ prîta ândhyaṁ paryaharad iti || Tathânukramaṇîbhâshye[5]) |

Itihâso hetubhûto vispashṭâya pravarṇyate ||
Prajâpateḥ putra âsîd Aṅgirâ nâma vai muniḥ |
tasya putrâs trayas tv âsaṁs tretâgnisamatejasaḥ ||
Uchathyo jyeshṭha ity eva madhyamas tu Brihaspatiḥ |
Saṁvartas tu kanishṭhotha jyeshṭho guṇagaṇair vibhuḥ ||
Uchathyabhâryâ Mamatâ nâmnâsîd varavarṇinî[6]) |
Uchathyâhitagarbhâṁ tâṁ chakametha Brihaspatiḥ ||
Uchathyaputro Mamatâgarbhasthovochad uttaram |
jyeshṭhapatnîṁ mâtrikalpâṁ mainâṁ[7]) gantuṁ manaḥ krithâḥ ||
amogharetâs tvaṁ châsi na dvayor iha saṁbhavaḥ |
iti garbhavachaḥ śrutvâ śaśâpainaṁ Brihaspatiḥ ||
dîrghaṁ tamas tvaṁ [praviśa ma][8])dvâkyâd andha eva vâ |
tato Dîrghatamâ nâma Uchathyatanayobhavat ||

1) Vgl. Gobhilîyagrihyasûtra III, 5, 3.
2) MS. hat hier noch agneḥ sukhî bhavety arthaḥ.
3) Vgl. Sâyaṇa zu Rigveda I, 147, 3.
4) MS. ajâyateti.
5) Vgl. Shaḍguruśishyas Vedârthadîpikâ, Macdonell's Ausgabe, S. 127.
6) MS. vaṁśavarṇinî.
7) MS. nainâṁ gantu mano krithâḥ.
8) Die Sylben in Klammern fehlen im MS.

Tathâ Bṛihaddevatâ[1]) |

Dvâ Uchathya-Bṛihaspatî ṛishiputrau babhûvatuḥ |
âsîd Uchathyabhâryâ tu Mamatâ nâma Bhârgavî ||
tâṁ yavîyân[2]) Bṛihaspatir maithunâyopachakrame |
śukrasyotsargakâle tu garbhas tam pratishedhati ||
ihâsmin[3]) pûrvasaṁbhûto na kâryaḥ śukrasaṁkaraḥ |
taṁ śukrapratighâtaṁ tu Bṛihaspatir amarshayat[4]) ||
sa vyâjahâra garbhaṁ taṁ tamas[5]) te dîrgham astv iti |
sa cha Dîrghatamâ nâma babhûvarshir Uchathyajaḥ ||
sa jâtobhyâtapad[6]) devân akasmâd andhatâṁ gataḥ |
dadau devaḥ stuto[7]) netre tatonandho babhûva saḥ || iti ||

Asminn artha ṛik[8]) |

Yé pâyávo mâmateyáṁ te agne páśyanto andháṁ duritá'd árakshan |
rarákshа tấn sukṛíto viśvávedâ dípsanta íd ripávo nấ'ha debhuḥ ||

Dîrghatamâs trishṭubhâgniṁ tushṭâva | . . . . he agne te tava saṁbandhino ye pâyavaḥ prasiddhâḥ pâlayitâro raśmayo mâmateyaṁ Mamatâyâḥ putram Dîrghatamasam andhaṁ paśyanto[9]) rakshaṇîyosmâbhir ity avagachchhanto duritâd duḥkhâd ândhyâd[10]) arakshaṁs tân raśmîn sukṛitaḥ sukhakartṛîn viśvavedâ viśvaprajñognî raraksha rakshati | asmatpâlanâyeti bhâvaḥ | tair asmân rakshatîty arthaḥ | evaṁ rakshitân asmân dipsanto dambhitum ichchhanto ripavaḥ kâmâdayo nâha debhuḥ | na khalu dambhituṁ śaknuvanti || tân | âhuḥ sakârodayayos takâram[11]) iti nakârasya pakshe takârâgamaḥ || Evaṁ dhîmadbhir agnir ârâdhya iti siddham | uktaṁ cha |

Ekâham api karmastho yogniṁ śuśrûshaṇaḥ śuchiḥ |
nayaty atra tad evâsya śatâhaṁ divi jâyate || iti ||

1) Vgl. Bṛihaddevatâ IV, 11—15.
2) MS. tâm abravîd Bṛihaspatir.
3) Lies ihâsmi.
4) Lies amarshayan (?), und vgl. die Ausgabe.
5) MS. tatas.
6) Lies abhyâpatad (?).
7) MS. stutaṁ.
8) Ṛigveda I, 147, 3.
9) MS. paśyantaḥ îkshaṇîyo.
10) MS. ândhyatvâd.
11) Ṛikprâtiśâkhya IV, 6.

Eine denkwürdige Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften.

Von

Eberhard Nestle.

Vorgelegt von Paul de Lagarde[1]).

Eine denkwürdige Sitzung der K. Gesellschaft der Wissenschaften war und bleibt diejenige, in welcher G. F. Grotefend seine praevia de cuneatis, quas vocant, inscriptionibus Persepolitanis legendis et explicandis relatio der Gesellschaft vorlegte und die Entzifferung der ganzen Keilschrift-Litteratur begründete. Da einer der Hauptassyriologen Deutschlands neuerdings zweimal das Datum jener Sitzung falsch angegeben hat — Friedrich Delitzsch 1889 in seiner *Assyrischen Grammatik* (S. 4) und nach 2 Jahren aufs neue in seiner »*Geschichte Babyloniens und Assyriens*« (Zweite Auflage des gleichnamigen Werks von F. Mürdter, Calw und Stuttgart 1891 S. 8), beidemal als 14. Sept. 1802 —, so sei gestattet, hier festzustellen, daß die andern Recht haben, welche als Tag jener Sitzung den 4. Sept. des genannten Jahrs verzeichnen. S. den 2. Band der Anzeigen von 1802, Stück 149 vom 18. Sept. Zu dem, was Fr. Hommel in seiner »*Geschichte Babyloniens und Assyriens*« S. 65 ff. aus der angeführten Nummer ausgezogen hat, möge weiter hier bemerkt werden, daß der Bericht über Grotefend's relatio nicht bloß »*wahrscheinlich* Prof. Tychsen zum Verf. hatte«, sondern sicher von demselben herrührt. Die Tübinger Universitätsbibliothek besitzt von den Anzeigen das Exemplar, das einst dem trefflichen Jerem. Reuß gehörte, dem Schwiegersohn ihres damaligen Herausgebers Heyne, in welchem Reuß durch lange Jahrgänge hindurch allen Anzeigen die Namen ihrer Verf. beigeschrieben hat, so dem hier genannten den Tychsens. Bestätigt wird dies durch die seither von Wüstenfeld veranstaltete Zusammenstellung: Die Mitarbeiter an den Göttingischen Gelehrten Anzeigen in den Jahren 1801—1830, (Beilage zu den Nachrichten von 1887 S. 80).

Einen weiteren Irrthum über jene »epochemachende Abhandlung Grotefend's« verbreitet Kaulen noch in der *vierten* Auflage

1) [*Vergleiche IohFlemming in den von FDelitzsch und PHaupt herausgegebenen Beiträgen zur Assyriologie 1 86.*]

seines Werks »Assyrien und Babylonien (1891)«, wenn er S. 118 sagt, daß erst nach 13 Jahren Heeren »*dieselbe* als Beilage zur dritten Auflage seiner bekannten Ideen über die Geschichte der alten Völker« veröffentlicht habe. Was das genannte Werk I, 1 563—603 von Grotefend enthält, ist nicht jene grundlegende praevia relatio selber. Endlich nennt keiner den Namen »des ersten Gehilfen und Freundes«, der ihn zu seinem Entzifferungsversuch überhaupt angeregt, ihm in den ersten 8—14 Tagen treulich beistand und die »für einen einzelnen Menschen ohnehin allzumühselige Arbeit sehr erleichtern half«, den des damaligen Bibliheksekretärs, nachherigen mag. leg. Fiorillo (s. Grotefend bei Heeren, l. c. und noch »Tributverzeichnisse« 1852 S. 3. 89); und keiner erwähnt, was jene Sitzung doppelt denkwürdig erscheinen läßt, daß in derselben gleichzeitig über den *Stein von Rosette* die ersten genaueren Mitteilungen in Deutschland gemacht wurden. Heyne berichtete damals über das von London gekommene Faksimile des griechischen Teils der Inschrift »*welche vielleicht der Schlüssel werden kann, die heilige und die gemeine ägyptische Schrift, wo nicht zu enträthseln, doch etwas näheres davon zu errathen*« (s. Stück 148 der Anzeigen vom 16. Sept. 1802). So damals, und heute! Wären wir so weit, als wir sind, wenn jene Alten nicht vielfach etwas pünktlicher gewesen wären, als viele Neueren? denen man immer wieder das Wort Bengels zurufen muß, das Westcott-Hort nicht umsonst an den Schluß ihres Neuen Testaments gesetzt haben: »eorum qui praecessere neque defectum exagitabimus neque ad eum nos adstringemus; eorum qui sequentur profectum neque postulabimus in praesenti neque praecludemus in posterum: quaelibet aetas pro sua facultate veritatem investigare et amplecti fidelitatemque *in minimis* et maximis praestare debet.

Tübingen, 13. Mai 1891.

Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente.

Von

Fr. Schilling.

(Vorgelegt von F. Klein).

Die Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie lassen sich bekanntlich ansehen als Relationen zwischen den 3 Kan-

tenwinkeln λ, μ, ν und den 3 Seitenwinkeln l, m, n eines räumlichen Dreikants, dessen Scheitel im Kugelmittelpunkt liegt, und dessen Kanten die Schnittgeraden der 3 Seitenebenen des vorliegenden sphärischen Dreiecks sind. Von diesem Umstande ausgehend kann man die Frage stellen:

„Lassen die Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht auch eine einfache geometrische Deutung zu, wenn man in denselben den Größen λ, μ, ν; l, m, n nicht mehr reelle, sondern komplexe Werte beilegt?"

Ich habe in Beantwortung dieser Frage folgendes gefunden:

Man setze zunächst:

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'', \qquad l = l' + il'',$$
$$\mu = \mu' + i\mu'', \qquad m = m' + im'',$$
$$\nu = \nu' + i\nu''; \qquad n = n' + in''.$$

Man betrachte alsdann das Gebilde dreier beliebig im Raume gelegenen, gegen einander windschiefen Geraden I, II, III, welche die Kugel in reellen Punkten schneiden, und konstruiere die drei inneren kürzesten Abstände, welche im Sinne der nicht-Euklidischen Geometrie oder (um jedes Streifen metaphysischer Fragen zu vermeiden) im Sinne der auf die Kugel zu gründenden projektiven Maßgeometrie zwischen je zweien der Geraden I, II, III stattfinden. Es sei hierbei allgemein der Abstand zweier Punkte wie der Winkel zweier Ebenen definirt als $\frac{i}{2} \cdot \log DV$, wo DV das Doppelverhältnis bedeutet, welches die beiden Punkte resp. Ebenen mit den reellen oder imaginären Elementen ihres Trägers bilden, die der Fundamentalfläche angehören, [d.h. mit den Schnittpunkten der Verbindungslinie der beiden Punkte mit der Kugel resp. den Tangentialebenen durch die Schnittgerade der beiden Ebenen an die Kugel]. Man bezeichne dann den Winkel der jedesmaligen beiden Ebenen, welche durch je eine der Geraden I, II, III und die zu ihr gehörigen kürzesten Abstände sich legen lassen, bez. mit λ', μ', ν', dagegen die durch die kürzesten Abstände auf den Geraden I, II, III abgeschnittenen Längen mit $i\lambda''$, $i\mu''$, $i\nu''$. Entsprechend setze man den Winkel der beiden Ebenen, die sich durch je einen der kürzesten Abstände und die zugehörigen beiden Geraden legen lassen, gleich l', m', n', die Länge der kürzesten Abstände selbst gleich il'', im'', in'', wo sich l' und il'' z. B. auf den kürzesten Abstand der Geraden II, III beziehen sollen.

Das Resultat meiner Betrachtung war dann das folgende:

„Setzt man die so definirten Größen in der oben angegebenen Weise zu den 6 Größen λ, μ, ν; l, m, n zusammen, so bestehen zwischen den letzteren grade die Formeln, wie sie die Relationen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie darstellen.“

Es ist nicht schwer, die hiermit angedeuteten allgemeinen Betrachtungen für den Fall, daß die drei Geraden I, II, III sich innerhalb oder außerhalb der Kugel in einem Punkte schneiden oder in einer Ebene liegen, zu spezialisieren.

Ich möchte diesen Angaben jedoch noch die folgende Bemerkung hinzufügen:

Die angegebene Erweiterung der Bedeutung der sphärischen Formeln hängt auf's engste zusammen mit folgender Beziehung:

Wenn man im Falle, daß die drei Geraden I, II, III sich im Mittelpunkte der Kugel schneiden, um dieselben nach einander Drehungen des Gesammtraumes (im nicht-Euklidischen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, im gewöhnlichen Euklidischen Sinne) ausführt entspr. um die doppelten Winkel des zugehörigen sphärischen Dreiecks, so geht der Raum bekanntlich in sich selbst über. (Vgl. Hamilton, Lectures on Quaternions 1853, Art. 280 und 346). Dem entspricht nun bei unseren windschiefen Geraden I, II, III der folgende Satz:

„Führt man um die Geraden I, II, III als Schraubenaxen nach einander drei nicht-Euklidische Schraubenbewegungen aus, deren Drehwinkel und Verschiebungsgröße beziehungsweise gegeben sind durch

$$2(\lambda'+i\lambda''),\quad 2(\mu'+i\mu''),\quad 2(\nu'+i\nu''),$$

so kommt der Raum gleichfalls in seine ursprüngliche Lage zurück.“

Der Beweis dieses letzten Satzes ist besonders einfach mit Benutzung des Hülfssatzes zu führen, daß jede Schraubenbewegung sich durch die Aufeinanderfolge zweier Rotationen von der Periode 2 ersetzen läßt.

Inhalt von Nr. 5.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

12. August. | № 6. | 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Juni.

Zur Moleculartheorie der piëzoëlectrischen und pyroëlectrischen Erscheinungen.

Von

Eduard Riecke.

Als ich begann, mich mit den pyroëlektrischen Erscheinungen des Turmalins in ausführlicherer Weise zu beschäftigen, war meine Absicht später in entsprechender Weise die piëzoëlektrischen Erscheinungen desselben zu untersuchen und der Bearbeitung des Turmalins eine möglichst umfassende quantitative Erforschung der beim Quarz beobachteten Erscheinungen folgen zu lassen. Es war im Wesentlichen ein molekulartheoretisches Interesse, welches sich für mich an jene Studien knüpfte. Die längst bekannten Erscheinungen des Turmalins schienen zu der Auffassung zu drängen, daß den Molekeln desselben eine elektrische Polarität in der Richtung der Hauptaxe von Hause aus zukomme, eine Auffassung, welche zuerst von William Thomson ausgesprochen worden ist. Die Gesetze, welche auf Grund dieser Vorstellung für die pyroëlektrischen Erscheinungen des Turmalins sich ergeben, habe ich durch eine große Zahl von Beobachtungen bestätigt. Es lag nun

die Vermuthung nahe, daß auch die elektrischen Erscheinungen anderer Crystalle durch die Annahme einer elektrischen Polarität ihrer Molekeln zu erklären sein würden; was die Vertheilung der Pole anbelangt, so war es natürlich, anzunehmen, daß dieselbe mit den Symmetrieverhältnissen des betreffenden Crystalls in Uebereinstimmung sich befinde; so habe ich gelegentlich [1]) die Vermuthung ausgesprochen, daß die Molekeln des Quarzes in einer zu der Axe desselben senkrechten Ebene von einem Systeme von Polen umgeben sein könnten, welche abwechselnd positiv und negativ die Ecken eines regulären Sechseckes bildeten. Zu einer weiteren Verfolgung dieser Vorstellung, zur Aufstellung irgend einer bestimmten Hypothese, wie aus derselben die bei elastischen oder thermischen Deformationen des Quarzes auftretenden elektrischen Wirkungen zu entwickeln sein würden, war ich noch nicht gelangt. Ich glaubte aber eine weitere Stütze für dieselbe in dem elastischen Verhalten der Crystalle finden zu dürfen. Mein verehrter Freund Voigt hat gezeigt, daß man die allgemeine Form des elastischen Potentiales, wie sie den Crystallen zukommt, auf Grund molekulartheoretischer Anschauungen gewinnen kann, sobald man den Molekeln eine polare Wechselwirkung zuschreibt. Auf der anderen Seite schienen mir die Beobachtungen von Voigt zu zeigen, daß diejenigen Crystalle, welche kräftige elektrische Wirkungen äußern, auch in ihrem elastischen Verhalten eine starke polare Wirkung der Molekeln erkennen lassen, und daran knüpfte ich die Vermuthung, daß die elastischen Eigenschaften der Crystalle gleichfalls auf einer elektrischen Polarität der Molekeln beruhen möchten [2]). Inzwischen hat die Lehre von den piëzoëlektrischen und pyroëlektrischen Erscheinungen einen ungemeinen Fortschritt gemacht durch die von Voigt aufgestellte allgemeine Theorie. Als das wesentliche Fundament derselben erscheint der Gedanke, daß bei Crystallen durch elastische oder thermische Deformationen elektrische Momente erzeugt werden können, deren Componenten lineare Functionen der Dilatationen sind. Indem Voigt diese letzteren den durch die Symmetrieverhältnisse der einzelnen Crystallgruppen gegebenen Bedingungen unterwarf, gelang es ihm, den Zusammenhang der elektrischen Erscheinungen für sämmtliche Crystallformen in übersichtlicher Weise zu entwickeln. Die von ihm aufgestellten Formeln sind von uns beiden bei Turmalin und Quarz einer experimentellen Prüfung unterworfen worden, durch welche ihre Rich-

---

1) Chem. Ber. 1888. S. 950.

2) Nachr. v. d. K. G. d. W. zu Göttingen. 1887. S. 151.

tigkeit erwiesen sein dürfte. Das Bedürfniß der experimentellen Physik ist hiernach durch die von Voigt gegebene Theorie vollständig befriedigt; alle Crystalle, welche kein Centrum der Symmetrie besitzen, erscheinen der elektrischen Erregung fähig; bei allen lassen sich die Erscheinungen, welche bei irgend einer gegebenen Vertheilung des Druckes oder der Temperatur eintreten müssen, zum Voraus berechnen, wenn gewisse piëzo- oder pyro-ëlektrische Constanten bestimmt sind, deren Anzahl von den Symmetrieeigenschaften des Crystalls abhängig ist. Immerhin ist es aber nicht ohne Interesse, die Frage weiter zu verfolgen, wie es möglich ist, daß eine einfache elastische oder thermische Verschiebung der Molekeln zur Entstehung von elektrischen Momenten, also zu elektrischen Verschiebungen Veranlassung giebt. Mit Bezug hierauf ist es von Wichtigkeit, daß die früher mit Bezug auf die elektrische Natur des Turmalins aufgestellte Anschauung ihrem wesentlichen Inhalte nach durch die allgemeinere Theorie von Voigt gleichfalls gefordert wird. Nach derselben existiert zwar für den Turmalin eine bestimmte Reihe zusammengehöriger, durch eine lineare Relation verbundener Werthe der Temperatur und des allseitig gleichen Druckes, bei welchen das elektrische Moment in der Richtung der Hauptaxe verschwindet; bei allen anderen Temperaturen und Drucken ist aber ein permanentes Moment in der Richtung der Axe vorhanden, welches durch eine entgegengesetzt elektrische Oberflächenschicht in seinen Fernwirkungen kompensiert sein muß. Die Existenz eines solchen permanenten Momentes wird aber kaum anders zu deuten sein, als durch die frühere Annahme einer elektrischen Polarisation der Molekeln in der Richtung der Axe. Was nun die Crystalle anbelangt, welchen wie dem Quarz ein permanentes elektrisches Moment nicht zukommen kann, so muß man doch jedenfalls annehmen, daß in denselben in Folge einer Deformation elektromotorische Kräfte enstehen, welche in den einzelnen Volumelementen elektrische Momente inducieren. Diese elektromotorischen Kräfte müssen ihre Existenz irgend einer Vertheilung elektrischer Massen verdanken und es liegt nun wiederum nahe, anzunehmen, daß diese elektrischen Massen nicht erst durch die Deformation ezeugt werden, sondern daß sie schon vorher vorhanden sind und nur in ihrer Wirkung modificiert werden, so daß inducierende Kräfte entstehen, welche den beobachteten elektrischen Ladungen entsprechen.

Somit gelangen wir zu der folgenden Vorstellung. Die Molekeln der Crystalle sind umgeben von Systemen elektrischer Pole, welche in ihrer Anordnung dieselben

Symmetrieeigenschaften besitzen wie die Crystalle selbst. Sofern die hierdurch gegebene Vertheilung elektrischer Massen an und für sich ein elektrisches Moment besitzt, sind ihre Fernwirkungen durch eine dem Crystall äußerlich aufliegende entgegengesetzt elektrische Schichte kompensiert. Wird der Zustand des Druckes und der Temperatur, unter welchen sich der Crystall befand, irgendwie geändert, so werden die Mittelpunkte der Molekeln bestimmte, gegenseitige Verschiebungen erleiden; es werden außerdem die Molekeln um ihre Mittelpunkte gedreht und es werden endlich auch die mit ihnen verbundenen Polsysteme Veränderungen erleiden können. Von dieser letzteren Möglichkeit werden wir im Folgenden absehen und uns beschränken auf die Untersuchung der Wirkung, welche von den beiden ersten Veränderungen herrührt. Es ergiebt sich, daß in Folge derselben auf die Mittelpunkte der Molekeln elektromotorische Kräfte ausgeübt werden, welche von den gegebenen Dilatationen abhängig und für alle Molekeln dieselben sind. Wir zerlegen diese Kräfte in Componenten nach den Axen eines Coordinatensystems, dessen Lage den Symmetrieverhältnissen des Crystalls entspricht; wir machen die Annahme, daß in den Molekeln des Crystalls elektrische Momente erzeugt werden, welche gleich den Componenten der inducierenden Kraft multipliciert mit gewissen dem Crystall eigenthümlichen Constanten sind. Man erhält auf diese Weise Formeln, durch welche die in der Richtung der Coordinatenaxen inducierten Momente mit Hilfe der gegebenen Dilatationen dargestellt werden und es ergiebt sich, daß diese Formeln identisch sind mit den Grundformeln der Voigt'schen Theorie. Es ist damit gezeigt, daß die von mir vorgeschlagene Molekulartheorie zu demselben Resultate führt, wie der allgemeine Ansatz der Voigt'schen Theorie in Verbindung mit den Symmetrieeigenschaften der Crystalle.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung der Gestalten des quadratischen, hexagonalen und regulären Systems. In den beiden ersteren Fällen wählen wir die z-Axe so, daß sie mit der krystallographischen Hauptaxe zusammenfällt. Es sei A der Mittelpunkt einer Crystallmolekel, B der Mittelpunkt einer zweiten, deren Coordinaten mit Bezug auf ein System, dessen Mittelpunkt in A liegt, durch x_1, y_1, z_1 bezeichnet werden mögen. Die von der Molekel B auf den Punkt A ausgeübte elektrische Kraft habe die Componenten X_1, Y_1, Z_1; die Verschiebung der Molekel B mit Bezug auf A sei gegeben durch die Formeln:

$$u = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1, \quad v = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1$$
$$w = a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ sein soll.

Im Falle des quadratischen und hexagonalen Systems tritt zu der Verschiebung der Molekeln eine Drehung um die Axen x und y, welche zufolge der von Voigt entwickelten Elasticitätstheorie gegeben ist durch $l = c\,a_{23}$, $m = -c\,a_{13}$, wo c eine durch die elastischen Verhältnisse bestimmte Constante ist. Bezeichnen wir durch Ξ, H, Z die Componenten der in Folge der Verschiebung, durch Ξ', H', Z' die Componenten der in Folge der Drehung neu entstehenden elektrischen Kräfte, so wird:

$$\Xi = a_{11}\sum\frac{\partial X_1}{\partial x_1}x_1 + a_{22}\sum\frac{\partial X_1}{\partial y_1}y_1 + a_{33}\sum\frac{\partial X_1}{\partial z_1}z_1$$
$$+ a_{23}\left(\sum\frac{\partial X_1}{\partial y_1}z_1 + \sum\frac{\partial X_1}{\partial z_1}y_1\right) + a_{31}\left(\sum\frac{\partial X_1}{\partial z_1}x_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}z_1\right)$$
$$+ a_{12}\left(\sum\frac{\partial X_1}{\partial x_1}y_1 + \sum\frac{\partial X_1}{\partial y_1}x_1\right).$$

Entsprechende Formeln gelten für H und Z. Ferner ergiebt sich:

$$\Xi' = -l\sum\left\{\frac{\partial X_1}{\partial y_1}z_1 - \frac{\partial X_1}{\partial z_1}y_1\right\} + m\sum\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_1}z_1 - \frac{\partial X_1}{\partial z_1}x_1 + Z_1\right\}$$
$$H' = -l\sum\left\{\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}z_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}y_1 + Z_1\right\} + m\sum\left\{\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}z_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}x_1\right\}$$
$$Z' = -l\sum\left\{\frac{\partial Z_1}{\partial y_1}z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}y_1 - Y_1\right\} + m\sum\left\{\frac{\partial Z_1}{\partial x_1}z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}x_1 - X_1\right\}.$$

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung gewisser specieller Systeme elektrischen Pole.

1. Einaxiges Polsystem.

Die Molekeln des Crystalls seien verbunden mit je zwei entgegengesetzten elektrischen Polen; die sie verbindende Axe habe bei allen dieselbe Richtung und sei parallel der z-Axe des Coordinatensystems; das von den Mittelpunkten der Molekeln gebildete Punktsystem, welches quadratischen oder hexagonalen Typus besitzen kann, sei symmetrisch mit Bezug auf die Coordinatenebenen. Verstehen wir unter x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Mittelpunktes für irgend eine Molekel, so ist das von derselben auf einen Punkt x, y, z ausgeübte Potential

$$V = \Gamma\frac{z - z_1}{r^3}$$

Der Mittelpunkt des Coordinatensystems falle zusammen mit dem Mittelpunkt einer Molekel, für diese ergiebt sich dann:

$$\Xi = 3\Gamma\left(\Sigma\frac{x_1^2+z_1^2}{r^5}-10\frac{x_1^2 z_1^2}{r^7}\right)a_{13},\quad H = 3\Gamma\left(\Sigma\frac{y_1^2+z_1^2}{r^5}-10\frac{y_1^2 z_1^2}{r^7}\right)a_{23}$$

$$Z = 3\Gamma\left(\Sigma\frac{x_1^2}{r^5}-5\frac{x_1^2 z_1^2}{r^7}\right)a_{11}+3\Gamma\left(\Sigma\frac{y_1^2}{r^5}-5\frac{y_1^2 z_1^2}{r^7}\right)a_{22}+3\Gamma\left(\Sigma 3\frac{z_1^2}{r^4}-5\frac{z_1^4}{r^7}\right)a_{33}$$

$$\Xi' = -\Gamma\left(\Sigma\frac{1}{r^3}+3\frac{x_1^2-2z_1^2}{r^5}\right)m,\quad H' = \Gamma\left(\Sigma\frac{1}{r^3}+3\frac{y_1^2-2z_1^2}{r^5}\right)l$$

$$Z' = 0.$$

Sowohl für das quadratische, als für das hexagonale System ist

$$\Sigma\frac{x_1^2}{r^k} = \Sigma\frac{y_1^2}{r^k},$$

somit ergeben sich für die inducierten elektrischen Momente die Formeln:

$$(1)\qquad a = 2p\,a_{13},\qquad b = 2p\,a_{23},\qquad c = q(a_{11}+a_{22})+r a_{33}.$$

Dieselben entsprechen den hemimorph-hemiëdrischen Gruppen des quadratischen und des hexagonalen Systems.

2. Trigonales Polsystem.

Durch den Mittelpunkt einer Molekel legen wir eine Ebene senkrecht zu der z-Axe des Coordinatensystems. In dieser zeichnen wir ein mit der Molekel koncentrisches gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken mit positiven elektrischen Polen besetzt werden. Die Ecken eines zweiten gleichseitigen Dreiecks, welche mit den Ecken des ersten ein regelmäßiges Sechseck bilden, werden mit negativen Polen von gleicher Stärke besetzt. Die Mittelpunkte der Molekeln bilden ein regelmäßiges Punktsystem, dessen Projektion auf die xy-Ebene durch ein Netz von gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Die x-Axe sei parallel der einen Seite der Dreiecke, die y-Axe parallel der entsprechenden Höhe. Als erste Hauptlage der Polsysteme bezeichnen wir diejenige, bei welcher der von dem Mittelpunkt der Molekel nach einem positiven Pole gezogene Radius Vektor mit der x-Axe des Coordinatensystems parallel ist, als zweite Hauptlage die, bei welcher jener Radius Vektor der y-Axe parallel ist.

A. Erste Hauptlage.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Mittelpunktes der Molekel, so ist ihr Potential auf einen Punkt mit den Coordinaten x, y, z gegeben durch die Kugelfunktion

$$V = A\frac{(x-x_1)^3-3(x-x_1)(y-y_1)^2}{r^7}.$$

Mit Rücksicht auf die Symmetrieeigenschaften eines hexagonalen Punktsystems ergiebt sich:

$$\Xi = A\left(\sum -6\frac{x_1^2}{r^7}+28\frac{x_1^4}{r^9}+63\frac{x_1^4y_1^2-3x_1^2y_1^4}{r^{11}}\right)(a_{11}-a_{22})$$

$$H = 2A\left(\sum 6\frac{x_1^2}{r^7}-28\frac{x_1^4}{r^9}-63\frac{x_1^4y_1^2-3x_1^2y_1^4}{r^{11}}\right)a_{12}$$

$$Z = 0 \text{ und ebenso } \Xi' = H' = Z' = 0.$$

Hieraus folgen dann für die inducierten elektrischen Momente die Formeln der sphenoidisch-hemiëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems.

$$a = s(a_{11}-a_{22}), \qquad b = -2s\,a_{12}, \qquad c = 0. \qquad (2A)$$

Zweite Hauptlage.

Es ergeben sich ebenso die Formeln

$$a = -2s'a_{12}, \qquad b = -\,s'(a_{11}-a_{22}), \qquad c = 0. \qquad (2B)$$

Die Superposition der beiden Hauptlagen des trigonalen Polsystems führt zu den Formeln der sphenoidisch-tetardoëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems

$$\begin{aligned} a &= s(a_{11}-a_{22})-2s'a_{12} \\ b &= -s'(a_{11}-a_{22})-2s\,a_{12} \\ c &= 0. \end{aligned} \qquad (2A,\ 2B)$$

Combiniert man das trigonale Polsystem in der zweiten Hauptlage mit dem einaxigen Polsystem, so ergiebt sich durch Addition der Formeln 1 und 2B

$$\begin{aligned} a = 2p\,a_{13}-2s'a_{12}, \qquad b &= 2p\,a_{23}-s'(a_{11}-a_{22}) \\ c &= q(a_{11}+a_{22})+r\,a_{33}. \end{aligned} \qquad (1,\ 2B)$$

Es sind dies die Formeln der zweiten hemimorph-tetartoëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems, (Turmalin).

3. Dihexagonales Polsystem.

Durch den Mittelpunkt einer Molekel legen wir eine Axe parallel zu der z-Axe des Coordinatensystems; auf ihr nehmen wir in gleichem Abstand von dem Mittelpunkt zu beiden Seiten dessel-

ben zwei Punkte und legen durch sie Ebenen senkrecht zu der z-Axe. In der oberen zeichnen wir ein regelmäßiges Zwölfeck, dessen aufeinander folgende Ecken mit 1, 2, 3 . . . bezeichnet werden mögen. In der zweiten Ebene zeichnen wir ein mit dem ersten kongruentes Zwölfeck, dessen Ecken 13, 14, 15 . . . 24 senkrecht unter den Ecken 1, 2, 3 . . . 12 liegen. Die Ecken des Sechseckes 1, 3, 5, 7, 9, 11 besetzen wir mit positiven Polen, die Ecken des Sechseckes 2, 4, 6, 8, 10, 12 mit negativen Polen von gleicher Stärke. Umgekehrt die Ecken 13, 15, 17, 19, 21, 23, mit negativen, die Ecken 14, 16, 18, 20, 22, 24 mit positiven Polen; das ganze Polsystem sei so orientiert, daß die durch seine Hauptaxe und die Pole 1 und 13 hindurchgehende Ebene mit der zx-Ebene den Winkel $\pi/_{12}$ einschließt. Sind wieder $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Molekel, so ist das Potential auf einen Punkt x, y, z gegeben durch die Kugelfunktion:

$$V = B\frac{\{3(x-x_1)^5(y-y_1)-10(x-x_1)^3(y-y_1)^3+3(x-x_1)(y-y_1)^5\}(z-z_1)}{r^{15}}.$$

Ferner ergiebt sich mit Benützung der Symmetrieeigenschaften des hexagonalen Punktsystems:

$$\Xi = -24B\left\{\sum \frac{x_1^4 y_1^2 - x_1^2 y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{23}$$

$$H = \quad 24B\left\{\sum \frac{x_1^4 y_1^2 - x_1^2 y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{13}$$

$$\Xi' = -24Bc\left\{\sum \frac{x_1^4 y_1^2 - x_1^2 y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{23}$$

$$H' = \quad 24Bc\left\{\sum \frac{x_1^4 y_1^2 - x_1^2 y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{13}.$$

Die inducierten elektrischen Momente werden dargestellt durch die Formeln:

$$(3) \qquad a = 2t a_{23}, \qquad b = -2t a_{13}, \qquad c = 0.$$

Es sind das die Gleichungen, welche der **trapezoëdrisch-hemiëdrischen Gruppe** des hexagonalen Systems entsprechen.

Combinieren wir das einaxige Polsystem mit dem dihexagonalen, so ergeben sich die entsprechenden Momente durch Addition der Gleichungen 1 und 3; es wird also:

$$a = 2p a_{13} + 2t a_{23}, \quad b = 2p a_{23} - 2t a_{13} \\ c = q(a_{11} + a_{22}) + r a_{33}. \qquad (1,\ 3)$$

Formeln der ersten hemimorph tetartoëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems.

Verbindet man das trigonale Polsystem in der ersten Hauptlage mit dem dihexagonalen, so ergiebt sich das Gleichungssystem der trapezoëdrisch tetartoëdrischen Gruppe des Hexagonalsystems

$$a = s(a_{11} - a_{22}) + 2t a_{23}, \quad b = -2s a_{12} - 2t a_{13}, \quad c = 0. \qquad (2A,\ 3)$$

Combiniert man endlich das einaxige Polsystem mit dem trigonalen in seinen beiden Hauptlagen und mit dem dihexagonalen, so gelangt man zu den Formeln der ogdoëdrischen Gruppe

$$\begin{aligned} a &= 2p a_{13} + s(a_{11} - a_{22}) - 2s' a_{12} + 2t a_{23} \\ b &= 2p a_{23} - s'(a_{11} - a_{22}) - 2s a_{12} - 2t a_{13} \\ c &= q(a_{11} + a_{22}) + r a_{33}, \end{aligned} \qquad (1,\ 2A,\ 2B,\ 3)$$

womit sämmtliche Formen des hexagonalen Systems, bei welchen piëzoëlektrische oder pyroëlektrische Erregung überhaupt möglich ist, erschöpft sind.

4. Tetraëdrisches Polsystem.

Vier positive Pole liegen in den Ecken eines Tetraëders, vier negative von gleicher Stärke in den Ecken eines zweiten Tetraëders, durch welches das erste zum Würfel ergänzt wird.

A. Erste Hauptlage.

Die z-Axe des Coordinatensystems steht senkrecht auf einer Würfelfläche, die Ebenen zx und zy sind parallel den Würfelseiten. Das Potential wird:

$$V = \Delta \frac{(x - x_1)(y - y_1)(z - z_1)}{r^7}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\Xi = \Delta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 + z_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 + z_1^4}{r^9} - 63 \frac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r^{11}} \right\} a_{23}$$

$$H = \Delta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 + z_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 + z_1^4}{r^9} - 63 \frac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r^{11}} \right\} a_{13}$$

$$Z = \Delta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 + y_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 + y_1^4}{r^9} - 63 \frac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r^{11}} \right\} a_{12}$$

$$\Xi' = \Delta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 - z_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 - z_1^4}{r^9} \right\} l, \quad H' = -\Delta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 - z_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 - z_1^4}{r^9} \right\} m$$

$$Z' = 0$$

und dem entsprechend

(4A) $a = ka_{23}, \quad b = ka_{31}, \quad c = k'a_{12}.$

Diese Formeln gehören zu der sphenoidisch-hemiëdrischen Gruppe des quadratischen Systems. Ist das Punktsystem ein reguläres, so wird die z-Axe mit x und y gleichberechtigt und wir erhalten die Formeln des regulären Systems

(4A)' $a = ka_{23}, \quad b = ka_{13}, \quad c = ka_{12}.$

B. Zweite Hauptlage.

Die zx- und die zy-Ebene gehen durch die Kanten des Würfels hindurch, während die Stellung der z-Axe unverändert bleibt. Das Potential wird

$$V = \tfrac{1}{2}\Delta \frac{\{(x-x_1)^2-(y-y_1)^2\}(z-z_1)}{r^7}$$

Ferner ergiebt sich:

$$\Xi = -\Delta\left\{\Sigma\frac{x_1^2+z_1^2}{r^7}-21\frac{x_1^2z_1^2}{r^9}-\tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\left(1-18\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{31}$$

$$H = \Delta\left\{\Sigma\frac{x_1^2+z_1^2}{r^7}-21\frac{x_1^2z_1^2}{r^9}-\tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\left(1-18\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{32}$$

$$Z = -\Delta\left\{\Sigma\frac{x_1^2}{r^7}\left(1-7\frac{z_1^2}{r^2}\right)-\tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\left(1-9\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}(a_{11}-a_{22})$$

$$\Xi' = \Delta\left\{\Sigma\frac{x_1^2-z_1^2}{r^7}+7\frac{x_1^2z_1^2}{r^9}-\tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\right\}m$$

$$H' = \Delta\left\{\Sigma\frac{x_1^2-z_1^2}{r^7}+7\frac{x_1^2z_1^2}{r^9}-\tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\right\}l$$

$$Z' = 0,$$

und hieraus

(4B) $a = ua_{13}, \quad b = -ua_{23}, \quad c = v(a_{11}-a_{22}).$

Combinieren wir die beiden Hauptstellungen des tetraëdrischen Polsystems, so resultieren die Formeln der sphenoidisch tetartoëdrischen Gruppe des quadratischen Systems

(4A, 4B) $a = ka_{23}+ua_{13}, \quad b = ka_{13}-ua_{23}, \quad c = k'a_{12}+v(a_{11}-a_{22}).$

5. Ditetragonales Polsystem.

Zwei regelmäßige Achtecke stehen zu einander und zu der z-Axe des Coordinatensystems in derselben Beziehung wie die Zwölf-

ecke des dihexagonalen Systems; sie werden in derselben Weise wie jene mit elektrischen Polen besetzt. Bezeichnen wir eine positive Ecke des oberen Achteckes mit 1, die darunter liegende negative Ecke des unteren Achteckes mit 9, so soll die Ebene, welche durch die Hauptaxe des Polsystems und die Punkte 1 und 9 hindurchgeht mit der zx-Ebene den Winkel $\pi/8$ einschließen. Das Potential wird:

$$V = \Theta_1 \frac{\{(x-x_1)^3(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_1)^3\}(z-z_1)}{r^{11}}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\Xi = -\Theta\left\{\Sigma\frac{3x_1^2y_1^2-x_1^4}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{23}$$

$$H = \Theta\left\{\Sigma\frac{3x_1^2y_1^2-x_1^4}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{13}$$

$$\Xi' = -\Theta\left\{\Sigma\frac{3x_1^2y_1^2-x_1^4}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}l$$

$$H' = -\Theta\left\{\Sigma\frac{3x_1^2y_1^2-x_1^4}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}m$$

$$Z = Z' = 0$$

und somit

$$a = 2w a_{23}, \quad b = -2w a_{13}, \quad c = 0 \tag{5}$$

die Formeln der trapezoëdrisch-hemiëdrischen Gruppe des quadratischen Systems.

Combiniert man diese Formeln mit denjenigen, welche dem einaxigen Polsystem entsprechen, so ergiebt sich:

$$a = 2p a_{13} + 2w a_{23}, \quad b = 2p a_{23} - 2w a_{13}, \quad c = q(a_{11}+a_{22}) + r a_{33}. \tag{1, 5}$$

Es sind dieß die Formeln der hemimorph-tetardoëdrischen Gruppe des quadratischen Systems und damit sind auch alle der elektrischen Erregung fähigen Gruppen dieses Systems erschöpft.

Alle auf die elektrische Erregung der Crystalle des regulären, des hexagonalen und des quadratischen Systems bezüglichen Formeln können hiernach durch die Combination von nur 5 verschiedenartigen elektrischen Polsystemen erhalten werden. Es

ist zu übersehen, daß auf demselben Wege auch die Gleichungen für die noch übrigen 5 hemimorphen oder hemiëdrischen Formen, welche dem rhombischen, monoklinen und triklinen System angehören, zu gewinnen sind.

Ueber die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird.

Mit 1 Figur.

Von

G. Tammann und **W. Nernst.**

(Aus dem physikalischen Institut zu Göttingen.)

(Vorgelegt von Eduard Riecke.)

A. Theoretischer Theil.

Bringt man ein Metall mit einer wässerigen Lösung in Berührung, so geschieht es häufig, daß jenes in Lösung geht und die elektrisch äquivalente Wasserstoffmenge in Freiheit setzt.

Diese Reaktion ist mit einer beträchtlichen Volumvermehrung verbunden; nach den bekannten Gesetzen über den Einfluß des Druckes auf die Reaktionsfähigkeit der Stoffe wird es möglich sein, durch Anwendung genügend großen Druckes die Reaktion in der Richtung vor sich gehen zu lassen, welche mit einer Volumverminderung verbunden ist, und es muß also im Allgemeinen zu erzielen sein, durch mit genügend hohem Druck in wässerige Lösungen gepreßten Wasserstoff die in Lösung befindlichen Metalle auszufällen.

Denjenigen Partialdruck des Wasserstoffs, bei welchem dieses Gas mit der Lösung und dem Metalle im Gleichgewicht sich befindet, wollen wir als die »Maximalspannung« des in Freiheit gesetzten Wasserstoffs bezeichnen; die Analogie dieser Druckgröße mit einer Dampf- oder Dissociationsspannung springt in die Augen.

Dieser Druck ist gleichzeitig das Maaß der Arbeit, welche in maximo bei der Auflösung der Metalle in Säuren gewonnen werden kann; da bekanntlich die elektromotorische Kraft der sogenannten umkehrbaren galvanischen Elemente ein Maaß für die gleiche Energiegröße ist, so erkennen wir bereits, daß jener Druck mit

der elektromotorischen Wirksamkeit auf das innigste verknüpft sein muß, wie es auch die nähere Betrachtung alsbald ergeben wird.

Bei der Maximalspannung des Wasserstoffs ist die Reaktion vollkommen reversibel; die Aenderung jener mit der Temperatur muß also mit der Wärmetönung und der Volumänderung der Reaktion in der analogen Beziehung stehen, wie sie für die Verdampfung durch die bekannte Clausius'sche Formel

$$\varrho = -T \frac{dp}{dT}(v-v') \tag{1}$$

gegeben ist; nur bedeutet in unserem Falle ϱ die Wärmemenge, welche bei der Auflösung von z. B. 1 g-Aequivalent Zink in einer beliebigen Säurelösung entwickelt wird, v das der Maximalspannung p entsprechende Volum von 1 g Wasserstoff und v' die Volumabnahme, welche das aus Metall und Lösung bestehende System durch die Abgabe des Wasserstoffs erfährt. In den meisten Fällen wird man v' gegen v vernachlässigen dürfen.

Betrachten wir ein reversibeles galvanisches Element, z. B. das Daniell'sche nach den Typus

$$Zn \mid ZnSO_4\text{-}Lsg \mid CuSO_4\text{-}Lsg \mid Cu$$

zusammengesetzte. Es betrage die Maximaltension des Wasserstoffes für das System Zink-Zinkvitriollösung p_1, für das System Kupfer-Kupfervitriollösung p_2. Dann können wir die maximale Arbeit, welche bei der Auflösung des Zinkes und Ausfällung der äquivalenten Menge Kupfer gewonnen werden kann, einmal aus der elektromotorischen Kraft des Elementes, sodann aus dem Unterschiede der beiden Maximaltensionen erhalten. Wir können also aus den Maximaltensionen der Metalle gegenüber den betreffenden Lösungen die elektromotorische Kraft des aus ihnen kombinirten Elementes berechnen.

Die Arbeit, welche bei der Entwickelung von 2 g Wasserstoff und der Ueberführung des entwickelten Gases unter Normaldruck P gewonnen werden kann, beträgt

$$A = pv + RTln\frac{p}{P},$$

worin p die Maximalspannung und R die Gaskonstante bedeutet; zählen wir das Volum in Litern und den Druck in Atmosphären, so ist für eine g-Molekel eines Gases bekanntlich

$$pv = RT = 0.0819\,T$$

und nach Einführung der Gasgleichung wird

$$A = 0{\cdot}0819\, T\left(1 + ln\,\frac{p}{P}\right)$$

Die Arbeit, welche im Daniellelemente bei Auflösung einer g-Molekel Zink und Ausfällung einer g-Molekel Kupfer gewonnen werden kann, beträgt also

$$A_1 - A_2 = 0{\cdot}0819\, T\, ln\,\frac{p_1}{p_2}.$$

Diese Arbeit ist gleich der elekromotorischen Kraft E; es wird also

$$E = 0{\cdot}0819\, T ln\,\frac{p_1}{p_2} \tag{2}$$

oder nach Einführung des üblichen Maaßsystems [1])

$$E = 0{\cdot}430\, T \times 10^{-4}\, ln\,\frac{p_1}{p_2}\ \text{Volt}.$$

Durch die vorstehende Gleichung ist zum ersten Male für die elektromotorische Kraft der umkehrbaren, aus zwei verschiedenen Metallen kombinierten galvanischen Elemente ein Ausdruck ermittelt worden, welcher dieselbe aus anderweitigen, der Messung direkt zugänglichen Größen im absoluten Maaße zu berechnen gestattet; doch sei daran erinnert, daß obige Gleichung nur unter der Voraussetzung gültig ist, daß auch bei dem der Maximaltension entsprechenden Wasserstoffdrucke der Austausch der Elektricität zwischen Metallen und Lösung nur durch die Ionen der betreffenden Metalle und nicht etwa gleichzeitig durch die in der Lösung befindlichen Wasserstoffionen oder durch den in den Metallen gelösten Wasserstoff vermittelt wird. Inwieweit und bei welchen Metallen diese Voraussetzung erfüllt ist, bedarf erst näherer Untersuchung. Ist die Maximaltension des Wasserstoffs zu groß, als daß letzterer noch den Gasgesetzen gehorcht, so läßt sich leicht ein strengerer Ausdruck ableiten.

Formel (1) schreibt sich bei Vernachlässigung von v'

$$\varrho = -0{\cdot}0819\, T^2\,\frac{d\, ln p}{dT}. \tag{3}$$

Die Wärmetönung im Elemente entspricht der Differenz der Auflösungswärme des Zinks und des Kupfers:

---

1) Vgl. z. B. Zeitschr. f. physik. Chem. 4 138 und 176 (1889).

$$W = \varrho_1 - \varrho_2 = -0{\cdot}0819\, T^2 \frac{d\, ln \frac{p_1}{p_2}}{d\,T}. \qquad (4)$$

Differenzieren wir Gl (2), so wird

$$\frac{dE}{dT} = 0{\cdot}0819\, ln \frac{p_1}{p_2} + 0{\cdot}0819\, T \frac{d\, ln \frac{p_1}{p_2}}{d\,T}$$

oder in (4) eingeführt:

$$W - E = -T \frac{dE}{dT}.$$

Dies ist aber die bekannte Gleichung, welche v. Helmholtz direkt durch Anwendung der thermodynamischen Principien auf die umkehrbaren galvanischen Elemente gefunden hat, und zu der wir soeben auf einem zwar etwas umständlicheren aber dafür vielleicht in mancher Hinsicht anschaulicheren Wege gelangt sind.

Was den Mechanismus der von uns behandelten Reaktion betrifft, so lassen sich vom Standpunkte der neueren Lösungstheorie und in weiterer Fortführung der Anschauungen, welche einer von uns[1]) über den Vorgang der Auflösung von Metallen entwickelt hat, darüber folgende Bemerkungen machen. Das mit der Lösung in Berührung befindliche Metall sucht vermöge einer als »elektrolytischen Lösungstension« bezeichneten Expansivkraft seine positiv geladenen Ionen in die Lösung hineinzubefördern; der Vorgang kann zum Stillstand gebracht werden entweder durch die mit dem Uebertritt der metallischen Ionen in die Lösung hervorgerufenen elektrostatischen Ladungen, indem nämlich sich die Flüssigkeit positiv, das Metall negativ electrisch ladet und so durch die elektrostatische Wirkung der entstandenen Doppelschicht der Lösungstension das Gleichgewicht gehalten wird, oder aber durch den osmotischen Partialdruck der in Lösung befindlichen Ionen des betreffenden Metalls, welcher ebenfalls der Lösungstension entgegenwirkt. Im allgemeinen werden natürlich beide Wirkungen sich superponieren.

Die elektrolytische Lösungstension kann nun aber auch einen solchen Betrag erreichen, daß eine derartige Kompensation ausgeschlossen ist; es kann vorkommen, daß an Stelle der positiven Ionen, die aus dem Metalle austreten, anderweitige gleichartige Ionen aus der Lösung heraus gedrängt werden und sich auf dem Metalle niederschlagen. Dies geschieht bei der Verdrängung

1) Nernst, diese Zeitschr. 4 150 (1889).

eines Metalles durch ein anderes (z. B. des Kupfers durch Eisen) aus der Lösung und bei der Entwickelung von Wasserstoff, in welchem Falle für die metallischen Ionen, die in Lösung gehen, die äquivalente Menge Wasserstoffionen im Metalle sich lösen; daß die Löslichkeit des Wasserstoffs in Metallen eine allgemeine Erscheinung ist, haben ja u. A. die Untersuchungen von Thoma[1]) gelehrt. Aus seiner Lösung im Metalle vermag der Wasserstoff dann unelektrisch zu entweichen, sobald seine Tension hinreichend groß geworden ist. Freiwillige Wasserstoffentwickelung kann hiernach nur in dem Falle stattfinden, daß der Druck des Wasserstoffs über seiner »festen« Lösung im Metall größer wird als der einer Atmosphäre. Auch diese spezielleren Anschauungen führen zu den oben für die Maximaltension des entweichenden Wasserstoffs entwickelten Beziehungen, und sie lassen auch unmittelbar erkennen, daß obige Maximaltension ein Maaß der elektromotorischen Wirksamkeit des betreffenden Metalles sein muß. Auf die Folgerungen, welche sich hieraus für die galvanische Polarisation ergeben, kann hier nicht näher eingegangen werden.

B. Experimenteller Theil.

Das chemische Gleichgewicht, welches den Gegenstand unserer Untersuchung bildet, läßt sich von zwei Seiten her erreichen, indem man entweder in eine Metallsalzlösung Wasserstoff bis zu solchem Drucke einpreßt, daß das Metall ausfällt, oder aber indem man den Druck bestimmt, bei welchen die Wasserstoffentwickelung des aus Lösung und festem Metall gebildeten Systemes aufhört.

Von älteren diesbezüglichen Versuchen seien vor allen Dingen diejenigen N. N. Beketoffs[2]) erwähnt. Beketoff suchte den Druck zu bestimmen, unter dem der in die Lösung des Metallsalzes gepreßte Wasserstoff das Metall aus der Lösung zu fallen beginnt. Er zeigte, daß Wasserstoff beim Drucke einer Atmosphäre aus einer Lösung von Silberacetat metallisches Silber abscheidet, daß bei höheren Drucken bis zu 10 Atmosphären verdünnte Lösungen von Merkuronitrat, Silbernitrat, Silbersulfat und ammoniakalische Silberchloridlösung gefällt werden, ferner daß Kupfer- und Bleinitratlösung von Wasserstoff unter Drucken bis zu 10 Atmosphären nicht gefällt werden, daß aber die Fällung eintritt, wenn in die Lösungen ein Platindraht taucht. Betreffs der besonnenen und äußerst sorg-

1) Zeitschr. f. physik. Chemie. 3 69 (1889).

2) N. N. Beketoff, Compt. rend. 48, p. 442, 1859, und Untersuchungen über die Erscheinungen der gegenseitigen Ausscheidung der Elemente aus ihren Verbindungen. Dissertation, Charkow 1865.

fältigen Versuchstechnik Beketoffs muß auf seine Abhandlung verwiesen werden. C. Brunner[1]) fand, daß eine verdünnte Lösung von Silbernitrat von Platinchlorid und Palladiumchlorid schon beim Durchleiten von Wasserstoff das Metall abscheidet.

Cailletet[2]) brachte gewogene Zinkplatten in eine Lösung von Schwefelsäure und ließ die Wasserstoffentwickelung unter bestimmten Drucken vor sich gehen. Wie zu erwarten, fand Cailletet die Geschwindigkeit der Auflösung beim Wachsen des Wasserstoffdruckes stark abnehmend; schließlich hört bei einem gewissen Druck, für den aber die Zusammensetzung der Lösung leider nicht bestimmt wurde, die Wasserstoffentwickelung gänzlich auf. Ferner zeigte Cailletet, daß Natriumamalgam aus seinen Salzlösungen bei hohen Drucken nicht mehr Wasserstoff entwickelt; bricht man aber das Rohr, in dem sich alles im Gleichgewicht befand, auf, so tritt wiederum lebhafte Gasentwickelung ein.

Da es von vorneherein aussichtslos erschien, den Druck, bei welchem die Fällung des Metalls beginnt, auch nur annähernd zu bestimmen, so waren wir auf die Messung des Druckes, bei welchem die Wasserstoffentwickelung aufhört, angewiesen. Der Apparat, dessen wir uns bei unsern Versuchen bedienten, bestand aus einer starkwandigen Glasröhre *a b* (cf. Fig.) von etwa 1 cm innerer Weite und etwa 20 cm Länge, an welche ein geschlossenes von einer Kapillare gebildetes Luftmanometer angesetzt war. Die Füllung geschah in folgender Weise. Nachdem das Manometer mit trockner Luft erfüllt und mit Quecksilber beschickt war, wurde in dem in umgekehrter Stellung befindlichen Apparat durch *b* das zu untersuchende Metall, eine zum Bedecken desselben erforderliche Menge Chloroform, ein Glasstäbchen und schließlich die Lösung eingeführt; da das Metall vor dem Angriff seitens der Säure durch das Chloroform geschützt war, konnte keine Wasserstoffentwickelung stattfinden und das Abschmelzen bei *b* unter möglichster Vermeidung eines schädlichen Luftvolumens erfolgen. Drehte man den Apparat hingegen um, so fiel das schwerere Chloroform nach unten, während das Metall durch das Glasstäbchen oberhalb des Chloroforms und innerhalb der Lösung getragen wurde; es entwickelte sich Wasserstoff mit immer steigendem Drucke, der an dem Luftmanometer abgelesen wurde. Die

1) C. Brunner, Pogg. Ann. 122, p. 153, 1864.

2) Cailletet, Compt. rend. 68, p. 395, 1869.

Genauigkeit der Ablesung wurde übrigens sehr dadurch vergrößert, daß das zu messende Luftvolum *cd* beiderseits von Quecksilberfäden abgeschlossen war (cf. Figur), deren Differenz sich leicht bis auf 0·1 mm messen ließ, und so eine Berücksichtigung der Verjüngung des Lumens am oberen Ende der Kapillare vermieden war. Die Länge des abgeschlossenen Luftvolumens betrug bei Barometerdruck meistens gegen 40 cm.

Bei Beginn der Reaktion war die Wasserstoffentwickelung gewöhnlich sehr stürmisch, ließ aber bald nach und schien den Angaben des Manometers zufolge nach einigen Tagen, bisweilen auch Wochen, ihr Ende erreicht zu haben. Die Schnelligkeit, mit welcher das Gleichgewicht erreicht wurde, hing natürlich im höchsten Maaße von der Größe des bei *a* befindlichen Luftbläschens ab. Häufiges Umrühren der Lösung, welches durch wiederholtes Umkehren des Apparats und das Hin- und Hergleiten des darin befindlichen Metalles erzielt wurde, war unbedingt erforderlich.

Die Apparate befanden sich sämmtlich in einem großen Wasserbade, welches im ungeheizten Zimmer aufgestellt war und dessen Temperatur nur wenig um 4^0 variierte.

Die Messung des Druckes ließ sich mit mehr als hinreichender Genauigkeit ausführen; schwieriger war die Ermittelung der Endkonzentration der Lösung, welche von der ursprünglichen häufig merklich verschieden war. An eine Analyse der Lösung am Ende des Versuches war nicht zu denken, weil dieselbe beim Oeffnen des Apparats sich in Gestalt feiner Tröpfchen zerstäubte, und mußte daher die entwickelte Wasserstoffmenge geschätzt und so die Abnahme des Säuretiters und die entstandene Salzmenge berechnet werden.

Der entwickelte Wasserstoff befindet sich zum Theil gelöst, zum Theil in Luftbläschen bei *a*, dessen Größe im Vergleich zum Gesamtvolum der Lösung nur durch Schätzung sich ermitteln ließ. Der Absorptionskoefficient des Wasserstoffs beträgt bei 4^0 0·0208 [1]); die beim Druck P Atmosphären in Lösung befindliche Menge von Wasserstoff entspricht also einer Abnahme des Säuretiters der Lösung um

$$P\,\frac{0{\cdot}0208}{11{\cdot}2}\ \text{Aequivalente pro Liter}$$

weil 1 g H (= 1 Aequivalent) bei 0^0 im Raume = 1 Liter befindlich unter dem Drucke von 11·2 Atmosphären steht.

---

1) Timofeiew, Zeitschr. f. physik. Chemie. **6** 147 (1890).

Bezeichnet ferner n den Bruchtheil, welchen das Volum des Luftbläschens vom Gesamtvolum der Lösung ausmacht, so sind

$$\frac{P}{11\cdot 3\,n} \text{ Aequivalente pro Liter}$$

Säure zur Erzeugung des der Lösung entzogenen Wasserstoffs verbraucht worden, weil bei der Versuchstemperatur von 4^0 1 g H im Raume = 1 Liter befindlich unter dem Drucke von 11·3 Atmosphären steht. Insgesamt beträgt also die Abnahme des Säuretiters

$$P\left(0{\cdot}00186 + \frac{1}{11\cdot 3\,n}\right)$$

und die äquivalente Menge Metall ist natürlich in das Salz der Säure übergegangen.

Im Folgenden sind die Drucke P angeführt, welche sich bei den einzelnen Metallen und den betreffenden Endkonzentrationen C, ausgedrückt in g-Aequivalenten pro Liter, ergeben haben und ihrer Konstanz zufolge als Maximaltensionen anzusehen waren. Häufig wandten wir die Metalle platiniert an, wodurch bekanntlich die Geschwindigkeit der Wasserstoffentwickelung sehr beschleunigt wird; daß Gegenwart von Platin den Absolutwerth der Maximalspannung ändern sollte, ist wohl von vornherein im höchsten Maaße unwahrscheinlich und gaben unsere Versuche auch keinen Anhalt zu dieser Annahme.

Zink. Dasselbe kam in auf der Drehbank aus Stücken reinen Metalls gedrehten Spiralen zur Verwendung.

1) $C = 0{\cdot}13\, H_2SO_4 + 1{\cdot}3\; ZnSO_4$; $P = 18$ Atm.
2) $C = 0{\cdot}11\, H_2SO_4 + 1{\cdot}2\; ZnSO_4$; $P = 23{\cdot}5$ Atm.
3) $C = 0{\cdot}29\, H_2SO_4 + 1{\cdot}7\; ZnSO_4$; $P = 25{\cdot}6$ Atm.
4) $C = 0{\cdot}20\, H_2SO_4 + 0{\cdot}36\; ZnSO_4$; $P = 57$ Atm.
5) $C = 0{\cdot}35\, H_2SO_4 + 1{\cdot}15\; ZnSO_4$; $P = 29$ Atm.
6) $C = 0{\cdot}34\, H_2SO_4 + 1{\cdot}16\; ZnSO_4$; $P = 40{\cdot}2$ Atm.

Apparate, die mit reiner normaler Schwefelsäure oder mit 1.5fach normaler Schwefelsäure und doppeltnormaler Zinkvitriollösung beschickt waren, explodierten bei Drucken von 70 bis 80 Atmosphären. Wenn die Zahlen untereinander auch zum Theil stark differieren, (vgl. z. B. 1 und 2, 5 und 6), so ersieht man doch mit Sicherheit, daß mit zunehmender Säurekonzentration der Druck stark zunimmt und anderseits durch Gegenwart von Neutralsalz stark heruntergedrückt wird. Leider erreichte die Korrektion wegen der Abnahme des Säuretiters einen sehr hohen Betrag;

da so die Endkonzentrationen der Säure mit einiger Unsicherheit behaftet sind, können die vorstehenden Zahlen nur zur ersten Orientirung dienen.

7) $C = 0{\cdot}68\,HCl + 0{\cdot}30\,ZnCl_2 + 1\,ZnSO_4$; $P = 48$ Atm.

8) $C =$ » » » » $P = 52$ Atm.

Apparate, die mit normaler Salzsäure beschickt waren, explodierten bei Drucken von 70 bis 80 Atm., wobei der Säuretiter etwa auf 0·7 bis 0·8 gesunken war. Dasselbe geschah bei einem mit normaler Essigsäure gefüllten Apparate.

Kadmium. $C = 0{\cdot}62\,HCl + 0{\cdot}3\,CdCl_2$, P ca. 44 Atm.

Eisen. Es kamen eiserne Nägel zur Verwendung.

$$C = 0.46\,H_2SO_4 + 1{\cdot}04\,FeSO_4;\; P = 6{\cdot}4 \text{ Atm.}$$

Während hier bereits nach 3 Tagen Konstanz eingetreten war, ließ ein mit normaler Schwefelsäure beschickter Apparat ein so langsames Ansteigen des Druckes erkennen, wie es in keinem andern Falle beobachtet war. Nach 8 Tagen betrug der Druck erst 5 Atm., nach 14 Tagen erst 6 Atm.; im Laufe eines Vierteljahrs erreichte er den Wert von 34 Atm., ohne daß jedoch der Gleichgewichtszustand erreicht zu sein schien. Die Abnahme des Säuretiters ist auf 11 °/₀ zu schätzen. Aehnlich verhielt sich ein mit normaler Salzsäure beschickter Apparat. Bei Anwendung doppeltnormaler Schwefelsäure fand bei einem Drucke von 90 Atm. Zertrümmerung des Apparats statt.

Mangan in Stückenform lieferte mit normaler Salzsäure in Berührung einen Druck von 52 Atm. Abnahme des Säuretiters ca. 11°/o.

Nickel. Das Metall kam in Stückenform und platiniert zur Verwendung; die Konstanz des Druckes trat hier schneller ein als bei andern Metallen.

1) $C = 0{\cdot}94\,H_2SO_4 + 0{\cdot}07\,NiSO_4$; $P = 7{\cdot}5$ Atm.

2) $C = 1{\cdot}52\,H_2SO_4 + 0{\cdot}50\,NiSO_4$; $P = 42$ Atm.

3) $C = 0{\cdot}86\,HCl + 0{\cdot}15\,NiCl_2$; $P = 23{\cdot}1$ Atm.

4) $C = 0{\cdot}88\,HCl + 0{\cdot}15\,NiCl_2$; $P = 29{\cdot}0$ Atm.

Vielleicht ist gerade dieses Metall zu weiteren Versuchen über die Abhängigkeit der Maximaltension von der Konzentration, Temperatur etc. besonders geeignet.

Aluminium. Selbst bei Anwendung von 0·25 normaler Salzsäure waren die Apparate nicht widerstandsfähig genug, obwohl im Laufe der Reaktion der Titer sicherlich bis auf 0·15 heruntergieng. Die Zertrümmerung trat hier übrigens erst nach 20 Tagen ein; ein mit normaler *HCl* beschickter Apparat explodierte bereits wenige Stunden nach seiner Zusammensetzung.

Magnesium. Eine Anzahl mit 0·25 H_2SO_4, 0·25 HCl, 0·1 CH_3COOH mit und ohne Gegenwart von Neutralsalz beschickter Apparate explodierten theils nach einigen Stunden, theils nach einigen Wochen. Ein mit neutraler doppelt normaler Magnesiumsulfatlösung und mit von Platindraht umwickeltem Magnesiumdraht zusammengesetzter Apparat zeigte nach 8 Tagen einen Druck von 95 Atm. und zersprang schließlich.

Natrium. Selbst bei Anwendung eines einprocentigen Amalgams und einer zehnfachnormalen Natronlösung fand Zertrümmerung des Apparats infolge eines Drucks von 90 Atm. statt.

Kupfer und Silber, die mit Säuren bekanntlich Wasserstoff nicht entwickeln, können demgemäß nur nach Bruchtheilen einer Atmosphäre zählende Maximaltensionen besitzen.

Wir enthalten uns vorläufig, weitere Schlüsse aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial zu ziehen und wollen nur noch darauf hinweisen, daß die Spannungsreihe, in welche nach den Versuchen von Fr. Streintz[1]) die in Lösungen ihrer Nitrate oder Chloride befindlichen Metalle sich einordnen lassen,

$$Mg,\ Zn,\ Al,\ Cd,\ Fe,\ Ni,\ Cu,\ Ag$$

offenbar auch den auf vergleichbare Konzentrationen der Lösungen reducierten Werthen der Maximaltensionen entspricht; nur würde bei einer Ordnung der Metalle nach der Größe ihrer Maximaltensionen das Aluminium vor dem Zink zu stehen kommen.

Allerdings sind unsere Beobachtungen dem Einwande ausgesetzt, daß bei ihnen möglicherweise der Gleichgewichtszustand noch nicht erreicht und der Fortschritt der Reaktion nur stark verzögert sei. Wenn er auch in anbetracht des Umstandes, daß in vielen Fällen die Maximaltension ziemlich schnell erreicht wurde und daß einer rapiden Zunahme des Druckes ein Zustand folgte, wo er während sehr langer Zeit sich wenigstens nicht nachweisbar änderte, wenig Wahrscheinlichkeit für sich hat, so wäre es doch im höchsten Maaße erwünscht, denselben Gleichgewichtszustand von der anderen Seite her zu erreichen. Der direkte Weg wäre natürlich die Bestimmung des Druckes, mit welchem man Wasserstoff in Metallsalzlösungen hineinpressen muß, um gerade noch Metallabscheidung zu erhalten; allein in Anbetracht der Thatsache, die auch wir gelegentlich konstatierten, daß man nämlich mit Kupfersulfatlösung Tage lang Wasserstoffgas von nach mehreren Atmosphären zählenden Drucke in Berührung bringen kann, ohne Ausfällung metallischen Kupfers zu erzielen, trotzdem die Maximal-

1) Wien. Ber. 77 410 (1878).

tension von Kupfer in Berührung mit seinen neutralen Lösungen sicherlich nur nach kleinen Bruchtheilen einer Atmosphäre zählt, müssen wir schließen, daß der von uns studierte Gleichgewichtszustand von der entgegengesetzten Seite aus noch ungleich schwieriger zu erreichen ist.

Ein anderer Weg, der ebenfalls zur gesuchten Maximaltension führen dürfte, würde darin bestehen, daß man die Metallsalzlösung elektrolysiert und den Druck bestimmt, bei welchem an der Kathode die Wasserstoffentwickelung aufhört und die Metallabscheidung beginnt. Thatsächlich beobachteten wir denn auch, wie bei der Elektrolyse eine bezüglich des Gehaltes an Schwefelsäure und Zinksulfat je 0·5-normalen Lösung, wobei als Anode Zinkamalgam und als Kathode ein Platindraht diente, mit zunehmendem Druck eine immer reichlichere Zinkabscheidung stattfand; allein sie war immer noch von Wassenstoffentwickelung begleitet, bis der Apparat schließlich zersprang, und ein scharfer Uebergangspunkt ließ sich nicht konstatieren. Wahrscheinlich wirken die durch die Elektrolyse in der Nähe der Kathode hervorgerufenen Konzentrationsänderungen im hohen Maaße störend.

Wir wollen unsere Mittheilung nicht ohne den Hinweis schließen, daß wir in den Ergebnissen unserer bisherigen, übrigens nicht ganz einfachen und gefahrlosen Versuche nur den ersten Anfang einer eingehenderen Erforschung eines chemischen Gleichgewichtszustandes erblicken, dessen hohes theoretisches Interesse aus den im ersten Theile unserer Notiz mitgetheilten Beobachtungen wohl zur Genüge erhellt. Da wir äußerer Umstände willen die gemeinschaftliche Fortführung unserer Versuche abbrechen mußten, veröffentlichen wir jetzt schon die bisherigen Resultate, deren Unvollständigkeit Niemand mehr empfinden kann, als wir selber; doch wir entschlossen uns zur Publikation in der Hoffnung, die Aufmerksamkeit auf ein bisher zu wenig beachtetes Gebiet zu lenken, für dessen Erforschung wir die leitenden Prinzipien gegeben zu haben glauben, welches seinen experimentellen Ausbau jedoch noch fast völlig von der Zukunft zu erwarten hat.

Dorpat und Göttingen im Juni 1891.

Ueber die Permeabilität von Niederschlagsmembranen.

Von

G. Tammann.

Um die Thatsache der Semipermeabilitität zu erklären, hat M. Traube [1]) in den Niederschlagsmembranen Poren angenommen, durch die wohl die Wassermoleküle hindurch diffundiren, die aber von den Molekülen gewisser anderer Stoffe nicht passirt werden können. Nach Traube sind die Niederschlagsmembranen Atomsiebe, mit deren Hülfe man die relative Größe der Moleküldurchmesser bestimmen kann. Aus der Porentheorie Traube's folgt der Satz: Moleküle, die durch die Niederschlagsmembranen mit weiten Poren nicht hindurchgehn, können durch Niederschlagsmembranen mit engen Poren erst recht nicht durchtreten. Sollten sich Thatsachen finden, die gegen diesen Satz sprechen, so wäre die Porentheorie Traube's hinfällig.

In jüngster Zeit hat Ostwald [2]) die Anschauungen Traube's auf die Ionen der gelösten Stoffe übertragen und darauf aufmerksam gemacht, daß man nicht von der Durchlässigkeit der Membran für ein Salz, sondern von der für bestimmte Ionen zu sprechen hätte. Ein Salz kann nur dann durch die Membran treten, wenn beide Ionen desselben die Membran zu durchdringen vermögen. Vermag auch nur eines der Ionen die Membren nicht zu durchdringen, so wird auf der anderen Seite der Membran das Salz nie nachgewiesen werden können. Aus Ostwalds Anschauungen ergiebt sich betreffs des Verhaltens von Salzen gegenüber Niederschlagsmembranen ein allgemeiner Satz, nämlich der: daß alle Verbindungen eines Ions, welches die Membran nicht durchdringt, ebenfalls nicht durch die Membran diffundiren. Dieser Satz könnte durch das Verhalten des nichtdissociirten Antheils mannigfache Einschränkungen erleiden, da ja immerhin der Fall denkbar wäre, daß, wenn auch beide Ionen durch die Membran nicht diffundiren, es doch der nicht dissociirte Antheil thut. Einen Satz zu schaffen, wie den: kann eine der Ionen oder beide Ionen die Membran nicht durchdringen, so kann es der nicht dissociirte Antheil auch nicht, wäre mindestens verfrüht, da die Beobachtungen von Pfeffer [3])

1) M. Traube, Archiv f. Anatomie und Physiologie 1867, p. 87.
2) W. Ostwald, Zeitschrift f. phys. Chem. VI, p. 71, 1890.
3) W. Pfeffer, Abhandlungen der sächsischen Gesellsch. 16, p. 338, 1890.

am Protoplasma strickt gegen die auf dem Boden der Porentheorie stehende Ansicht sprechen, nämlich die: ein Stoff geht um so leichter durch eine Membran, je weniger Atome in seinem Molekül enthalten sind. Es ist nicht bekannt, ob bei der Diffusion eines Elektrolyten durch eine Niederschlagsmembran die Ionen oder der nichtdissociirte Antheil oder beide Arten von Molekülen diffundiren. Es werden später einige Messungen über die durch eine Niederschlagsmembran durchdiffundirten Mengen verschiedener Säuren mitgetheilt werden, aus denen allerdings zu folgen scheint, daß hauptsächlich die Ionen die Membran durchdringen.

Zur Prüfung der Anschauungen von Traube und Ostwald habe ich eine Reihe von Versuchen, theils schon vor mehreren Jahren, ausgeführt. Die einzigen mir bekannten Angaben über die Permeabilität von Niederschlagsmembranen rühren von M. Traube[1]) und mir[2]) her; da unter denselben einige widersprechende Angaben vorkommen, so habe ich sie bei anderer Versuchsanordnung nochmals geprüft.

1. Ist man berechtigt die Niederschlagsmembranen als Molekülsiebe zu betrachten? Zur Entscheidung dieser Frage wurden mit den Membranen, die sich bei der Berührung der Lösungen von Gerbsäure und Leim, von Ferrocyankalium und Zinksulfat und von Ferrocyankalium und Cupfersulfat bilden, Versuche betreffs ihrer Permeabilität für Farbstoffe angestellt. Die Concentrationen der Membranogene waren folgende; Gerbsäure 1% Leim, 1% Lösung; Cupfersulfat, Zinksulfat und Ferrocyankalium 0.05 g Molekül in Liter. Zu den Lösungen der Gerbsäure und des Ferrocyankaliums wurde ein wenig der tabellirten Farbstoffe gesetzt, und deren Lösungen dann vorsichtig in einem Reagensrohr auf die Leim-, die Kupfer- und Zinksulfatlösung geschichtet. Nach einer Stunde wurde nachgesehen ob durch die Membran etwas vom Farbstoff durchgedrungen war. Blieb die Grenze zwischen der angefärbten Lösung und der farblosen scharf, wie gleich nach dem Uebereinanderschichten, so wurde in der Tabelle impermeabel verzeichnet. Hatte sich dagegen um die Membran ein nach unten hin heller abschattirter Hof gebildet, so wurde in der Tabelle permeabel notirt. Ich habe dabei drei verschiedene Grade der Permeabilität unterschieden; die Abkürzungen in der Tabelle bedeuten: perm. sp. nur eine leichte Andeutung des Hofes, perm. eine sehr deutliche Ausbildung

1) M. Traube, loc. cit. p. 133—141.

2) G. Tammann, Wied. Ann. 34, p. 310, 1888 und Mémoires de l'Acad. de St. Petersbourg 35, N. 9, p. 169, 1887.

des Hofes und sehr perm. ein sofortiges Erscheinen des Farbstoffes in der angefärbten Lösung. In diesem letzteren Falle wird die ganze farblose Lösung bald gefärbt. Geht der Farbstoff sehr langsam durch die Membran, so haben sich die osmotischen Druckdifferenzen schon ausgeglichen bevor der Farbstoff in deutlich wahrnehmbarer Menge durch die Membran diffundirt ist, und die Bedingung zur Ausbildung des gefärbten Hofes, das Fehlen störender Convectionsströme ist vorhanden. Geht aber Farbstoff in großen Quantitäten durch die Membran, so wird, da der osmotische Strom anfangs seine volle Thätigkeit entwickelt, die ganze Lösung durch die Convectionsströme gefärbt. In den ersten 6 Stunden war bei keinem Farbstoffe, wenn derselbe nicht innerhalb der ersten Stunde durchgetreten war, eine Diffusion durch die Membran zu bemerken. Nach 24 Stunden aber hatte sich an der gerbsauren Leim und der Ferrocyankupfermembran eine starke Fällung gebildet; in Folge dessen waren in die Leimlösung alle in der Tabelle verzeichneten Farbstoffe, mit Ausnahme von Lackmus gelangt; ebenso in die Kupferlösung alle mit Ausnahme von Methylviolett 2B, Brillantgrün, Baumwollenblau, Methylorange und Lackmus. In der Zinksulfatlösung war nach 24 Stunden nichts, was nicht schon in der ersten Stunde bemerkt wurde, durchgetreten. Die Ferrocyanzinkmembran hatte sich aber auch nur wenig verdickt, sie war trübe geworden, starke Fällungen bilden sich an ihr nie aus. Fast alle der untersuchten Farbstoffe sind Salze, nur Eosin und Methyleosin sind freie Säuren und gerade diese sind am reichlichsten durch alle Membranen hindurchgetreten. Wie wir später sehn werden, gehn alle Säuren durch die Niederschlagsmembranen. Alle anderen Farbstoffe sind Salze, und zwar haben wir 2 Gruppen zu unterscheiden: I. Salze, deren Basen gefärbt sind, untersucht wurden Chloride, Oxalate, Pikrate; II. Natronsalze, deren Säureradicale gefärbt sind und die größtentheils zu den Sulfonsäuren gehören. Die Stoffe sind der Kürze wegen mit ihren Handelsnamen bezeichnet, und innerhalb jeder Gruppe nach der Anzahl von Atomen im im gefärbten Ion geordnet.

I. Salze gefärbter Basen.	Membran aus gerbsaurem Leim;	aus Ferrocyanzink;	aus Ferrocyankupfer.	
Fuchsin Chlorid	perm.	imper.	perm.	1.
Diamantfuchsin Chlorid	perm. sp.	imper.	perm. sp.	2.
Safrania-Chlorid	perm.	imper.	imper.	
Methylviolett 2B Chlorid	imper.	imper.	imper.	
Brillantgrün-Oxalat	perm. sp.	imper.	imper.	
Anilingrün-Pikrat	perm.	perm. sp.	imper.	
Methylviolett-5BChlorid	imper.	imper.	imper.	

II. Natronsalze der Sulfonsäuren.	Membran aus gerbsaurem Leim;	aus Ferrocyanzink;	aus Ferrocyankupfer.	
Methylorange	perm.	imper.	imper.	
Orange 2	imperm.	imper.	imper.	
Bordeaux R	perm. sp.	perm.	imper.	3.
Ponceau 3R	perm. sp.	perm. sp.	perm.	4.
Marineblau	imper.	imper.	imper.	
Baumwollenblau	imper.	perm.	imper.	5.
Erytrosin extra, Tetrajodfluorescennatrium	perm.	sehr perm.	imper.	6.
Lackmussaures-Kali	imper.	imper.	imper.	
Säuren.				
Eosin	sehr perm.	perm.	sehr perm.	7.
Methylosin	sehr perm.	sehr perm.	sehr perm.	

Von 17 Farbstoffen gehen 11 durch die Membran aus Gerbsäure und Leim, 7 durch die Ferrocyanzinkmembran und nur 5 durch die Ferrocyankupfermembran. Betrachtet man die Membranen als Atomsiebe, so hätte man damit die Reihenfolge der Lochweiten in den Sieben festgestellt. Nothwendigerweise darf aber ein Atom, welches durchs Sieb mit größter Lochweite nicht hindurchgeht, ein Sieb mit engen Löchern erst recht nicht passiren. Man kann sich leicht in der Tabelle überzeugen, daß dieser Bedingung nicht genügt wird. Es kommen 7 Ausnahmen vor, die in der Tabelle mit Ziffern bezeichnet sind.

2. Diffusion der Säuren durch die Ferrocyankupfermembran. Alle Säuren durchdringen die Niederschlagsmembran aus Ferrocyankupfer, und zwar diffundiren die schwachen Säuren wenig, die starken Säuren in großer Menge durch die Membran. Man kann die Diffusion der Säuren durch eine Ferrocyankupfermembran leicht in folgender Weise verfolgen. Ueber eine Lösung der Säure (0.05 GM.) und des entsprechenden Kupfersalzes (0.05 GM.) wird in einem schief gehaltenen Reagensglase eine mit Lackmus gefärbte Lösung von Ferrocyankalium (0.1 GM.) geschichtet. Bei den starken Säuren: Salzsäure, Salpetersäure, Schwefelsäure, Pseudocumolsulfonsäure und Tribromessigsäure nimmt man dicht über der Ferrocyankupfermembran eine scharf ausgebildete rothe Zone wahr, aus der sich rothe Schlieren durch die Ferrocyankaliumlösung erheben, oben sammeln sich die verdünnten Lösungsschichten der Ferrocyankaliumlösung an, und in einer Minute färbt sich etwa 1 cm Lösungssäule von oben herab nach unten hin roth. Bei schwachen Säuren ist der rothe Saum über der Ferrocyankupfermembran nicht zu beobachten, sonst geht wie früher die Rothfärbung der Lösung

nur langsam, von oben herab vor sich. Die untersuchten schwachen Säuren sind: Essigsäure, Propionsäure, Isobuttersäure, Milchsäure, Bernsteinsäure, Malonsäure, Weinsäure, Citronensäure, Mono-, Di- und Trichloressigsäure. Natürlich kann man bei anders gewählten Concentrationen der Lösungen auch andere Bilder beobachten. Herrscht in der Lösung der Säure und des Kupfersalzes höherer osmotischer Druck als in der Ferrocyankaliumlösung, so tritt die Rothfärbung ebenfalls an der oberen Seite der Membran auf, um sich aber von unten nach oben langsam, entsprechend der Diffusion der Säure, zu verbreiten.

Die Beobachtung, daß starke Säuren augenscheinlich in bedeutend größerer Menge als die schwachen Säuren durch die Ferrocyankupfermembran treten, machte einige quantitative Parallelversuche mit verschiedenen Säuren wünschenswerth. In eine flache Schale von 10.5 cm Durchmesser wurden 80 cbcm einer Lösung von Ferrocyankalium (0.05 GM.) gebracht, die Lösung mit einem Stück Pergamentpapier überdeckt und auf dieses immer 100 cbcm einer Lösung von Säure mit dem Zusatz des entsprechenden Kupfersalzes gebracht. Nach einer kurzen Zeit wurde die überdiffundirte Säure in der ganzen Portion der Ferrocyankaliumlösung mit normaler Natronlauge titirt. In folgender Tabelle sind für jeden Versuch die Anzahl von verbrauchten cbcm Natronlauge neben der seit Beginn des Versuchs verflossenen Zeit in Minuten notirt.

0.5 GM. HCl + 0.05 GM. $CuCl_2$		0.5 GM. HNO_3 + 0.05 GM. $Cu(NO_3)_2$	
Zeit	cbcm norm. Natronl.	Zeit	cbcm norm. Natronl.
8	2.6	10	3.6
11	4.2	14	5.6
16	8.7	18	7.7
30	9.4	33	11.7
70	16.0	45	14.8
70	15.9	62	18.0
80	18.0	102	21.9
120	21.8		

0.25. GM. H_2SO_4 + 0.05 GM. $CuSO_4$		0.5 GM. CH_3COOH + 0.05 GM. $Cu(CH COO)_2$	
Zeit	cbcm norm. Natronl.	Zeit	cbcm norm. Natronl.
10	2.6	12	1.0
22	3.4	20	1.6
60	8.2	62	3.9
84	9.7	120	6.2
120	12.2	180	7.9
318	17.5	376	12.5

Nach Eintritt des Gleichgewichts, nachdem auf beiden Seiten der

Membran die Concentration der Säure dieselbe geworden ist, müßten 22 cbcm norm. Natronlauge zur Sättigung in den 80 cbcm Ferrocyankaliumlösung verbraucht werden. Am schnellsten wird dieser Gleichgewichtszustand bei Salpetersäure und Salzsäure erreicht. Die durch den osmotischen Wasserstrom hervorgerufenen Convectionsströme beschleunigen den Eintritt des Gleichgewichts in hohem Maasse. Durch ein Stück Pergamentpapier diffundirte von oben nach unten durch Pergamentpapier unter ganz ähnlichen Bedingungen, nur waren die beiden Membranogene nicht zugefügt worden, in 70 Minuten 0·0043 GM., während in derselben Zeit durch die Pergamentschicht mit einer Ferrocyankupfermembran 0.0160 GM., also die vierfache Menge hindurch diffundirte. Nach 15 Minuten sind in Grammmolekülen durch die Ferrocyankupfermembran hindurch diffundirt

Salzsäure	0.0070 GM
Salpetersäure	0.0060
Schwefelsäure	0.0034
Essigsäure	0.0011.

Unter denselben Bedingungen, mit der Abweichung, daß die Schale Ferrocyankaliumlösung von 0.025 GM. und die Lösung auf dem Pergamentpapier 0.25 GM. der folgenden Säuren plus 0.025 GM. des Kupfersalzes der entsprechenden Säure enthält, sind in 75 Minuten in Grammmolekülen durch die Ferrocyankupfermembran hindurchdiffundirt

Salzsäure	0.0090 GM.
Trichloressigsäure	0.0066
Monochloressigsäure	0.0033
Essigsäure	0.0026.

Bei verschiedenen Säuren ordnen sich die durch die Ferrocyankupfermembran hindurchdiffundirten Mengen in der Reihenfolge der Gehalte jener Lösungen an dissociirten Molekülen. Ob die diffundirten Mengen wirklich proportional der Anzahl von Ionen in den Lösungen sind, läßt sich nicht entscheiden, da man die Concentration der Säurelösung an der Ferrocyankupfermembran nicht kennt. Die Säurelösung wird ja beständig durch den osmotischen Strom verdünnt. Die Frage, ob die nicht dissociirten Antheile die Membran durchdringen, kann also auf Grund jener Versuche weder bejaht noch verneint werden. Man darf nur behaupten, daß hauptsächlich die Ionen die Membran durchdringen.

3. Diffusion von Salzen durch Niederschlagsmembranen. Traube[1]) hat von der Ferrocyankupfermembran angegeben,

1) M. Traube, loc. cit. p. 133—141.

daß sie für Chlorkalium, Chlornatrium und Chlorammonium permeabel, für Baryumchlorid und Nitrat, Calciumchlorid, Kalium und Ammoniumsulfat impermeabel ist. Ich habe früher die Angabe für Kaliumsulfat bestätigt, habe mich aber jetzt überzeugt, daß alle die von Traube angegebenen Salze, mit Ausnahme von Calciumchlorid, die Membran zu durchdringen vermögen. Von der Membran aus gerbsaurem Leim giebt Traube an, daß sie von Chlorammonium, Ammoniumsulfat, Baryumnitrat und Schwefelsäure durchdrungen wird; impermeabel soll dieselbe für Ferrocyankalium sein. Die letzte Angabe ist nicht richtig; denn eine Membran aus gerbsaurem Leim vermehrt den Widerstand einer Ferrocyankaliumlösung, die vor ihr in zwei untereinander nicht zusammenhängende Theile getrennt wird, und außerdem kann man leicht nach dem unten beschriebenen Verfahren zeigen, daß Ferrocyankalium wie auch Cupfersulfat in recht bedeutenden Mengen durch die Membran treten. Man kennt also für die Membran aus gerbsaurem Leim kein Metallsalz, für welches die Membran impermeabel ist.

Schichtet man in einem schief gehaltenen Probirglase über eine Lösung von Ferrocyankalium eine Lösung von Cupfersulfat und Kaliumsulfat, so kann man nach 10 Minuten in der Ferrocyankaliumlösung eine geringe Menge von Kaliumsulfat nachweisen. Da aber gewöhnlich während dieser Zeit eine stärkere Fällung von Ferrocyankupfer eintritt, und da auch ohne Zusatz von Kaliumsulfat zur Kupfersulfatlösung nach der Bildung einer starken Fällung Kaliumsulfat in der Ferrocyankaliumlösung nachweisbar ist, so bleibt man im Zweifel, ob das Kaliumsulfat durch die Membran hindurchdiffundirt oder bei der Bildung der Fällung in die Ferrocyankaliumlösung gelangt ist. Man kann Versuche über die Permeabilität der Ferrocyankupfermembran Salzen gegenüber mit viel größerer Sicherheit anstellen, wenn man die Ferrocyankupferhaut, wie es Pfeffer[1]) gethan, in Pergamentpapier einlagert. Dadurch verzögert man das Eintreten der störenden Fällung sehr bedeutend. Nach 1 Stunde ist auf dem Pergamentpapier nur eine braune Färbung entstanden, und auch nach 3 und 4 Stunden ist die Fällung von Ferrocyankupfer so gering, daß es nicht gelingt, in der Ferrocyankaliumlösung Kaliumsulfat nachzuweisen. All die untersuchten Salze gehen sehr leicht durch das Pergamentpapier hindurch, so daß diese die Resultate wenigstens in qualitativer Richtung hin nicht beeinflussen kann. Zur Ausführung der folgenden Prüfungen wurde auf ein kleines Uhrglas eine Lösung von Ferro-

1) W. Pfeffer, Osmotische Untersuchungen 1877, p. 12.

cyankalium (0.1 GM) gebracht, nach dem Bedecken dieser mit Pergamentpapier, wurde aufs Papier eine Lösung, die 0.1 GM. des zu prüfenden Salzes und 0.1 GM. des entsprechenden Kupfersalzes enthielt, gegossen. Entweder wurde auf das diesen beiden Salzen gemeinsame Ion, oder auf das dritte vorhandene Ion in der Ferrocyankaliumlösung geprüft. Die Concentrationen der Lösungen sind so gewählt, daß der osmotische Strom Convectionsströme veranlaßt, die für Vertheilung des durchgetretenen Stoffes in der Ferrocyankaliumlösung sorgten. Wenn nicht eine andere Zeit angegeben ist, so blieben die Lösungen eine Stunde lang in Berührung.

Von den Sulfaten diffundiren durch die Ferrocyankupfermembran in geringer Menge Ammoniumsulfat, in bedeutend geringerer Menge Kaliumsulfat und Natriumsulfat und in Spuren Lithiumsulfat. Für Magnesiumsulfat ist die Membran ganz impermeabel, auch nach 5 Stunden war in der Ferrocyankaliumlösung keine Schwefelsäure nachzuweisen. Ueber das Verhalten der Chloride, Bromide, Nitrate und Dithionate der alkalischen Erdmetalle giebt folgende Zusammenstellung einen Ueberblick. Es wurde nach 1 und 3 Stunden in der Ferrocyankaliumlösung auf das Vorhandensein des Salzes der alkalischen Erde mit kohlensaurem Natron geprüft.

	Cl_2	Br_2	$(NO_3)_2$	S_2O_6
Ba	perm.	perm.	perm.	imp.
Sr	perm.	perm.	imp.	perm.
Ca	imp.	imp.	imp.	imp.
Mg	imp.	imp.	imp.	—

Chlorbaryum war am meisten durchgetreten, von allen anderen Salzen nur Spuren. Von den Kalk- und Magnesiumsalzen diffundirt kein einziges durch die Membran. Die Chloride, Bromide und Nitrate von Kalium, Ammonium, Natrium und Lithium gehn alle in reichlicher Menge, vielmehr als die entsprechenden Sulfate, durch die Membran. Die folgenden Salze wurden zur Ferrocyankaliumlösung gesetzt und nach 1 und 3 Stunden wurde die Kupfersulfatlösung abgedampft und erhitzt; trat eine Verfärbung des hellblauen Kupfersulfats ein, so war damit der Durchtritt der Salze bewiesen. Von den Kalisalzen der Carbonsäuren geht am meisten ameisensaures, dann essigsaures, schließlich propionsaures und malonsaures Kalium durch. Isobuttersaures und isovaleransaures, bernsteinsaures, weinsaures und citronensaures Kalium diffundiren nicht durch die Membran.

Die Ferrocyanzinkmembran verhält sich, so weit dieselbe auf das Verhalten von Salzen geprüft wurde, ganz ähnlich der Ferrocyankupfermembran. So gelten die über das Verhalten der Sul-

fate gemachten Angaben im selben Wortlaut auch für die Ferrocyanzinkmembran.

Bernsteinsäure, Weinsäure, Citronensäure und Isobuttersäure durchdringen die Ferrocyankupfermembran, für die Kalisalze dieser Säure ist aber dieselbe Membran impermeabel. Die Chloride und Nitrate der Alkalien gehn in großen Mengen durch die Membran, ebenso tritt viel Schwefelsäure durch dieselbe. Also finden weder die Ionen Kalium, Natrium, Ammonium, Lithium und andererseits das Ion SO_4 an der Membran einen bedeutenden Widerstand, und doch gehn die Sulfate von Kalium, Natrium und Lithium nur in sehr geringer Menge durch die Membran. Kaliumdithionat durchwandert die Membran, nicht aber Strontiumdithionat, das ja auch diffundiren müßte, da ja Strontiumchlorid, -bromid und -nitrat die Membran durchdringen.

Diese Befunde sprechen gegen die Ansicht Ostwalds: alle Salze, in denen ein Ion enthalten ist, welches durch die Membran nicht diffundirt, können ebenfalls die Membran nicht passiren.

4. Um die Semipermeabilität von Niederschlagsmembranen zu erklären, hat Traube die Porentheorie aufgestellt. Es giebt aber noch eine Reihe von anderen semipermeabeln Substanzen, auf die man die Porentheorie nicht anzuwenden braucht, um ihre Semipermeabilität zu erklären. Nach Deville und Troost[1]) und Th. Graham[2]) durchdringt Wasserstoff, besonders leicht bei höherer Temperatur, Eisen, Platin und Palladium; von diesen Metallen wies Graham nach, daß sich in ihnen Wasserstoff auflöst. Lermite zeigte Osmose in einem System von Aether, Wasser und Chloroform. Schichtete er diese Flüssigkeit in einem Rohr übereinander, so nahm das Chloroform an Volumen zu, indem der Aether, der sich in Wasser löst, durch dieses zum Chloroform diffundirt. Für Stoffe, die sich in Membranen aus jenen Materialien lösen, sind diese Membranen permeabel, für solche, die in jenen Membranen sich nicht lösen, sind sie impermeabel. Nernst hat in dieser Weise die Semipermeabilität z. B. fürs Protoplasma erklärt. In ganz derselben Weise kann man auch die Semipermeabilität der Niederschlagsmembranen verstehn. Alle Niederschlagsmembranen sind hydratische Stoffe. Für diese Hydrate ist es, wie für Kieselsäurehydrat, wahrscheinlich, daß die Curven ihrer Dampfspannun-

1) M. Deville und Troost, Compt. rend. 56. 977. 1863.
2) Th. Graham, Phil. Mg. (4) 32 p. 401. 1866.
3) L'hermite Ann. chem. phys. [3] 43 p. 420. 1854.
4) W. Nernst, Zeitschrift f. phys. Chem. VI, p. 40, 1890.

gen nach dem Wassergehalt des Hydrats hin durch eine stetig gekrümmte Linie, ohne Sprünge wie bei gewissen Salzhydraten, dargestellt wird. Man darf ferner annehmen, daß durch das Imbitationswasser, das colloide Stoffe, zu denen die Niederschlagsmembran gehören, aufnehmen, die Dampfspannung einer solchen hydratischen Niederschlagsmembran sehr nahe der des reinen Wassers wird. Der osmotische Strom in einem System einer Lösung einer Niederschlagsmembran und einer Lösung, käme dann durch einen Destillationsproceß zustande. Der Wassergehalt der Membran müßte von den Dampfspannungen der sie umgebenden Lösungen abhängen. Hat die Lösung A größeren osmotischen Druck als die Lösung B, so würde zuerst Wasser von B in die Membran, durch diese in die Lösung A destilliren oder diffundiren. Ob ein Stoff außer Wasser die Membran passiren kann, hängt nur von der Löslichkeit jenes in der Membran ab. Wir haben früher gesehn, daß die Thatsachen den Folgerungen aus der Porentheorie nicht genügen. Regeln für die Permeabilität kann man aus den oben entwickelten Anschauungen nicht ableiten. Besitzen wir doch überhaupt keine Regeln, die uns in Stand setzen, etwas über die Löslichkeit zweier Stoffe in einander vorauszusagen.

Dorpat, 10. Mai 1891.

Inhalt von Nr. 6.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

19. August. №. 7. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. Juli.

Schering legt eine neue Lösung der Kepplerschen Gleichung vor.

Schwarz macht eine Mittheilung über ein demnächst zu veröffentlichendes Verzeichniß aller (oder wenigstens der Mehrzahl) derjenigen Schriften, welche seit dem Jahre 1761 veröffentlicht sind und sich mit der Theorie der Flächen kleinsten Flächeninhalts beschäftigen.

Riecke legt eine Abhandlung vor: »über eine mit den elektrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche 4. Ordnung«.

Klein legt eine Arbeit des Herrn Dr. Hilbert in Königsberg vor: »über die Theorie der algebraischen Invarianten«.

Wüstenfeld übergiebt für den Band 37 der Abhandlungen eine Fortsetzung seiner früheren Arbeiten über: »Die gelehrten Schâfi'iten des 5. Jahrhunderts der H.«

de Lagarde legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Rahlfs: »über Lehrer und Schüler bei Junilius Africanus« vor.

Ueber eine mit den electrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche.

Von

Eduard Riecke.

Wir beziehen den Turmalin auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Axe mit der dreizähligen Symmetrieaxe zusammenfällt, während die x-Axe auf einer Symmetrieebene senk-

recht steht. Es sei eine beliebige Richtung dadurch bestimmt, daß ihre Cosinusse mit Bezug auf die Coordinatenaxen gleich $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind. Durch einen in dieser Richtung ausgeübten Druck p werden in den einzelnen Volumelementen des Turmalins elektrische Momente erzeugt, welche bezogen auf die Einheit des Volumens die Componenten a, b, c besitzen mögen. Nach den von Voigt aufgestellten Gleichungen ist:

$$a/p = \gamma_1(2\gamma_2 Q + \gamma_3 R)$$
$$b/p = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) Q + \gamma_2 \gamma_3 R$$
$$c/p = S + \gamma_1^2 T$$

wo Q, R, S und T gewisse dem Turmalin eigenthümliche Constante sind.

Trägt man nun die einem bestimmten Drucke entsprechenden Werthe von a/p, b/p, c/p auf den Coordinatenaxen auf, so bestimmen sie einen Punkt, p, welcher eine gewisse Fläche beschreiben wird, wenn man dem Druck alle möglichen Richtungen im Raume ertheilt. Die Eigenschaften dieser Fläche sollen im Folgenden untersucht werden. Man bemerkt zunächst, daß jeder gegebenen Druckrichtung ein bestimmter Punkt der Fläche entspricht; der Radius Vektor dieses Punktes giebt durch seine Richtung die Richtung des piëzoëlektrischen Momentes, durch seine Länge die Größe des Momentes an.

Es ist zweckmäßig, an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten Polarkoordinaten einzuführen, indem man

$$\gamma_1 = \sin\Theta\cos\Phi, \qquad \gamma_2 = \sin\Theta\sin\Phi, \qquad \gamma_3 = \cos\Theta$$
$$a/p = \varrho\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad b/p = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad c/p = \varrho\cos\vartheta$$

und zur Abkürzung noch

$$\varrho\sin\vartheta = \sigma$$

setzt. Die Voigt'schen Gleichungen werden dann:

$$\xi = \sigma\cos\varphi = Q\sin^2\Theta\sin 2\Phi + R\sin\Theta\cos\Theta\cos\Phi$$
$$\eta = \sigma\sin\varphi = Q\sin^2\Theta\cos 2\Phi + R\sin\Theta\cos\Theta\sin\Phi$$
$$\zeta = \varrho\cos\vartheta = S + T\cos^2\Theta$$

Wir betrachten zunächst die Schnitte der Fläche durch Ebenen, welche senkrecht zu der z-Axe gelegt werden; die einer solchen Schnittkurve angehörenden Flächenpunkte entsprechen Druckrichtungen, welche einen um die z-Axe als Rotationsaxe beschriebenen Kreiskegel bilden. Es ergiebt sich dieß aus der für die z-Coor-

dinate eines beliebigen Flächenpunktes geltenden Gleichung $\zeta - S = T \cos^2 \Theta$. Setzen wir:

$$Q \sin^2 \Theta = Q', \qquad R \sin \Theta \cos \Theta = R'$$

so wird

$$\xi = Q' \sin 2\Phi + R' \cos \Phi$$
$$\eta = Q' \cos 2\Phi + R' \sin \Phi.$$

Die Größen Q', R' und $\zeta - S$ können mit Hülfe einer einfachen geometrischen Construktion gefunden werden, sobald Q, R, T und Θ gegeben sind.

Die einem bestimmten Werthe des Winkels Θ entsprechende Schnittkurve, beziehungsweise ihre Projektion auf die xy-Ebene kann nun in folgender Weise konstruirt werden. Wir beschreiben in der xy-Ebene um den Anfangspunkt des Coordinatensystems einen Kreis mit dem Halbmesser R'; durch den Anfangspunkt ziehen wir einen Radius Vektor, welcher mit der x-Axe den Winkel Φ einschließt und welcher demzufolge in der durch die Druckrichtung gehenden Meridianebene liegt. Durchschneidet dieser Radius den mit R' beschriebenen Kreis in dem Punkte c, so ziehen wir durch c eine Linie, welche mit der y-Axe den Winkel 2Φ einschließt und schneiden auf dieser von c aus die Strecke Q' ab; der so erhaltene Punkt ist die Projektion eines Punktes der Oberfläche, welcher das der Druckrichtung (Θ, Φ) entsprechende elektrische Moment repräsentirt.

Wir wollen nun untersuchen, welche Werthe des Winkels Φ dem Winkel $\varphi = \pi/6$ entsprechen. Die Gleichungen sind

$$\sigma \cos \pi/6 = Q' \sin 2\Phi + R' \cos \Phi, \qquad \sigma \sin \pi/6 = Q' \cos 2\Phi + R' \sin \Phi$$

woraus

$$Q' \cos(2\Phi + \pi/6) = -R' \sin(\Phi - \pi/6) \text{ oder}$$
$$Q' \sin 2(\Phi - \pi/6) = R' \sin(\Phi - \pi/6).$$

Eine Lösung dieser Gleichung erhält man, indem man $\Phi = \pi/6$ setzt; in diesem Falle liegt also die Richtung des piëzoëlektrischen Momentes in derselben durch die Hauptaxe gehenden Ebene, wie die Druckrichtung. Da allgemein

$$\sigma^2 = Q'^2 + R'^2 + 2Q' R' \sin 3\Phi,$$

so wird für $\Phi = \pi/6$: $\sigma = R' + Q'$.

Zwei weitere Wurzeln der für Φ geltenden Gleichung sind:

$$\Phi = \frac{\pi}{6} \pm \arccos \frac{R'}{2Q'}.$$

Ist $Q' < R'/2$ so sind die dieser Gleichung entsprechenden Winkel imaginär. Es existieren in diesem Falle keine weiteren Druckrichtungen, für welche das elektrische Moment in das Azimut $\pi/6$ fällt. Ist $Q' = R'/2$, so sind die beiden anderen Wurzeln der Gleichung ebenfalls gleich $\pi/6$. Wenn aber $Q' > R'/2$, so existieren noch zwei andere Azimute Φ, für welche das Azimut des elektrischen Momentes gleich $\pi/6$ wird. Es ergiebt sich in diesem Falle

$$\sigma^2 = R'^2 + Q'^2 + 2R'Q' \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 3 \arccos \frac{R'}{2Q'}\right)$$
$$= R'^2 + Q'^2 + 2R'Q' \cos\left(3 \arccos \frac{R'}{2Q'}\right)$$
$$= R'^2 + Q'^2 + (R'^2 - 3Q'^2)\frac{R'^2}{Q'^2}.$$

Setzen wir hier für R' und Q' ihre Werthe in Q, R und Θ, so ergiebt sich:

$$\sigma Q = R^2 \cos^2\Theta - Q^2 \sin^2\Theta.$$

Da nun

$$\cos^2\Theta = \frac{\zeta - S}{T},$$

so erhält man die Gleichung

$$TQ(\sigma + Q) = (R^2 + Q^2)(\zeta - S).$$

In dieser Gleichung ist die folgende merkwürdige Eigenschaft unserer Fläche ausgesprochen. Wir haben gesehen, daß die betrachtete Curve auf dem durch $\varphi = \pi/6$ bestimmten Radius Vektor jedenfalls einen Punkt besitzt, für welchen $\sigma = R' + Q'$ und Φ ebenfalls gleich $\pi/6$. Außerdem hat aber die Curve auf demselben Radius noch einen Doppelpunkt, wenn $Q' > 2R'$; für diesen ist $\sigma Q = R^2 \cos^2\Theta - Q^2 \sin^2\Theta$ und $\Phi = \pi/6 \pm \arccos R'/2Q'$. Auf der Oberfläche selbst liegt die betrachtete Curve in einer zur z-Axe senkrechten Ebene, deren Abstand von der xy-Ebene durch $\zeta = S + T\cos^2\Theta$ gegeben ist. Nun zeigt die letzte Gleichung, daß zwischen σ und ζ eine lineare Gleichung besteht; d. h. die Doppelpunkte der in den verschiedenen

auf einanderfolgenden Schnittebenen befindlichen Curven liegen auf einer geraden Linie.

Für $Q' = R'$ oder $\operatorname{tg}\Theta = \frac{R}{Q}$ wird $\sigma = 0$ und $\Phi = \pi/2$ oder gleich $-\pi/6$.

Aus den Gleichungen $\xi = R'\cos\Phi + Q'\sin 2\Phi$ und $\eta = R'\sin\Phi + Q'\cos 2\Phi$ ergiebt sich, daß die zu untersuchenden Schnittkurven Hypocykloiden sind, welche in folgender Weise konstruirt werden können. In der xy-Ebene beschreiben wir um den Anfangspunkt 0 des Coordinatensystems einen Kreis mit dem Halbmesser $3R'/2$; in diesem lassen wir einen zweiten Kreis rollen, dessen Halbmesser gleich $R'/2$ ist; nehmen wir auf dem rollenden Kreis einen Punkt, π, im Abstande Q' von seinem Mittelpunkt c und stellen wir den Kreis so, daß die Azimute der Linien Oc und $O\pi$ gegen die x-Axe gleichzeitig den Werth $\pi/6$ annehmen, so beschreibt der Punkt π die zu untersuchende Schnittkurve.

Es ist hiernach leicht, einen Ueberblick über die verschiedenen Gestalten zu gewinnen, welche die Schnittkurve annimmt, wenn Θ von 0 bis $\pi/2$ wächst und dem entsprechend ζ von $S + T$ bis S abnimmt. Für sehr kleine Werthe von Θ ist $R' = R\,\Theta$ und $Q' = Q\,\Theta^2$; die entsprechende Hypocykloide weicht demnach nur sehr wenig ab von einem mit dem Halbmesser R' beschriebenen Kreise. Da der Halbmesser des rollenden Kreises gleich dem dritten Theil von demjenigen des Bahnkreises ist, so kehrt der erstere genau in seine Anfangslage zurück, wenn er drei Umwälzungen vollzogen hat. Die Hypocykloide bildet eine geschlossene Curve; sie ist symmetrisch mit Bezug auf drei durch den Mittelpunkt des Bahnkreises gezogene Durchmesser, welche mit der x-Axe die Winkel $\pi/6$, $5\pi/6$, $9\pi/6$ einschließen. Der Radius Vektor der Hypocykloide hat seinen größten Werth $R' + Q'$ in den Azimuten $\varphi = \pi/6$, $= 5\pi/6$, $= 9\pi/6$, seinen kleinsten Werth $R' - Q'$ in den Azimuten $\varphi = 3\pi/6$, $= 7\pi/6$, $= 11\pi/6$. Die Cykloide ist eine verkürzte, so lange $Q' < R'/2$. Wird $Q' = R'/2$, also $\operatorname{tg}\Theta = R/2Q$ und $\zeta = S + \frac{4Q^2 T}{4Q^2 + R^2}$, so erhalten wir eine gewöhnliche Hypocykloide mit 3 Spitzen. Wird $Q' > R'/2$, so wird die Hypocykloide eine verlängerte, mit Doppelpunkten in den Richtungen $\varphi = \pi/6$, $= 5\pi/6$, $= 9\pi/6$. Für $Q' = R'$ geht die Cykloide durch den Mittelpunkt des Bahnkreises hindurch, die drei Doppelpunkte fallen in einen dreifachen Punkt zusammen. Wird $Q' > R'$, so fallen die Doppelpunkte in die Azimute $\varphi = 7\pi/6$, $= 11\pi/6$, $= 3/\pi 6$. Wenn endlich Θ nahe an $\pi/2$ rückt, so wird $Q' = Q$ und $R' = R\,(\pi/2 - \Theta)$;

für $\Theta = \pi/2$ geht die Cykloide über in einen Kreis mit dem Halbmesser Q; gleichzeitig wird $\zeta = S$ und für die Doppelpunkte $\sigma = -Q$.

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung der Meridianschnitte der Fläche. Zuerst mögen die in einer der Symmetrieebenen liegenden Curven betrachtet werden. Setzen wir $\varphi = \pi/6$, so wird für die Maximalwerthe $R' + Q'$ des Radius Vektors auch $\Phi = \pi/6$; lassen wir Θ wachsen von 0 bis $\pi/2$, so sind jene Maximalwerthe gegeben durch $\sigma = R \sin\Theta \cos\Theta + Q \sin^2\Theta$, die entsprechenden Werthe der z-Coordinate durch $\zeta = S + T\cos^2\Theta$. Die in derselben Symmetrieebene liegenden Minima der Radien Vektoren, $R' - Q' = R\sin\Theta\cos\Theta - Q\sin^2\Theta$ erhalten wir, wenn wir $\varphi = 7\pi/6$, und dem entsprechend auch $\Phi = 7\pi/6$ setzen und dann wiederum Θ von 0 bis $\pi/2$ wachsen lassen. Die zugehörigen z-Coordinaten sind wieder gegeben durch $\zeta = S + T\cos^2\Theta$. Wenn wir nun in der betrachteten Symmetrieebene für die beiden in Frage kommenden Quadranten die positive Richtung von σ so wählen, daß sie mit der Maximalrichtung des Radius Vektors übereinstimmt, so haben wir das Vorzeichen des Minimalwerthes umzukehren und erhalten, wenn Θ in dem Quadranten $z, +\sigma$ liegt: $\sigma = Q\sin^2\Theta + R\sin\Theta\cos\Theta$, wenn Θ in dem Quadranten $z, -\sigma$ liegt: $\sigma = Q\sin^2\Theta - R\sin\Theta\cos\Theta$. Beide Ausdrücke können in den einen $\sigma = Q\sin^2\Theta + R\sin\Theta\cos\Theta$ zusammengefaßt werden, wenn wir Θ selbst in dem ersteren Quadranten positiv, in dem zweiten negativ nehmen. Bezeichnet man durch σ und σ' die beiden Radien, welche einem und demselben absoluten Werthe von Θ entsprechen, so wird

$$\frac{\sigma + \sigma'}{2} = Q\sin\Theta \text{ und daher } \frac{\sigma + \sigma'}{2Q} + \frac{\zeta - S}{T} = 1.$$

Es ergiebt sich somit der Satz: Zieht man in der Symmetrieebene Linien senkrecht zu der z-Axe, so schneiden diese die Oberfläche in zwei Punkten; die Halbierungspunkte der durch die Schnittpunkte gebildeten Segmente liegen in einer geraden Linie, welche die Punkte mit den Coordinaten $\zeta = S$, $\sigma = \sigma' = Q$ und $\zeta = S + T$, $\sigma = \sigma' = 0$ verbindet. Setzt man nun

$$\tau = \sigma - \frac{Q}{2}, \quad \zeta' = \zeta - S - \frac{T}{2},$$

so ergiebt sich durch Elimination von Θ:

$$(T\tau + Q\zeta')^2 + R^2\zeta'^2 = R^2 T^2/4.$$

Die betrachtete Curve ist somit eine Ellipse, deren Mittelpunkt in dem ursprünglichen System die Coordinaten $\sigma = Q/2$, $\zeta = S + T/2$

hat und welche von einer zu der xy-Ebene in der Entfernung S gelegten Parallelebene im Abstande Q von der z-Axe, von einer in der Entfernung $S+T$ gelegten Parallelebene in der z-Axe selbst berührt wird.

Diese Ellipse repräsentiert aber nicht den ganzen Schnitt der Fläche durch die dem Azimut $\varphi = \pi/6$ entsprechende Symmetrieebene; denn in dieser Ebene liegen noch die Doppelpunkte der Hypocykloiden; die von diesen gebildete gerade Linie

$$TQ(\sigma+Q) = (R^2+Q^2)(\zeta-S)$$

genommen zwischen den Ordinaten $\zeta = S$ und $\zeta = S+\dfrac{4Q^2T}{4Q^2+R^2}$ muß der Ellipse noch hinzugefügt werden, um den vollständigen Schnitt zu erhalten. Aus dem Folgenden geht hervor, daß die gerade Linie als eine doppelt zählende zu betrachten ist.

Für eine beliebige Meridianebene erhält man die Gleichung der Schnittkurve am einfachsten, wenn man zunächst die Gleichung der zu der xy-Ebene parallelen Schnittkurven in rechtwinkeligen Coordinaten aufstellt. Setzt man zu diesem Zweck in den Gleichungen

$$\xi = R'\cos\Phi + 2Q'\sin\Phi\cos\Phi$$
$$\eta = R'\sin\Phi + Q'(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi)$$
$$\cos\Phi = \frac{x}{z}, \quad \sin\Phi = \frac{y}{z},$$

so erhält man die in x, y und z homogenen Gleichungen

$$2Q'xy + R'xz - \xi z^2 = 0$$
$$Q'x^2 - Q'y^2 + R'yz - \eta z^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen x, y, z und setzt man zugleich für R' und Q' ihre Werthe in R, Q und Θ, so ergiebt sich als Gleichung der Hypocykloiden in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\begin{aligned}&16Q^2(\xi^2+\eta^2)\xi^2 + 4QR^2\cos^2\Theta(4\eta^2-9\xi^2)\eta\\&-8(2Q^2\sin^2\Theta + R^2\cos^2\Theta)(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)\xi^2\\&+(4Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)^2\eta^2 + 8\sin^2\Theta(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)^3\\&= 0.\end{aligned}$$

Setzt man hier an Stelle von $\cos^2\Theta$ und $\sin^2\Theta$ die Ausdrücke

$$\cos^2\Theta = \frac{\zeta - S}{T}, \quad \sin^2\Theta = \frac{S + T - \zeta}{T},$$

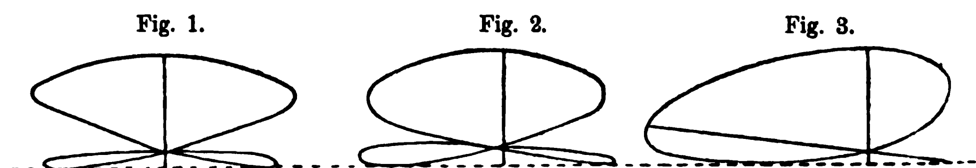
so erhält man die Gleichung der piëzoëlektrischen Fläche in rechtwinkligen Coordinaten, welche darnach von der vierten Ordnung ist.

Setzt man $\eta = 0$, so erhält man die Gleichung der Curve, in welcher die Fläche durch die xz-Ebene geschnitten wird:

$$16\,Q^2\xi^4 - 8\,(2\,Q^2\sin^2\Theta + R^2\cos^2\Theta)\,(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)\,\xi^2 + 8\sin^2\Theta\,(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)^3 = 0.$$

Die Schnittkurve ist symmetrisch gegen die z-Axe. Ihre Gestalt wird durch die beistehende Figur 1 anschaulich gemacht; gleichzeitig giebt Figur 2 die Schnittkurve in einer Meridianebene, deren Azimut $\varphi = \pi/12$ ist, Figur 3 die Schnittkurve in der Symmetrieebene mit $\varphi = \pi/6$. Man sieht, daß die in der letzteren Figur auftretende gerade Linie in der That aus dem Zusammenfallen zweier Curvenzweige entsteht.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.



Es bleibt endlich noch zu untersuchen, welche Curven der Endpunkt des elektrischen Momentes auf der piëzoëlektrischen Fläche beschreibt, wenn der Druck in einer und derselben Meridianebene alle möglichen Richtungen durchläuft. Eliminieren wir $\cos\Theta$ und $\sin\Theta$ aus je zweien der Gleichungen

$$\xi = R\cos\Phi\sin\Theta\cos\Theta + Q\sin 2\Phi\sin^2\Theta$$
$$\eta = R\sin\Phi\sin\Theta\cos\Theta + Q\cos 2\Phi\sin^2\Theta$$
$$\zeta = (S + T)\cos^2\Theta + S\sin^2\Theta,$$

so erhalten wir die Projektionen der gesuchten Curven auf die drei Coordinatenebenen.

Die Elimination aus den ersten beiden Gleichungen giebt:

$$(Q\sin 2\Phi\,\eta - Q\cos 2\Phi\,\xi)^2 + (R\cos\Phi\,\eta - R\sin\Phi\,\xi)\,(R\cos\Phi\,\eta - R\sin\Phi\,\xi - RQ\cos 3\Phi) = 0.$$

Die Projektion der Curve auf die xy-Ebene ist somit eine Ellipse, welche durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems hindurchgeht. Für $\Phi = \pi/6$ wird die Gleichung $\eta\cos\Phi - \xi\sin\Phi = 0$;

d. h. die Ellipse geht über in eine gerade Linie, welche der mit x-Axe den Winkel $\pi/6$ einschließt. Für $\Phi = 0$ ergiebt sich

$$\frac{\xi^2}{R^2/4} + \frac{(\eta - Q/2)^2}{Q^2/4} = 1.$$

Für $\Phi = \pi/2$: $\xi^2 = 0$, die Ellipse geht über in ein doppelt zu zählendes Stück der Axe η, ebenso wie in der ersten Symmetrieebene, für welche $\Phi = \pi/6$ ist.

Für die Projektionen der auf der piëzoëlektrischen Fläche verlaufenden Curven auf die beiden anderen Coordinatenebenen erhält man die Gleichungen:

$$\{Q \cos 2\Phi (S + T - \zeta) - T\eta\}^2 - R^2 \sin^2 \Phi (S + T - \zeta)(\zeta - S) = 0$$
$$\{Q \sin 2\Phi (S + T - \zeta) - T\xi\}^2 - R^2 \cos^2 \Phi (S + T - \zeta)(\zeta - S) = 0.$$

Multipliciert man dieselben beziehungsweise mit $\cos^2 \Phi$ und $\sin^2 \Phi$, so ergiebt sich durch Subtraktion:

$$(S + T - \zeta) Q (\cos 2\Phi \cos \Phi \mp \sin 2\Phi \sin \Phi) = T(\eta \cos \mp \xi \sin \Phi).$$

Die für konstante Werthe von Φ auf der piëzoëlektrischen Fläche sich ergebenden Curven sind somit ebene Curven; da aber ihre Projektion auf die xy-Ebene eine Ellipse ist, so müssen auch die auf der Fläche liegenden Curven selbst Ellipsen sein. Ob in der vorhergehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, ergiebt sich, wenn man den aus derselben folgenden Werth von $S + T - \zeta$ in der Gleichung

$$\{Q \cos 2\Phi (S + T - \zeta) - T\eta\}^2 - R^2 \sin^2 \Phi (S + T - \zeta)(\zeta - S) = 0$$

substituiert; die resultierende Gleichung muß identisch sein mit der zuvor für die Projektion auf die xy-Ebene gefundenen. Aus dieser Bedingung ergiebt sich, daß das negative Zeichen das richtige ist. Die Gleichung der Ebenen der Ellipsen wird somit

$$(S + T - \zeta) Q \cos 3\Phi = T(\eta \cos \Phi - \xi \sin \Phi).$$

Für $\Phi = 0$ wird dieselbe

$$(S + T - \zeta) Q = T\eta.$$

Wenn der Druck alle möglichen Richtungen in der xz-Ebene annimmt, so beschreibt der Endpunkt des piëzoëlektrischen Momentes eine zur yz-Ebene senkrecht stehende Ellipse.

Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten.

Von

David Hilbert aus Königsberg in Pr.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Es sei eine Grundform mit beliebig vielen Veränderlichen und Veränderlichenreihen vorgelegt. Wir betrachten die ganzen rationalen Invarianten dieser Grundform d. h. alle solchen ganzen rationalen homogenen Funktionen der Coefficienten C jener Form, welche sich nur um einen die Substitutionscoefficienten enthaltenden Faktor ändern, wenn man die Coefficienten C durch die entsprechenden Coefficienten C' der linear transformirten Grundform ersetzt. Diese Invarianten bilden ein System von ganzen rationalen homogenen Funktionen, denen folgende fundamentalen Eigenschaften zukommen:

1. Die Invarianten des Systems lassen die linearen Transformationen einer gewissen continuirlichen Gruppe zu.

2. Die Invarianten des Systems genügen gewissen partiellen linearen Differentialgleichungen.

3. Jede ganze rationale Funktion der Invarianten, welche in den Coefficienten C der Grundform homogen wird, ist wiederum eine Invariante: das System aller Invarianten bildet einen Integritätsbereich. Im Folgenden verstehen wir unter »Invariante« ohne weiteren Zusatz stets eine ganze rationale Invariante d. h. eine Invariante des eben definirten Integritätsbereiches.

4. Jede algebraische — sowie überhaupt jede analytische — Funktion von beliebig vielen Invarianten, welche einer ganzen rationalen homogenen Funktion der Coefficienten C gleich wird, ist wiederum eine Invariante.

5. Wenn das Produkt zweier ganzen rationalen Funktionen der Coefficienten C eine Invariante ist, so ist jeder der beiden Faktoren eine Invariante.

6. Es giebt eine endliche Anzahl von Invarianten, durch welche sich jede andere Invariante in ganzer rationaler Weise ausdrücken läßt; wir sagen kurz: der durch die Invarianten bestimmte Integritätsbereich besitzt eine endliche Basis.

Die Sätze 1 und 2 gestatten die Umkehrung. Satz 5 sagt aus, daß in dem durch die Invarianten bestimmten Integritätsbe-

reiche die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze gültig sind: Jede Invariante läßt sich auf eine und nur auf eine Weise als Produkt von nicht zerlegbaren Invarianten darstellen.

Es bietet sich die Aufgbabe, zu untersuchen, welche der aufgezählten Eigenschaften sich gegenseitig bedingen und welche getrennt von einander für ein Funktionensystem möglich sind. Ich hebe hier kurz hervor, daß es Systeme von unbegrenzt vielen ganzen rationalen homogenen Funktionen giebt, denen die Eigenschaft 3 zukommt, ohne daß der Satzt 6 gilt. Ein solches System ist beispielsweise das System aller derjenigen ganzen rationalen homogenen Funktionen von x und y, welche sich ganz und rational aus Funktionen der Reihe xy, x^2y^4, x^3y^9, x^4y^{16}, . . . zusammensetzen lassen. Denn angenommen, man könnte eine Funktion $x^k y^{k^2}$ durch die vorhergehenden Funktionem der Reihe ganz und rational ausdrücken und es wäre etwa $x^\alpha y^{\alpha^2} \cdot x^\beta y^{\beta^2} \ldots x^\lambda y^{\lambda^2}$ ein Glied dieses Ausdruckes, so müssten für die ganzen positiven Zahlen α, β, . . ., λ die beiden Gleichungen

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = \varkappa$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \cdots + \lambda^2 = \varkappa^2$$

erfüllt sein, was unmöglich ist.

Es giebt ferner Funktionensysteme, denen die Eigenschaften 2, 3, 4, 6 zukommen, ohne daß der Satz 5 für dieselben gilt. Als Beispiel diene das System aller ganzen rationalen homogenen Funktionen f von x, y, z, t, welche der Differentialgleichung

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} - t \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

genügen. Der durch diese Funktionen bestimmte Integritätsbereich besitzt die endliche Basis xy, xt, yz, zt. Wie man sieht sind x, y, z, t Faktoren von Funktionen des Systems, ohne selbst zum System zu gehören: die Funktionen xy, xt, yz, zt sind sämtlich in dem betrachteten Integritätsbereiche unzerlegbar und die Identität

$$xy \cdot zt = xt \cdot yz$$

zeigt, daß die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze in jenem Integritätsbereiche nicht gültig sind.

Der Satz 6 ist die Grundlage für die tiefer eindringenden Untersuchungen über Invariantensysteme. An diesen Satz schließen sich zunächst zwei weitere Sätze, welche unmittelbar aus mei-

nen allgemeinen Untersuchungen über die Theorie der algebraischen Formen [1]) folgen, nämlich der Satz von der Endlichkeit der irreduciblen Syzygien und der Satz von der Syzygienkette, welche im Endlichen abbricht. Ich werde in der vorliegenden Note zeigen, daß diesen Endlichkeitstheoremen keineswegs lediglich eine principielle Bedeutung zukommt, sondern daß mit ihrer Hülfe die genaue Erledigung einer Reihe besonderer Fragen über die Aufstellung und Struktur voller Invariantensysteme möglich ist. Zugleich werden wir Methoden gewinnen zur Behandlung der bekannten Aufgabe, Formen zu bestimmen, deren Invarianten gegebene Werte besitzen.

Der Kürze und Anschaulichkeit wegen entwickle ich die folgenden Sätze nur für den Fall einer einzigen binären Grundform f von der n^{ten} Ordnung, obwohl die Methoden und Resultate ganz allgemein gültig sind. Die endliche Basis des Invariantensystems bestehe aus den Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ und diese seien beziehungsweise von den Graden $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ in den Coefficienten der Grundform. Wir bezeichnen das Produkt dieser Grade $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ mit π und bilden die Invarianten

$$i'_1 = i_1^{\frac{\pi}{\nu_1}}, \quad i'_2 = i_2^{\frac{\pi}{\nu_2}}, \ldots, \quad i'_m = i_m^{\frac{\pi}{\nu_m}},$$

welche sämmtlich vom nämlichen Grade π in den Coefficienten der Grundform sind. Ist m größer als $n-2$, so besteht zwischen den m Invarianten $i'_1, i'_2, \ldots, i'_m$ jedenfalls eine Relation von der Gestalt

$$F(i'_1, i'_2, \ldots, i'_m) = 0,$$

wo F eine ganze rationale homogene Funktion der Invarianten $i'_1, i'_2, \ldots, i'_m$ bedeutet. Wir führen nun eine lineare Transformation dieser m Invarianten aus, indem wir setzen

$$\begin{aligned} i''_1 &= \alpha_{11} i'_1 + \alpha_{12} i'_2 + \cdots + \alpha_{1m} i'_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i''_m &= \alpha_{m1} i'_1 + \alpha_{m2} i'_2 + \cdots + \alpha_{mm} i'_m, \end{aligned}$$

wo für die Coeffiicienten $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mm}$ solche Zahlenwerte gewählt sein mögen, daß in der linear transformirten Funktion $G(i''_1, i''_2, \ldots, i''_m)$ der Coefficient der höchsten Potenz von i''_m gleich Eins wird. Hieraus geht hervor, daß alle Invarianten der Grundform g a n z e algebraische Funktionen der $m-1$ Invarianten $i''_1, i''_2, \ldots, i''_{m-1}$

1) Mathematische Annalen Bd. 36. S. 534.

sind. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangen wir zu dem Satze:

Es giebt $n-2$ Invarianten $I_1, I_2, \ldots I_{n-2}$ derart, daß eine jede andere Invariante sich als ganze algebraische Funktion derselben ausdrückt.

Hieraus folgt unmittelbar die weitere Thatsache:

Wenn man den Coefficienten der Grundform solche besonderen Werte erteilt, daß jene $n-2$ Invarianten gleich Null werden, so verschwinden auch zugleich sämmtliche übrigen Invarianten der Grundform.

Im allgemeineren Falle einer Grundform mit beliebig vielen Veränderlichenreihen tritt an Stelle der Zahl $n-2$ die Zahl σ der algebraisch unabhängigen Invarianten der Grundform.

Es ist nun von größter Bedeutung für die ganze hier zu entwickelnde Theorie, daß die in dem letzten Satze ausgesprochene Eigenschaft allemal nothwendig die im voranstehenden Satze ausgesprochene Eigenschaft bedingt. Um den Nachweis hiervon zu führen, entwickeln wir zunächst ein Theorem, welches sich als drittes allgemeines Theorem aus der Theorie der algebraischen Funktionen den beiden in Abschnitt I und III meiner vorhin citirten Arbeit zugesellt. Dieses Theorem lautet:

Es seien $F, F', F'', \ldots$ ganze rationale homogene Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von der Beschaffenheit, daß sie für alle diejenigen Wertsysteme dieser Veränderlichen verschwinden, für welche gewisse m vorgelegte ganze rationale homogene Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ der nämlichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleich Null sind: dann ist es stets möglich eine ganze Zahl r zu bestimmen derart, daß jedes Produkt P von r beliebigen Funktionen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ dargestellt werden kann in der Gestalt

$$P = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ geeignet gewählte ganze rationale homogene Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind.

Der Beweis dieses Satzes ist mir durch den Schluß von n auf $n+1$ Veränderliche gelungen. Im besonderen ist nach diesem Satze die r^{te} Potenz irgend einer von jenen Formen $F, F', F'', \ldots$ in der angegebenen Gestalt darstellbar, eine Thatsache, welche für

den speciellen Fall zweier nicht homogenen Veränderlichen bereits von E. Netto[1]) ausgesprochen und bewiesen worden ist.

Es seien nun μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ der Grundform vorgelegt von der Beschaffenheit, daß allemal, wenn man den Coefficienten der Grundform solche besonderen Werte erteilt, welche diese μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ zu Null machen, nothwendig sämmtliche Invarianten der Grundform verschwinden. Es giebt dann dem vorigen allgemeinen Theoreme zufolge eine Zahl r derart, daß jedes Produkt P von irgend r oder mehr Invarianten der Grundform in der Gestalt

$$P = a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_\mu I_\mu$$

darstellbar ist, wo $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ ganze rationale Funktionen der Coefficienten der Grundform sind. Nunmehr denken wir uns die endliche Basis $i_1, i_2, \ldots, i_m$ der Invarianten des Systems ermittelt und es sei ν die größte von den Gradzahlen dieser Invarianten: dann stellt sich offenbar eine jede Invariante i, deren Grad $\geqq \nu r$ ist, als Summe von Produkten P dar und es gilt daher die Formel

$$i = b_1 I_1 + b_2 I_2 + \cdots + b_\mu I_\mu,$$

wo $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ wiederum ganze rationale Funktionen der Coefficienten der Grundform sind. Nach den Entwickelungen des letzten Abschnittes meiner oben citirten Abhandlung[2]) kann man in der letzten Formel die Ausdrücke $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ stets durch Invarianten $i'_1, i'_2, \ldots, i'_\mu$ ersetzen, so daß wir die Gleichung

$$i = i'_1 I_1 + i'_2 I_2 + \ldots + i'_\mu I_\mu$$

behalten. Die Invarianten $i'_1, i'_2, \ldots, i'_\mu$ sind sämmtlich von niederem Grade in den Coefficienten der Grundform als die Invariante i; sie können ihrerseits wiederum in der nämlichen Weise durch lineare Combination der Invarianten $I_1, I_2, \ldots I_\mu$ erhalten werden und dieses Verfahren läßt sich so lange fortsetzen, bis wir zu Invarianten gelangen, deren Grad $< \nu r$ ist. Wir denken uns sämmtliche linear unabhängige Invarianten, deren Grad $< \nu r$ ist, aufgestellt und bezeichnen dieselben mit $k_1, k_2, \cdots, k_w$. Für eine beliebige Invariante i der Grunform besteht dann ein System von w Gleichungen der folgenden Gestalt

1) Vgl. Acta mathematica Bd. 7, S. 101.

2) Vgl. Mathematische Annalen Bd. 36, S. 527.

$$
\begin{aligned}
ik_1 &= G_1^{(1)}k_1 + G_2^{(1)}k_2 + \cdots + G_w^{(1)}k_w, \\
ik_2 &= G_1^{(2)}k_1 + G_2^{(2)}k_2 + \cdots + G_w^{(2)}k_w, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
ik_w &= G_1^{(w)}k_1 + G_2^{(w)}k_2 + \cdots + G_w^{(w)}k_w,
\end{aligned}
$$

wo $G_1^{(1)}, \ldots, G_w^{(w)}$ ganze rationale Funktionen der Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ bedeuten. Durch Elimination von $k_1, k_2, \ldots k_w$ folgt die Gleichung

$$
\begin{vmatrix}
G_1^{(1)}-i & G_2^{(1)} & \ldots & G_w^{(1)} \\
G_1^{(2)} & G_2^{(2)}-i & \ldots & G_w^{(2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
G_1^{(w)} & G_2^{(w)} & \ldots & G_w^{(w)}-i
\end{vmatrix} = 0,
$$

welche zeigt, daß i eine ganze algebraische Funktion von $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ ist. Wir gelangen somit zu folgendem Satze, welcher den Kern der zu entwickelnden Theorie der algebraischen Invarianten enthält:

Wenn irgend μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ die Eigenschaft besitzen, daß das Verschwinden derselben stets nothwendig das Verschwinden aller Invarianten der Grundform zur Folge hat, so sind alle Invarianten ganze algebraische Funktionen jener μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$.

Der Satz findet in allen besonderen bisher berechneten Fällen die schönste Bestätigung, wie folgende Beispiele zeigen.

Für die binäre Form 5ter Ordnung erfüllen die 3 Invarianten A, B, C von den Graden beziehentlich 4, 8, 12 die Bedingungen des Satzes. Denn das gleichzeitige Verschwinden derselben bedingt notwendig das Auftreten eines dreifachen Linearfaktors in f und dieser Umstand wiederum hat, wie man leicht einsieht, zur Folge, daß alle Invarianten der binären Form gleich Null sind. Nach unserem Satze müssen daher alle Invarianten ganze algebraische Funktionen von A, B, C sein und in der That enthält das volle System nur noch eine weitere Invariante nämlich die schiefe Invariante R, deren Quadrat bekanntlich eine ganze rationale Funktion von A, B, C ist.

Die binäre Form 6ter Ordnung besitzt, wie leicht einzusehen ist, 4 Invarianten A, B, C, D von den Graden beziehentlich 2, 4, 6, 10, deren gleichzeitiges Verschwinden nothwendig das Auftreten eines vierfachen Linearfaktors bedingt. Dieser Umstand hat zur Folge, daß alle Invarianten der Form gleich null sind: in der

That ist entsprechend unserem Satze die noch übrige schiefe Invariante R der Grundform eine **g a n z e** algebraische Funktion von A, B, C, D, nämlich gleieh der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion dieser 4 Invarianten.

Um die simultanen Invarianten zweier binären cubischen Formen f, g aufzustellen, bilden wir eine lineare Combination $\varkappa f + \lambda g$ derselben und entwickeln die Diskriminante von dieser Form nach den unbestimmten Parametern $\varkappa$ und λ, wie folgt:

$$D(\varkappa f + \lambda g) = D_0 \varkappa^4 + D_1 \varkappa^3 \lambda + D_2 \varkappa^2 \lambda^2 + D_3 \varkappa \lambda^3 + D_4 \lambda^4.$$

Die 5 Invarianten D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sind offenbar nur dann sämmtlich gleich null, wenn die cubischen Formen f und g beide den nämlichen Linearfaktor zweifach enthalten und dieser Umstand wiederum hat zur Folge, daß auch alle übrigen Simultaninvarianten null sind. Unserem Satze zufolge müssen daher alle simultanen Invarianten der beiden cubischen Formen f und g ganze algebraische Funktionen von D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sein. Das volle Invariantensystem enthält nun außer diesen 5 Invarianten nur noch 2 weitere Invarianten nämlich die Ueberschiebung $(f, g)_3$ und die Resultante R der beiden Formen: man findet in der That, daß diese beiden Invarianten ganze algebraische Funktionen jener 5 Invarianten sind.

Um die entsprechende Untersuchung für zwei binäre biquadratische Formen f und g durchzuführen, setzen wir

$$i(\varkappa f + \lambda g) = i_0 \varkappa^2 + i_1 \varkappa \lambda + i_2 \lambda^2,$$
$$j(\varkappa f + \lambda g) = j_0 \varkappa^3 + j_1 \varkappa^2 \lambda + j_2 \varkappa \lambda^2 + j_3 \lambda^3.$$

Es folgt dann aus entsprechenden Gründen wie vorhin, daß jede Simultaninvariante der beiden Formen f und g eine ganze alge- Funktion der 7 Invarianten i_0, i_1, i_2, j_0, j_1, j_2, j_3 ist.

Wir betrachten ferner zwei ternäre cubische Formen f und g; wir combinieren dieselben linear und bilden die beiden Invarianten

$$S(\varkappa f + \lambda g) = S_0 \varkappa^4 + \ldots + S_4 \lambda^4,$$
$$T(\varkappa f + \lambda g) = T_0 \varkappa^6 + \ldots + T_6 \lambda^6.$$

Aus unserem Satze folgt dann, daß alle simultanen Invarianten der beiden Formen f und g ganze algebraische Funktionen der 12 Invarianten $S_0, \ldots, S_4$, $T_0, \ldots, T_6$ sind und hieraus schließt man zugleich, daß dieselben von einander algebraisch unabhängig sind.

Betrachten wir eine binäre Form f von der 5ten Ordnung und eine lineare Form l, so ergiebt sich, daß alle simultanen Invarianten dieser beiden Formen ganze algebraische Funktionen von A, B, C,

$(f, l^6)_5$, $(h, l^6)_6$, $(i, l^4)_2$ sind, wo $h = (f, f)_2$ und $i = (f, f)_4$ gesetzt ist; es drücken sich also alle 23 Formen des vollen Invariantensystems einer binären Grundform als ganze algebraische Funktionen von sechs derselben aus.

Wir behandlen endlich noch ein allgemeineres Beispiel, nämlich das System von ν binären linearen Formen

$$l_1 = a_1 x + b_1 y, \quad l_2 = a_2 x + b_2 y, \; . \; . \; ., \quad l_\nu = a_\nu x + b_\nu y.$$

Das volle Invariantensystem besteht aus den Determinanten

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \, (i, k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Wir bilden die beiden binären Formen $\nu-1$ter Ordnung

$$\varphi = a_1 \xi^{\nu-1} + a_2 \xi^{\nu-2} \eta + \cdots + a_\nu \eta^{\nu-1},$$
$$\psi = b_1 \xi^{\nu-1} + b_2 \xi^{\nu-2} \eta + \cdots + b_\nu \eta^{\nu-1}$$

und berechnen die Funktionaldeterminante derselben

$$(\varphi, \psi)_1 = P_0 \xi^{2\nu-4} + P_1 \xi^{2\nu-5} \eta + \cdots + P_{2\nu-4} \eta^{2\nu-4}$$

Die Coefficienten $P_0, P_1, \ldots, P_{2\nu-4}$ sind als lineare Combinationen der Determinanten p_{ik} selber Invarianten der linearen Grundformen, und man erkennt leicht, daß, wenn diese Invarianten $P_0, P_1, \ldots, P_{2\nu-4}$ sämmtlich Null sind, nothwendig entweder alle Coefficienten der Form φ oder diejenigen von ψ verschwinden oder beide Formen bis auf einen numerischen Faktor mit einander übereinstimmen. In allen diesen Fällen sind sämmtliche Determinanten p_{ik} gleich null und hieraus folgt mit Hülfe unseres Satzes, daß die Determinanten p_{ik} ganze algebraische Funktionen von $P_0, P_1, \ldots P_{2\nu-4}$ sind[1]), woraus zugleich die Unabhängigkeit der letzteren $2\nu-3$ Invarianten geschlossen werden kann.

Bei dem Beweise unseres allgemeinen Satzes wurde die Eigenschaft 6 der Invarianten wesentlich benutzt; aber es folgt auch umgekehrt aus diesem Satze die Endlichkeit des vollen Invariantensystems. Wenn nämlich $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ ein System von Invarianten ist, durch welche alle anderen Invarianten als ganze algebraische Funktionen dargestellt werden können, so kann man einen von L. Kronecker[2]) gegebenen fundamentalen Satz der Theorie der

1) Das nämliche Resultat habe ich auf einem völlig anderen Wege erhalten in meiner Arbeit: Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante; Mathematische Annalen Bd. 33. S. 233.

2) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen § 6.

algebraischen Funktionen anwenden und findet so in dem durch alle Invarianten bestimmten Rationalitätsbereiche eine endliche Zahl $i_1, i_2, \ldots, i_\varkappa$ von ganzen algebraischen Funktionen der Größen $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ von der Art, daß jede andere ganze algebraische Funktion I des betrachteten Rationalitätsbereiches in der Gestalt

$$I = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\varkappa i_\varkappa$$

dargestellt werden kann, wo $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ ganze rationale Funktionen von $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ sind. Nun sind $i_1, i_2, \ldots i_\varkappa$ ganze rationale Invarianten; denn es kann leicht gezeigt werden, daß jede rationale Invariante, welche eine ganze algebraische Funktion der ganzen rationalen Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ ist, nothwendig selber eine ganze rationale Invariante ist. Die Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$, $i_1, i_2, \ldots, i_\varkappa$ bilden folglich eine endliche Basis des Systems aller Invarianten der Grundform. Nach Kenntniß eines Systems von Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$, durch welche sich alle Invarianten als ganze algebraische Funktionen ausdrücken lassen, erfordert also die Aufstellung des vollen Invariantensystems nur noch die Lösung einer elementaren Aufgabe aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. Bei der wirklichen Ausführung der Rechnung kommt es vor allem auf die Berechnung der Diskriminante einer den Rationalitätsbereich bestimmenden Gleichung an, da bei der Darstellung der Funktionen des Fundamentalsystems diese Diskriminante allein im Nenner auftreten kann.

Um beispielsweise zu dem bekannten vollen Formensysteme einer binären Form 5ter Ordnung zu gelangen, hat man ein Fundamentalsystem im Systeme aller derjenigen Funktionen zu bestimmen, welche ganze algebraische Funktionen der oben angegebenen invarianten Bildungen, A, B, C, f, $h = (f, f)_2$, $i = (f, f)_4$ und zugleich rationale Funktionen vou f, h, $(f, h)_1$, i, $(f, h)_2$ sind.

Nach den obigen Entwickelungen ist es für das Studium der Invarianten einer Grundform von größter Wichtigkeit, dasjenige algebraische Gebilde Z zu kennen, welches durch Nullsetzen aller Invarianten bestimmt ist. Bedeutet σ die Anzahl der algebraisch unabhängigen Invarianten, so giebt es, wie oben gezeigt worden ist, stets σ Invarianten, durch deren Nullsetzen das Gebilde Z bereits völlig bestimmt ist; aus unserem allgemeinen Satze kann zugleich geschlossen werden, daß es nicht möglich ist, eine kleinere Zahl von Invarianten anzugeben, durch deren Nullsetzen das Gebilde Z ebenfalls schon bestimmt wird. Für den Fall einer bi-

nären Grundform läßt sich das Nullgebilde Z allgemein angeben, wie der folgende Satz zeigt:

Wenn alle Invarianten einer binären Grundform von der Ordnung $n = 2\nu$ beziehungsweise $n = 2\nu+1$ gleich null sind, so besitzt die Grundform einen $\nu+1$-fachen Linearfaktor und umgekehrt, wenn dieselbe einen $\nu+1$-fachen Linearfaktor besitzt, so sind sämmtliche Invarianten gleich null.

Auf entsprechende Untersuchungen für Formen mit mehr Veränderlichen gehe ich hier nicht ein.

Die Fruchtbarkeit der im Obigen dargelegten Principien bewährt sich insbesondere, wenn man dieselben mit denjenigen auf allgemeine Moduln bezüglichen Methoden in Verbindung bringt, welche ich in Abschnitt III und IV meiner Abhandlung »Ueber die Theorie der algebraischen Formen« entwickelt habe. Um das einzuschlagende Verfahren an einem Beispiele kurz zu kennzeichnen, stellen wir uns die Aufgabe, die »charakteristische Funktion« desjenigen algebraischen Gebildes zu bestimmen, welches man erhält, wenn man

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \, (i, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

setzt und hierin die Größen p_{ik}, als die Veränderlichen und die Größen a_i, b_i als willkürliche Parameter auffaßt. Man sieht leicht ein, daß die charakteristische Funktion dieses Gebildes gleich ist der Anzahl der linear unabhängigen Invarianten vom Grade $2R$ in den Coefficienten der ν binären linearen Formen:

$$a_1 x + b_1 y, \qquad a_2 x + b_2 y, \ldots, \qquad a_\nu x + b_\nu y,$$

und diese Anzahl stellt sich nach dem Cayley-Sylvester'schen Abzählungssatze[1]) als Differenz zwischen Anzahlen von Lösungen gewisser linearer diophantischer Gleichung dar. Nach einer einfachen Rechnung erhalten wir für die gesuchte charakteristische Funktion den Wert

$$\chi(R) = \frac{1}{(\nu-1)!(\nu-2)!}(R+1)(R+2)^2 R+3)^2 \ldots (R+\nu-2)^2(R+\nu-1).$$

Die Funktion ist, wie man sieht, vom $2\nu-4$ten Grade in R: jenes algebraische Gebilde ist mithin von der Dimension $d = 2\nu-4$.

---

1) Vgl. Cayley, Philosophical Transactions. London 1856, S. 107 und Sylvester, Crelle's Journal Bd. 85, S. 89.

Der Coefficient der $d$ten Potenz von R ist $\frac{1}{(\nu-1)!\,(\nu-2)!}$; derselbe giebt mit $d!$ multipliciert die Ordnung jenes algebraischen Gebildes an[1]). Diese beiden Resultate bestätigen die bekannten Thatsachen[2]), daß es zu jeder gegebenen binären Form gerader Ordnung $2\nu-4$ Büschel von binären Formen giebt, deren Funktionaldeterminante jener gegebenen Form gleich sind und daß die Anzahl dieser Formenbüschel gleich $\frac{(2\nu-4)!}{(\nu-1)!(\nu-2)!}$ wird.

1) Vgl. meine Abhandlung: »Ueber die Theorie der algebraischen Formen«. Mathematische Annalen Bd. 36, S. 520.

2) Vgl. meine Arbeit: »Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante«, Mathematische Annalen Bd. 33, S. 227, sowie die dort ausführlich citirte Litteratur.

Königsberg i. Pr. den 30. Juni 1891.

Lehrer und Schüler bei Iunilius Africanus.

Von

Alfred Rahlfs.

Vorgelegt von Paul de Lagarde.

Die Instituta regularia divinae legis des Iunilius Africanus, deren kritische Ausgabe wir H. Kihn[1]) verdanken, sind in Form eines Gespräches zwischen Lehrer und Schülern abgefaßt. Das Gespräch verläuft in Fragen und Antworten; jenen hat Iunilius jedesmal ein *Δ*, diesen ein *M* vorgesetzt. Den Grund, welcher ihn veranlaßt hat, diese griechischen Buchstaben zu wählen, während er doch sonst sein Buch in lateinischer Sprache schreibt, gibt er selbst in der dem Buche vorausgeschickten Widmung an Primasius an. Die Worte lauten bei Kihn 468_{17}—469_{2}

> Et ne aliqua confusio per antiquariorum, ut adsolet, neglegentiam proveniret, magistro *M* graecam litteram, discipulis *Δ* praeposui, ut ex peregrinis characteribus et quibus latina scriptura non utitur, error omnis penitus auferatur.

Wir sehen: Iunilius mistraut den Abschreibern gründlich, und er hat Recht mit seinem Mistrauen. Denn trotz seiner Vorsicht ha-

1) Theodor von Mopsuestia und Junilius Africanus, Freiburg i. B. 1880, S. 465—528.

ben sie ihm eine confusio in sein Buch gebracht, welche sich überall sehen lassen kann.

Es liegt auf der Hand, daß Iunilius, wenn er die griechischen Buchstaben *Δ* und *M* zur Bezeichnung von Lehrer und Schülern gebraucht, damit die griechischen Wörter *διδάσκαλος* und *μαθηταί* meint. Und bei dieser Deutung von *Δ* und *M* ist auch alles im Reinen. Denn da es zur Zeit des Iunilius, ebenso wie noch heut zu Tage, so hergegangen sein wird, daß der Lehrer fragte und die Schüler antworteten, so ist es ganz richtig, wenn die Fragen dem *Δ* = *διδάσκαλος*, die Antworten den *M* = *μαθηταί* zugewiesen werden.

Nun fangen aber unglücklicher Weise die Wörter für *Lehrer* und *Schüler* im Lateinischen mit denselben Buchstaben an, wie im Griechischen, und zwar umgekehrt mit denselben Buchstaben: der Lehrer, der im Griechischen *διδάσκαλος* heißt, heißt im Lateinischen *magister*, der Schüler, der sich dort *μαθητής* nennt, nennt sich hier *discipulus*. Dies hat die trefflichen antiquarii bewogen, *M* als magister, *Δ* als discipuli zu deuten und in der angeführten Stelle

> magistro *M* graecam litteram, discipulis *Δ* praeposui

zu schreiben, während es natürlich heißen muß

> magistro *Δ* graecam litteram, discipulis *M* praeposui.

Nur Eine Handschrift, Kihns D, hat das Richtige erhalten.

Wie aber überhaupt ein Unglück selten allein kommt, so ist es auch hier gegangen. Die erste Verwirrung hat eine zweite nach sich gezogen.

Iunilius spricht sich in den der oben ausgeschriebenen Stelle unmittelbar vorangehenden Worten über die Anlage seines Werkes aus. Er sagt, er habe demselben »ipsius dictionis, quantum potui, utilem formam« gegeben,

> ut velut magistro interrogante et respondentibus discipulis breviter singula et perlucide dicerentur.

Diese Worte, welche so nur in NF erhalten sind, geben die Anlage des Buches durchaus richtig und klar an. Aber sobald man *Δ* als discipuli, *M* als magister versteht, widersprechen sie dem Thatbestande, denn *Δ* fragt und *M* antwortet. Dieser Widerspruch hat den Schreiber von F nicht angefochten. Die übrigen haben ihn zu beseitigen gesucht. Zu diesem Zwecke haben sie zweierlei Wege eingeschlagen.

Das Gros der Handschriften, AGMD[1])LPR, dreht die Sache

1) Es ist sehr auffällig, daß D, welcher in der zuerst besprochenen Stelle allein das Richtige bewahrt hatte, hier (nach Kihn) das Falsche hat, da diese

einfach um und schreibt

ut velut discipulis interrogantibus et magistro respondente etc.

Doch hat A

discipulo interrogante

im Singular und verrät dadurch noch, daß dort ursprünglich magistro interrogante gestanden hat.

Dem Schreiber von N dagegen ist es zu dumm gewesen, die Schüler fragen und den Lehrer antworten zu lassen. Daher hat er eine Radikalkur gebraucht und die *Δ* und *M* im ganzen Buche vertauscht (Kihn 471 6[1]).

Alle älteren Ausgaben, welche ich verglichen habe, die editio princeps Basel 1545, und die Abdrücke bei de la Bigne[2] I Paris 1589, Gallandi XII Venedig 1778 und Migne LXVIII (vgl. Kihn 299—302), haben die falschen Lesarten, weil sie diese in ihrer Vorlage fanden. De la Bigne, Gallandi und Migne sind auf dem von den antiquarii eingeschlagenen Wege noch weiter gegangen: sie haben die — jetzt allerdings sinnlos gewordenen — griechischen Buchstaben durch lateinische ersetzt. Kihn fand das Ursprüngliche in einigen Handschriften vor, wurde aber jedenfalls durch die Menge und das Alter (vgl. unten) der dagegen stehenden Zeugen gehindert, es als ursprünglich zu erkennen und in den Text einzusetzen.

Man darf Kihn hieraus keinen Vorwurf machen, sondern muß ihm dankbar sein, daß er durch seine vollständige Mitteilung des textkritischen Materials auch diejenigen, welche die Handschriften nicht einsehen können, in den Stand gesetzt hat, seinen Text zu controllieren und eventuell zu berichtigen. Es versteht sich von selbst, daß der, welcher einen so verderbten Text, wie den des Iunilius, zum ersten Male kritisch herausgibt, nicht überall gleich das Richtige trifft. Trotzdem muß es auffällig erscheinen, daß Kihn hier an dem Richtigen so achtlos vorübergegangen ist, da er den alten Text nicht gedankenlos übernommen, sondern sich über die in demselben angegebene, sonderbare Anlage des Werkes Rechenschaft zu geben versucht hat. Er sagt 222:

> Die Fragen der Schüler, welche sich unterrichten lassen, dienen lediglich zur Vermittlung der Uebergänge in dem Vortrage des Lehrers, der ihnen Belehrung ertheilt

und zieht am Rande als Parallele die »24 Collationes patrum« Cassians herbei,

---

zweite confusio erst eine Folge jener ersten ist. Falls Kihns Angabe nicht auf einem Irrtum beruht, muß Ds Text ein Mischtext sein.

wo die Freunde nach kurzen Zwischenreden vom fragenden oder befragten ‚Vater' unterrichtet werden.

Aber mit dieser Erklärung ist Kihn ganz unglücklich gefahren. Die Fragen bei Iunilius sind keineswegs, wie die bei Cassian, gleichgültige Uebergangsformeln, vielmehr bilden sie das Gerippe des ganzen Werkes; nähme man sie fort, so würde das Uebrigbleibende in unzusammenhangende Stücke zerfallen. In den Fragen liegt die Disposition des Buches; nur derjenige kann sie stellen, welcher den ganzen Stoff beherrscht und das Gespräch völlig zielbewußt leitet, also nur der Lehrer, nicht die Schüler. Und dann die Form der Fragen! Man braucht nur einige derselben zu lesen, etwa im 4. Kapitel des 1. Buches

Quid est prophetia?
Da in praeteritis prophetiam!
Da in praesentibus!
Da in futuris!
Quare in definitione positum est ‚latentium'?
Proba hoc divinae scripturae testimonio!
Quare addidimus ‚ex divina inspiratione'?,

um zu sehen, daß so nicht der Schüler, sondern nur der Lehrer fragen kann. Das Buch des Iunilius ist ein »Katechismus«, dessen Antworten die Schüler auswendig zu lernen und dem Lehrer auf seine Fragen herzusagen haben. Das »Gespräch« zwischen Lehrer und Schülern hat nicht, wie ein platonischer Dialog, den Zweck, durch gemeinsames Forschen neue Wahrheiten zu entdecken, sondern den, die festgestellten Regeln den Schülern einzupauken, — lateinisch gesagt — *regulis discipulorum animos imbuere* (Iunilius' Widmung Kihn 468 $_{6/8}$). Die entgegengesetzte Vorstellung, daß die Schüler — NB. im Plural — den Lehrer katechesieren, und er als geduldiges Opferlamm alle ihre unverschämten Fragen beantwortet, widerlegt sich selbst. Eine solche Vorstellung kann man nur so lange für möglich halten, als man sich ein lebendiges Bild von dem Hergange in praxi zu machen versäumt.

Ich schließe mit einer Nutzanwendung für die Textkritik insgemein.

Der vorliegende Fall beweist, daß Eine Handschrift allen anderen gegenüber Recht haben kann.

Er beweist ferner, daß selbst bei Stellen, die in so engem Zusammenhange stehn, wie die besprochenen, doch verschiedene Handschriften das Richtige bewahrt haben können, sodaß ein eklektisches Verfahren zur Herstellung des ursprünglichen Textes erforderlich ist.

Er beweist endlich, daß man in dem hohen Alter einer Handschrift keine Garantie für die Richtigkeit der von ihr gebotenen Lesarten sehen und bei der Reconstruction eines Textes sein Urteil nicht durch das Alter oder die Jugend der Handschriften bestimmen lassen darf. Kihns älteste Handschrift, G, welche nach ihm aus der zweiten Hälfte des 6. Jahrhunderts, also aus der Zeit kurz nach Abfassung des im Jahre 551 geschriebenen Buches (vgl. Kihn 275—289) stammt, hat an beiden Stellen das Falsche. Der Codex D, welcher an der ersten Stelle den ursprünglichen Text bewahrt hat, gehört dem 9. Jahrhundert an; die Codices NF, welche ihn an der anderen Stelle bewahrt haben, zählen, da N im 10. oder im Anfange des 11., F im 11. Jahrhundert geschrieben ist, sogar zu den jüngsten Handschriften: nur noch Eine Handschrift (R) stammt aus dem 11. Jahrhundert, alle übrigen sind älter.

Dies sind keine neuen Sätze, sondern neue Beweise für alte Sätze. Ich führe sie an, weil sie die Richtigkeit der alten Sätze so schlagend und unwiderleglich darthun.

Wenn man will, kann man aus dem ersten Satze weiter auf das Recht der Emendation, vulgo Conjectur, schließen: wäre D verloren, so müßten wir ohne Zeugen emendieren. Ich darf wohl erwähnen, daß ich wirklich in vorliegendem Falle die Emendation gemacht habe, ehe ich die Bestätigung ihrer Richtigkeit in Kihns Apparate fand; was ja in diesem Falle nicht schwer war.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

11. November. **№ 8.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. August.

Riecke kündigt eine Arbeit von sich und **Voigt** an: „Bestimmung der elektrischen Constanten des Turmalins und Quarzes“.

Voigt kündigt eine Abhandlung an: „Bestimmung der Constanten der innern Reibung für einige Krystalle“.

Kielhorn kündigt „Tafeln aus indischen Inschriften und Handschriften“ an.

Die piëzoëlectrischen Constanten des Quarzes und Turmalins.

Von

E. Riecke und **W. Voigt.**

1. Allgemeine Angaben über die Methode der Beobachtung.

Die untersuchten Crystallstücke besaßen die Form rechtwinkliger Prismen, deren Kanten gegen die Hauptaxen der Crystalle in bestimmter Weise orientirt waren. Die Anordnung des Apparates, welcher zur Belastung der Prismen diente, war eine etwas verschiedene, je nachdem die elektrische Erregung auf den gepreßten Flächen selbst beobachtet werden sollte oder auf den Seitenflächen. Im ersteren Falle war die Einrichtung folgende. Ein parallelepipedisches Messingstück M von $13\frac{1}{2}$ cm Länge, 3 cm Breite, $1\frac{1}{2}$ cm Höhe war auf einem großen mit Gewichten beschwerten Holzklotze so befestigt, daß es über den Rand des Klotzes um 3 cm

vorstand. Die Crystalle wurden von einer Klemme gefaßt, deren Backen aus federnden Streifen von hartem Kupferblech bestanden und durch ein Hartgummistück von einander isolirt waren. An den Enden der Backen waren nach innen zu Blei- oder Kupferplatten angelöthet, deren Distanz so regulirt war, daß die Crystalle zwischen ihnen mit mäßigem Drucke festgehalten wurden. Auf der oberen Backe war nach außen ein kleines Stahlstück befestigt, dachförmig abgeschrägt, so daß sich in seiner Mitte eine scharfe Kante von etwa 0,3 cm Länge bildete, parallel zu der Längsrichtung der Klemme. Die Crystalle wurden so in die Klemme gebracht, daß jene Kante genau über der Mitte der gepreßten Crystallflächen lag. Die Klemme mit dem von ihr gehaltenen Crystall wurde auf das Messingstück M gestellt, so daß der Crystall auf dem überragenden Theile desselben sich befand und daß die Kante des Stahlklötzchens der Längsrichtung von M parallel war. Nun wurde ein aus einem rechteckigen Rahmen bestehender Bügel über die Klemme gehängt, dessen oberes horizontales Stück eine nach innen gekehrte scharfe Schneide besaß. Mit dieser wurde der Bügel über die an dem Stahlklötzchen befindliche Schneide gehängt, so daß der Berührungspunkt der beiden Schneiden genau über der Mitte der gepreßten Crystallflächen sich befand. An seinem unteren Ende trug der Bügel einen starken Draht, an welchen die zur Aufnahme der Gewichtsstücke dienende Wagschale angehängt wurde. Zufolge der geschilderten Einrichtung stand die untere Klemme in metallischer Berührung mit dem als Unterlage dienenden Messingstücke; sie wurde ein für allemal mit der Gasleitung verbunden. Der Holzblock, auf welchem die Vorrichtung ruhte, war mit Stanniolstreifen überzogen und gleichfalls abgeleitet. Die obere Feder und damit auch die obere Endfläche des Crystalls wurde mit dem einen Quadrantenpaar eines von Stöhrer konstruirten Thomson'schen Elektrometers verbunden; das andere Quadrantenpaar war abgeleitet, die Nadel mit Hülfe einer trockenen Säule geladen. Die ganze Einrichtung befand sich auf einem festen Tische in einem Glaskasten, welcher auf seiner inneren Seite mit Gittern von Messingdraht ausgekleidet war. Die Oberfläche des Tisches war gleichfalls mit Stanniol überzogen und abgeleitet; der die Wagschale tragende Draht gieng durch eine Auskehlung des Tischrandes nach unten. Durch einen federnden Contakt konnte der die obere Crystallfläche mit dem Elektrometer verbindende Draht abgeleitet werden. Die Bewegung des Contaktes erfolgte mit Hülfe einer Schnur, welche durch eine Durchbohrung der Decke in das Innere hineingeführt war.

Sollte die elektrische Ladung auf den Seitenflächen der Crystalle beobachtet werden, so wurden die Klemmen entfernt. Auf das Messingstück *M* wurde eine Hartgummiplatte als isolirende Unterlage gelegt, und auf diese der Crystall gestellt, so daß er sich wieder auf dem überragenden Theile von *M* befand. Die zur Aufnahme des Bügels dienenden Stahlklötzchen waren gleichfalls auf Hartgummiplatten befestigt; sie wurden mit diesen frei auf die oberen Flächen der Crystallprismen aufgesetzt, so daß die Schneiden über der Mitte der gepreßten Flächen sich befanden. Der Bügel und die zur Belastung dienenden Gewichte wurden ebenso angebracht wie früher. Die Seitenflächen, auf welchen die elektrische Erregung gemessen werden sollte, wurden mit Stanniol überzogen; sie wurden wieder von den beiden Backen einer federnden Klemme gefaßt, welche von der Seite her angeschoben wurde. Die eine der beiden von einander isolirten Federn wurde mit der Gasleitung, die andere mit dem Elektrometer verbunden.

Bei jeder Beobachtungsreihe wurde die Empfindlichkeit des Elektrometers bestimmt, indem dasselbe Quadrantenpaar, welches bei den piëzoëlektrischen Versuchen mit der Crystallfläche verbunden war, durch ein Clarkelement geladen wurde, dessen anderer Pol zur Erde abgeleitet war. Die Verbindungen der Pole konnten durch einen eingeschalteten Commutator vertauscht werden. Nachdem das Clarkelement entfernt war, wurde die Verbindung der Crystallfläche mit dem Quadrantenpaar hergestellt und durch Schließen des erwähnten Federkontaktes die Ableitung nach der Erde bewerkstelligt. Diejenige Stellung, welche das Elektrometer unter diesen Umständen annimmt, wird im Folgenden als Nullstellung bezeichnet. Die Crystallprismen wurden zunächst dauernd mit einem Gewichte belastet, welches je nach der Größe der gepreßten Fläche zwischen 3 und 4 kgm schwankte. Durch Aufheben des Federkontaktes wurde die Crystallfläche sammt dem mit ihr verbundenen Quadrantenpaar isolirt. Hierauf wurden 2 kgm auf der Wagschale zugelegt und der hierdurch verursachte Ausschlag gemessen. Die Nadel des Elektrometers wurde sodann durch Schließen des Contaktes in die Nullstellung zurückgeführt, der Contakt jetzt abermals unterbrochen, die zuvor aufgelegten 2 kgm wieder abgenommen und der nun nach der entgegengesetzten Seite erfolgende Ausschlag beobachtet. So wurde bei abwechselnder Belastung und Entlastung eine größere Zahl von Ausschlägen nach der einen und der anderen Seite hin beobachtet; die Differenz der beiderseitigen Ablesungen gab ein Maaß für die entwickelte Elektricitätsmenge. Dividirt man die Hälfte der Differenz d. h. den einer

Belastung von 1 kgm entsprechenden doppelten Ausschlag, durch den entsprechenden von dem Clarkelement bei der Vertauschung der Pole erzeugten, so erhält man das Potential V, bis zu welchem das Quadrantenpaar des Elektrometers bei einer Belastung von 1 kgm geladen wird, in der Einheit des Clark. Bezeichnet man durch Q die Kapacität des Quadrantenpaares, durch X die der Crystallfläche und der verbindenden Drähte, so ist die entwickelte Elektricitätsmenge

$$e = (Q + X)\,V.$$

Die Verhältnisse der auf den verschiedenen Crystallflächen entwickelten Elektricitätsmengen sind gegeben durch die entsprechenden Werthe von V, wenn die Verschiedenheiten von X für die verschiedenen Flächen zu vernachlässigen sind. Daß dies bei der gewählten Anordnung der Versuche in der That gestattet war, wurde durch eine besondere Versuchsreihe nachgewiesen. Bestimmt man die Kapacität $Q + X$ in elektrostatischem Maaße und drückt man ebenso das Potential V statt in Clark in absolutem elektrostatischem Maaße aus, so ergiebt sich die Menge der entwickelten Elektricität in den Einheiten der Elektrostatik.

2. Die piëzoëlectrischen Constanten des Quarzes.

Bei den Versuchen wurden zunächst 3 Prismen benutzt, welche im Folgenden durch B, C und D bezeichnet sind. Alle drei waren aus einer und derselben Platte geschnitten, welche senkrecht zu einer polaren Queraxe x des Crystalles lag. Die Dicken der Platten in der Richtung der x-Axe waren in cm.

B	C	D
1,921	1,912	1,919.

Die Lage der Prismen in der yz-Ebene werde dadurch bestimmt, daß die Winkel ihrer Höhen oder Seiten gegen die Hauptaxe z des Quarzes angegeben werden. Die Winkel sind positiv gerechnet im Sinne einer Drehung von der z-Axe zu der y-Axe.

Quarz	Höhe	Winkel gegen die z-Axe
B	5,402	45°
C	5,239	135°
D	3,437	22½°
	3,501	112½°.

Der Quarz B wurde später senkrecht zu seiner Höhe in zwei gleiche Stücke zerlegt, welche mit B_1 und B_2 bezeichnet werden mögen. Die Längen ihrer Seiten und ihre Orientirung gegen die z-Axe sind im Folgenden gegeben.

Quarz	Seite	Winkel gegen die z-Axe
B_1	2,498	45°
	2,279	135°
B_2	2,492	45°
	2,274	135°.

Als Einheit der Länge ist das cm benutzt.

Die belegten Flächen, auf welchen die Ladung gemessen wurde, waren bei allen Crystallen die zur x-Axe senkrecht stehenden. Die Prismen B und C wurden nur parallel ihren Höhen, also in den Azimuten 45° und 135° gepreßt; bei D wurde der Druck in der Richtung der beiden Seiten, also in den Azimuten 22½° und 112½°, ausgeübt. Ebenso bei den beiden Stücken B_1 und B_2 entsprechend den Azimuten 45° und 135°. Endlich wurden die Prismen B_1 und B_2 auch noch in der Richtung der x-Axe gepreßt und die auf den gedrückten Flächen selbst erzeugten Electricitätsmengen gemessen. Man erhält dadurch indirekt die Ladung für das Azimut von 90° eines in der Ebene zy ausgeübten Druckes, d. h. die Ladung, welche durch einen Druck in der Richtung der y-Axe auf einer zur x-Axe senkrechten Seitenfläche erzeugt wird.

Bezeichnet man mit m_e die auf der belegten zur x-Axe senkrechten Fläche erzeugte Ladung, durch q_e ihren Flächeninhalt, durch p die Belastung, durch q den Querschnitt der gepreßten Fläche, durch ϑ das Azimut der Druckrichtung, so ist

$$-\frac{m_e}{p} \times \frac{q}{q_e} = -\delta_{11} \sin^2 \vartheta + \delta_{14} \sin \vartheta \cos \vartheta = -\nu.$$

Die für die verschiedenen Druckrichtungen aus den Beobachtungen sich ergebenden Werthe von $\frac{m_e}{p} \times \frac{q}{q_e} = \nu$ sind:

	22½°	45°	90°	112½°	135°
ν	0,044	0,119	0,186	0,151	0,076.

Hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Constanten δ_{11} und δ_{14}

$$\delta_{11} = 0,1908 \qquad \delta_{14} = -0,0431$$

und die mit Hülfe dieser Werthe berechneten piëzoëlectrischen Momente ν

	22½°	45°	90°	112½°	135°
ν ber.	0,043	0,117	0,191	0,148	0,074

welche mit den beobachteten in befriedigender Uebereinstimmung stehen. Als Einheit des Druckes ist dabei das kgm, als Einheit der Electricitätsmenge diejenige benutzt, mit welcher das Quadrantenpaar des Electrometers durch 1 Clarkelement geladen wird.

3. Die piëzoëlectrischen Constanten des Turmalins.

Es waren für die Zwecke der Untersuchung 4 Prismen aus demselben Crystall, einem brasilianischen von grüner Farbe, geschnitten worden, welche im Folgenden durch *A*, *B*, *C*, *D* bezeichnet werden. Die Länge, Breite und Höhe dieser Prismen, soweit ihre Kenntniß für die Berechnung nothwendig ist, wird in der folgenden Tabelle in cm angegeben.

	l	b	h
A	1,159	0,595	0,519
C	0,892		0,538
D	1,206		0,689.

Die Orientirung der Prismen gegen die Axen des Crystalls werde durch die Richtungskosinusse ihrer Kanten bestimmt; dabei ist das Coordinatensystem so gewählt, daß die z-Axe mit der dreizähligen Hauptaxe, die y-Axe mit einer Symmetrieebene des Crystalls zusammenfällt.

		x	y	z
A	l	1	0	0
	b	0	1	0
	h	0	0	1
B	l	0	1	0
	b	1	0	0
	h	0	0	1
C	l	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
	b	1	0	0
	h	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
D	l	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
	b	1	0	0
	h	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

Die Beobachtungen ergaben für einen Druck von 1 kgm die folgenden Potentiale in der Einheit des Clarkelementes.

1. Druckrichtung parallel der z-Axe. Beobachtung der Ladung auf der zu der z-Axe senkrechten Fläche. Turmaline *A* und *B*.

$$V = 0{,}172.$$

2. Druckrichtung parallel der y-Axe. Beobachtung der Ladung auf einer zu der y-Axe senkrechten Fläche. Turmaline A und B.

$$V = 0{,}0205.$$

3. Die Richtungskosinusse der Druckrichtung sind $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ladung auf der zu der Druckrichtung senkrechten Fläche. Turmaline C und D.

$$V = 0{,}177.$$

4. Die Richtungskosinusse der Druckrichtung sind $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ladung auf der zu der Druckrichtung senkrechten Fläche. Turmaline C und D.

$$V = 0{,}191.$$

5. Druckrichtung parallel der x-Axe. Ladung auf der zur z-Axe senkrechten Fläche. Turmalin A.

$$V = 0{,}061.$$

6. Druckrichtung parallel der y-Axe. Ladung auf der zur z-Axe senkrechten Fläche. Turmalin A.

$$V = 0{,}028.$$

7. Richtungskosinusse der Druckrichtung $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ladung in der Richtung $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Turmalin D.

$$V = 0{,}097.$$

8. Vergleichende Messung der bei den Turmalinen C und D auftretenden seitlichen Ladungen, wenn bei C die Richtungskosinusse des Druckes $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$, die der Ladung $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ sind, während D unter denselben Verhältnissen beobachtet wird wie zuvor.

$$V_C = 0{,}062 \qquad V_D = 0{,}092.$$

Bei dem Turmalin werden die electrischen Momente a, b, c der Volumeinheit für den Druck p gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{a}{p} = 2\gamma_1\gamma_2\delta_{22} - \gamma_1\gamma_3\delta_{15}$$

$$\frac{b}{p} = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\delta_{22} - \gamma_2\gamma_3\delta_{15}$$

$$\frac{c}{p} = -\delta_{31} + (\delta_{31} - \delta_{33})\gamma_3^2.$$

Wenden wir diese Formeln auf die im Vorhergehenden mitgetheilten Beobachtungsresultate an, so ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Berechnung der piëzoëlectrischen Moduln.

$$1.\quad -\delta_{33} = 0{,}172$$

$$2.\quad \delta_{22} = 0{,}020$$

$$3.\quad -\delta_{15}-\delta_{33}-\delta_{31}-\delta_{22} = 2\sqrt{2} \times 0{,}177 = 0{,}500$$

$$4.\quad -\delta_{15}-\delta_{33}-\delta_{31}+\delta_{22} = 2\sqrt{2} \times 0{,}191 = 0{,}539$$

$$5.\quad -\delta_{31} = 0{,}061 \times \frac{0{,}519}{1{,}159} = 0{,}027$$

$$6.\quad -\delta_{31} = 0{,}028 \times \frac{0{,}519}{0{,}595} = 0{,}025$$

$$7.\quad -\delta_{15}+\delta_{22}+\delta_{33}+\delta_{31} = 2\sqrt{2} \times 0{,}097 \times \frac{0{,}689}{1{,}206} = 0{,}156$$

$$8.\quad \frac{-\delta_{15}-\delta_{22}+\delta_{33}+\delta_{31}}{-\delta_{15}+\delta_{22}+\delta_{33}+\delta_{31}} = \frac{0{,}062}{0{,}092} \times \frac{0{,}538}{0{,}892} \times \frac{1{,}689}{1{,}206}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die folgenden Werthe der piëzoëlectrischen Moduln.

$$\delta_{15} = -0{,}326 \qquad \delta_{22} = \begin{Bmatrix} 0{,}020 \\ 0{,}019 \\ 0{,}022 \end{Bmatrix} = 0{,}020$$

$$\delta_{31} = \begin{Bmatrix} -0{,}027 \\ -0{,}025 \end{Bmatrix} = -0{,}026 \qquad \delta_{33} = \begin{Bmatrix} -0{,}172 \\ -0{,}167 \end{Bmatrix} = -0{,}169.$$

4. Die piëzoëlectrischen Moduln in absolutem Maaße.

Durch Vergleichung mit einem Luftkondensator ergab sich für die Kapacität des mit dem Crystall verbundenen Quadrantenpaares und der verbindenden Conduktortheile

$$Q + X = 57 \text{ (cm. g. s.)}.$$

Die electromotorische Kraft eines Clarkelementes ist in electrostatischem Maaße gleich $0{,}48 \times 10^{-2}$. Endlich entspricht der Druck von 1 kgm einer Anzahl von $9{,}81 \times 10^5$ Dynen. Die früher gegebenen Werthe der electrischen Moduln müssen daher durch Multiplikation mit dem Faktor $27{,}8 \times 10^{-8}$ auf absolutes Maaß reducirt werden. Ihre Werthe im cm. g. s. System sind somit

1. *Quarz.*

$$\delta_{11} = 5{,}31 \times 10^{-8} \qquad \delta_{14} = -1{,}20 \times 10^{-8}.$$

2. *Turmalin.*

$$\delta_{15} = -9{,}07 \times 10^{-8} \qquad \delta_{22} = 0{,}55 \times 10^{-8}$$

$$\delta_{31} = -0{,}71 \times 10^{-8} \qquad \delta_{33} = -4{,}70 \times 10^{-8}.$$

Dagegen findet Curie bei Quarz $\delta_{11} = 6{,}3 \times 10^{-8}$, bei Turmalin $\delta_{33} = -5{,}3 \times 10^{-8}$.

5. Die pyroëlectrische Constante des Turmalins.

Es mögen die im Vorhergehenden für den Turmalin gefundenen Zahlen noch benutzt werden zur Berechnung seiner pyroëlectrischen Constanten und zu einer Vergleichung derselben mit dem Werthe, welchen der eine von uns bei directer Messung des durch Erwärmung erzeugten electrischen Momentes gefunden hat. Für das durch eine Erwärmung um ϑ Grade erregte electrische Moment gilt die Formel[1])

$$c = \vartheta\ (2\varepsilon_{31} a_2 + \varepsilon_{33} a_3).$$

Hier sind a_2 und a_3 die Ausdehnungscoëfficienten des Turmalins in der Richtung der y- und der z-Axe. Ferner ist:

$$\varepsilon_{31} = \delta_{31} c_{11} + \delta_{33} c_{13}, \qquad \varepsilon_{33} = \delta_{31} c_{31} + \delta_{33} c_{33}.$$

Für die Elasticitätsconstanten c ergeben sich, wenn man als Einheit des Zuges die Dyne und als Einheit der Fläche das cm^2 benützt, die Werthe:

$$c_{11} = 270 \times 10^{10} \qquad c_{33} = 161 \times 10^{10}$$
$$c_{13} = 9 \times 10^{10} = c_{31}.$$

Somit ist

$$\varepsilon_{31} = -234 \times 10^{2}, \qquad \varepsilon_{33} = -763 \times 10^{2}.$$

Da ferner

$$a_2 = 7{,}73 \times 10^{-6}, \qquad a_3 = 9{,}34 \times 10^{-6}$$

so wird schließlich

$$c = -1{,}08 \times \vartheta.$$

Dagegen führen die an 5 verschiedenen brasilianischen Turmalinen angestellten Messungen pyroëlectrischer Momente[2]) im Mittel zu der Formel

$$c = -1{,}18 \times \vartheta$$

welche mit der aus der allgemeinen Theorie sich ergebenden in hinreichender Uebereinstimmung steht.

---

1) Voigt, Allgem. Theorie der electr. Erscheinungen an Crystallen. Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Goettingen 1890. S. 69.

2) Riecke, über die Pyroëlectricität des Turmalins. Wied. Ann. 1890 Bd. XL S. 303 u. 305.

Ueber das von S. Günther 1888 herausgegebene spätmittelalterliche Verzeichnis geographischer Koordinatenwerte.

Methodische Bedenken

von

Hermann Wagner.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Juli 1890. Nachträge 1891.)

Im Besitz des Herrn Stadtsekretairs Markus Schüßler in Nürnberg findet sich eine aus dem 15. Jahrhundert stammende Handschrift von 71 Blättern in gr. Quarto, aus welcher der durch zahlreiche Arbeiten auf dem Gebiete der älteren Geschichte der Mathematik und mathematischen Geographie bekannte Sigismund Günther 1888 zwei Tabellen geographischer Positionen mitgeteilt und eingehend analysirt hat (Zeitschr. f. wissensch. Geogr. VI. 1888. S. 160—164). Derselbe sucht nachzuweisen, daß die ganze Handschrift in *Libau* oder mindestens in den heutigen Ostseeprovinzen entstanden sei.

Diese Behauptung erschien mir schon beim flüchtigen Lesen seiner Darlegungen im hohen Grade unwahrscheinlich. Bei näherer Betrachtung ergaben sich meines Erachtens so viele Einzelmisverständnisse, ja historisch wie geographisch ganz unmögliche Annahmen und Beweisführungen, daß es sich wohl im Interesse der methodischen Behandlung derartiger Fragen verlohnte, den Irrgängen des Herausgebers nachzugehen, auch wenn das Objekt an sich und in isolirter Betrachtung von keiner hervorragenden Bedeutung ist. Es gehört dasselbe zu den mittelalterlichen sog. Tabulae regionum; diese verhältnismäßig im Umfang meist beschränkten Tabellen sind eine bis jetzt noch zu wenig beachtete und bearbeitete Klasse von Dokumenten zur Geschichte der Geographie im Mittelalter, für welche man meist nur die uns überlieferten kartographischen Darstellungen verwertete. Aber in Handschriften vergraben, bereiten sie der bloßen Sammlung schon nicht unerhebliche Schwierigkeit. Ich habe eine solche seit längerer Zeit begonnen. Aber durch andere Arbeiten an dem Abschluß einer darauf bezüglichen Monographie voraussichtlich auf länger verhindert, lege ich einige methodische Winke, die an ein bereits bearbeitetes Beispiel unmittelbar anknüpfen und an demselben ge-

prüft werden können, den Freunden der Geschichte der Erdkunde im Mittelalter vor. Dieselben könnten vielleicht insofern von einigem Werte sein, als die Zahl der Bearbeiter wie der Kenner jenes Abschnittes der Geschichte noch so äußerst gering ist, daß diesen wenigen eine verhältnismäßig große Auctorität innewohnt. Zu diesen letztern gehört mein Freund Sigismund Günther in München, dessen außerordentlichem Spürsinn und Sammeleifer es bereits gelungen ist, manche vergessene Thatsache aus der Geschichte der Grenzgebiete zwischen Geographie, Physik und Mathematik an das Licht zu ziehen.

Mehr und mehr habe ich mich jedoch überzeugen müssen, daß Günther über der Freude der Entdeckung der litterarhistorischen Einzelnotiz das wichtige Erfordernis eines Geschichtsschreibers der Wissenschaften zu sehr außer Acht läßt, nämlich die Versenkung in den Zeitgeist, in das ganze wissenschaftliche Können, sowie den litterarischen Gesichtskreis einer Gruppe von Forschern der jeweilig in Betracht kommenden Perioden. Dadurch müssen aber sicher unrichtige und schiefe Auffassungen im Leser entstehen, welchen sich, wie ich an immer zahlreichern Beispielen erkennen mußte, oft ein ganz anderes Bild enthüllt, als es von G. mit wenigen Strichen gezeichnet wird, — jedoch nie ohne eine fast erdrückende Fülle von Citaten beizufügen, die sich bei näherer Einsicht nicht selten als irrig, ja als wertlos, weil nicht den Originalschriften entnommen oder gegeneinander in ihrem Werte abgewogen, ergeben. Andererseits kann aber eine richtige Beachtung des gesammten geistigen Niveaus, in welchem sich ein Einzelautor oder eine Gelehrtenschule befand, oft ein besseres Mittel zur Datirung und Erklärung eines historischen Dokumentes abgeben, als ein einzelnes Kennzeichen.

Diese Zwischenbemerkung glaube ich an dieser Stelle einschieben zu müssen, da sich meine methodischen Bedenken im vorliegenden Falle nicht gegen einen einzelnen Irrtum, sondern die ganze Arbeitsweise eines Fachgenossen, und zugleich eines Freundes und Mitarbeiters, richten müssen. Nicht leicht wird mir der Ausspruch, daß die angedeuteten Erfahrungen mit der Zeit aus dem einstigen Bewunderer seiner Gelehrsamkeit einen starken Skeptiker haben werden lassen, der jedoch nichts aufrichtiger wünscht, als daß G. die unschätzbaren Dienste, die er vermöge seiner ausgebreiteten Kenntnisse, seinem unübertroffenen Sammeleifer und hervorragendem mathematischen Wissen unserer Disziplin — ich rede hier nur von der Geschichte der Geographie — leisten könnte, durch eine wirkliche Vertiefung in den zu behandelnden

Gegenstand und gründlichere Quellenkritik zu zuverlässigen und wahren wissenschaftlichen Hülfeleistungen gestaltete.

Die Einwürfe, die ich im vorliegenden Falle gegen die Günthersche Beweisführung zu machen habe, sind kurz die folgenden:

1) Der fragliche Kodex enthält keine einheitliche Schrift, sondern besteht aus drei ganz heterogenen Bestandteilen. Derjenige, welcher die für den Geographen interessanten Ortstabellen enthält, hat aller Wahrscheinlichkeit nach *Nürnberg* zum Ursprungsort, in keinem Fall aber „die Länder des deutschen Ordens“.

2) Günther hat von der Wichtigkeit, welche man im Mittelalter auf die Kenntnis guter Polhöhen legte — der Konstruktion der Sonnenuhren wegen (S. 160) — eine viel zu günstige und darum unrichtige Vorstellung.

3) Irreführend ist ferner seine Ansicht über den hohen Grad von Genauigkeit der Beobachtungen damaliger Zeit. Günther verwechselt viel zu oft die rein rechnerische Exaktheit, die sich z. B. bei fortgesetzter Teilung von Winkelgrößen in den Tabellen ergibt, mit derjenigen, welche die Beobachtungsinstrumente hätten ergeben müssen, thatsächlich aber erst Jahrhunderte später in Folge ihrer Vervollkommnung zuließen. Und diese Ansichten führen ihn im vorliegenden Falle auf ganz seltsame Abwege.

I.

Der erste Punkt ist formaler Natur und rasch zu erledigen. Herr Schüßler hatte die Freundlichkeit, mir den Kodex zu näherer Einsicht zu überlassen, und meinem gelehrten Kollegen Wilhelm Meyer hieselbst verdanke ich noch verschiedene die Handschrift betreffende Erläuterungen. Dieselbe enthält auf den ersten 20 Blättern einen Kalender, der mit dem Jahre 1439 beginnt und von Johann von Gmünd stammt. Er ist identisch mit einer auch auf der Göttinger Bibliothek befindlichen Handschrift (im Cod. Gotting. theolog. 234); (ausführlich berichtet über denselben Stern in Ersch u. Gruber 1843 unter Joh. v. Gmunden). Dieser Kalender interessirt uns hier nicht. — Ganz unabhängig davon ist das zweite Manuskript von 36 Blättern — die zwei Blätter der vierten Kustode *d* sind herausgeschnitten, ebenso die vier letzten der Kustode *e* —, das in schöner Handschrift, die etwa auf die Mitte des 15. Jahrhunderts hinweist (W. Meyer), eine Ars componenda horologia enthält, welcher verschiedene Abhandlungen über den Quadranten, z. B. der „Prologus Prophatii Judaei in quadrantem novus“, ein tractatus chilindri etc., folgen. Das dritte

beigeheftete Stück, wie das erste eine große Krone als Wasserzeichen tragend, während das zweite den kleinen Ochsenkopf zeigt, ist teils chronologischen Inhalts — eine Ostertabelle mit dem Jahre 1477 beginnend bildet den Anhang —, teils behandelt es die Theorie und Praxis der Sonnenuhren. Die Handschrift ist eine vom zweiten Teile vollkommen verschiedene; die 5 z. B. ist der unsrigen fast gleich, in den ältern Teilen des Kodex gleicht sie der oben offenen 9. Schon hiernach ist eine Abhängigkeit dieses letzten Stückes von den Ortstabellen des zweiten oder umgekehrt, wie sie Günther (l. c. 160) behauptet, unwahrscheinlich. Die verschiedenen Wasserzeichen des Papiers bestätigen dies. Unter den Blättern des mittlern Stücks finden sich nun einige, auf welchen — ohne Zusammenhang mit dem übrigen Inhalt — die beiden Verzeichnisse geographischer Namen und Koordinaten geschrieben sind, die den Gegenstand der Untersuchung bilden: eine Liste, die wesentlich aus Landschaftsnamen mit beigefügter Breitenlage (tabula regionum Tab. I) und eine solche von Städten (tabula civitatum), mit einer dreiziffrigen Zahlenreihe ohne Tabellenkopf versehen, welche G. für Längenangaben nach Stunden, Minuten und Sekunden hielt. Entgegen den Anschauungen Günthers leugne ich den innern Zusammenhang beider Tabellen; ich halte die erstere für älter und historisch interessanter; sie stammt aus einer ganz andern Quelle als die zweite, die sicher auf Regiomontan selbst zurückgeführt werden muß; im übrigen ist es zweckmäßiger, beide ganz getrennt zu betrachten.

II.

1. Für die Analyse der Tafel der Landschaften ist die im Original gegebene Reihenfolge nicht ohne Bedeutung. Wir drucken sie daher hier nochmals ab, zugleich einige Versehen berichtigend, die Günther bei der Abschrift untergelaufen sind. Die laufenden Nummern finden sich im Originale nicht.

I. Elevationes seu altitudines poli arctici in variis regionibus:

1.	*Norvegia*	60 gradus	12.	*Frisia*	55 gradus
2.	*Swecia*	59	13.	*Hernested*	
3.	*Russia alba*		14.	*Marchia vetus*	
4.	*Dacia*	58	15.	*Prussia*	
5.	*Samaicia*		16.	*Hibernia*	54
6.	*Asia*	57	17.	*Holandria*	
7.	*Litphania*		18.	*Saxonia*	
8.	*Darpht*		19.	*Marchia nova*	
9.	*Scocia*	56	20.	*Russia media* (*Prussia media* G.)	
10.	*Liphania*				
11.	*Pomerania*				

Nr.	Regio	Gradus
21.	*Anglia*	53 gradus
22.	*Britannia*	
23.	*Brabancia*	52
24.	*Geliea*	
25.	*Westfalia*	
26.	*Thuringia*	
27.	*Misna*	
28.	*Slesia*	
29.	*Colonia*	
30.	*Flandria*	51
31.	*Julck*	
32.	*Lowanium*	
33.	*Leodium* (*Leodunum* G.)	
34.	*Remis*	
35.	*Hassia*	
36.	*Lusacia*	
37.	*Russia parva*	
38.	*Normandia*	50
39.	*Pacardia*	
40.	*Vestril*	
41.	*Franconiā*	
42.	*Bawaria*	
43.	*Bohemia*	
44.	*Morawia*	
45.	*Luthringia*	49
46.	*Swevia*	
47.	*Austria*	
48.	*Elsacia*	48
49.	*Stiria*	
50.	*Walachia*	

Nr.	Regio	Gradus
51.	*Francia*	47 gradus
52.	*Burgundia*	
53.	*Swaicia*	
54.	*Carinthia*	46
55.	*Bulgaria*	
56.	*Yberia*	
57.	*Hastringis*	
58.	*Gabaudia*	
59.	*Cumanna*	
60.	*Venecia*	
61.	*Coneolla* (*Concolla* G.)	
62.	*Croacia*	
63.	*Palespontūs*	
64.	*Magna insula Calchus*	
65.	*Albania*	
66.	*In pede montis*	45
67.	*Prewencia*	
68.	*Toscana*	
69.	*Wandalicia*	
70.	*Delphinatus*	
71.	*Roma*	
72.	*Narwarra*	44
73.	*Primania*	
74.	*Cracia* (*Gracia* G.)	
75.	*Pontus*	
76.	*Ellespontus insula*	

An die Tabelle schließt sich unmittelbar der nachfolgende Text: „*Si maximam solis declinationem vel elevationem habere velis primo oportet sciri elevationem poli mundi sive equinoctialis in eadem regione. Tunc ad elevationem equinoctialis quoad maximam elevationem adde 23 gradus et 32 minuta. Sed quoad maximam* (sic!) *declinationem tunc eosdem ab elevatione equinoctialis subtrahe et habebis. Tunc quanta erit elevatio maxima tanta erit etiam elevatio poli arctici sive poli celi.*“

2. Es ist nun zunächst der letzte Passus, von welchem Günther bei seinen Betrachtungen ausgeht. Mit Recht vermutet er, daß im zweiten Satz ein Fehler des Abschreibers — maximam statt minimam — vorliege; um so mehr muß man sich allerdings wundern, daß Günther auf den sinnlosen letzten Satz hin, wonach die Polhöhe so groß wie die Sonnenhöhe z. Z. des Sommersolstitiums sein müßte, den Schluß aufbaut, die Handschrift sei in den Ostseeprovinzen entstanden. „Der unwissende

Abschreiber hat mit jenem Satz", meint Günther, „einen argen Verstoß sich zu schulden kommen lassen, allein eben dadurch hat er uns auch einen wertvollen Fingerzeig hinsichtlich seines Aufenthaltsortes gegeben. Soll nämlich seine Regel richtig sein, so muß

$$\varphi = h_1 \text{ und } 90^0 - \varphi = \varphi - 23^0\ 32'$$

folglich

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(90 + 23^0\ 32') = 56^0\ 46'$$

sein. Dies ist aber die geographische Breite von *Libau* etwa, und es gab somit in dem vom Kompilator bewohnten Lande einen Punkt, für welchen seine Vorschrift genau, und viele Punkte, für welche sie annähernd stimmte, und mit diesem Grade von Uebereinstimmung gab sich der Abschreiber zufrieden."

Diese Beweisführung leidet nun m. E. in größtem Maße an innerer Unwahrscheinlichkeit. Im vorliegenden Fall schreibt Günther die Genügsamkeit in Bezug auf die Genauigkeit der Person des Abschreibers zu, im allgemeinen ist die Wichtigkeit, die man in jenen Jahrhunderten allgemein auf gute Polhöhen legte, eine seiner Prämissen. Man könne hiefür nicht die richtige Vorstellung gewinnen, wenn man bloß die gedruckten Bücher berücksichtige, wie es Peschel gethan, man müsse das zahlreich vorhandene handschriftliche Material zu Rate ziehen, um zu erkennen, daß man auf die Kenntnis guter Polhöhen schon um deswillen naturgemäß Wert legen mußte, da diese Kenntnis die erste Vorbedingung für die Konstruktion jeder Sonnenuhr sei. Dieser Satz läßt jeden Unbefangenen vermuten, daß man gegen Ende des Mittelalters, d. h. doch nichts anderes als vor Erneuerung der Astronomie durch die Wiener Schule, vor allem durch Peurbach und Regiomontan schon zahlreiche gute Polhöhenbestimmungen besessen habe. Wie kommt es dann, daß uns davon so ungemein wenige überliefert sind? Warum gräbt man sie mühsam aus dem handschriftlichen Material noch heute im Interesse der Geschichte der Wissenschaft aus? Einfach, weil man sie nur in höchst bescheidenem Maße besaß und man sich selbst in Gegenden, wo man durch leidliche Wege die Lage mancher Punkte auf einen fester bestimmten Ort beziehen konnte, mit ganz rohen Annäherungen begnügen mußte. Die uns überlieferten Karten beweisen dies zur Genüge und die gewaltigen Verzerrungen der europäischen Länder in westöstlicher Richtung, an die Günther gar nicht gedacht zu haben scheint, hängen nicht nur von den Mängeln der Kenntnis der Längen, sondern zum Teil auch von den fehlerhaften Breitenannahmen ab.

Die in unserer Handschrift mitgeteilte Tabula regionum I spricht gleichfalls für die Genügsamkeit der Zeit, wenn ich so sagen darf. Es werden in ihr Landschaften aufgezählt, die annähernd unter gleicher Breite liegen. Sie dürfte, das ist wohl mit Sicherheit anzunehmen, einer Karte entnommen sein, an deren Rand nach ptolemäischer Art neben den Klimaten auch die Gradzahlen angesetzt waren. Dies ist der natürliche Uebergang zu den spätern genauern Angaben der Lage, wenn wir von den äußerst wenigen, astronomisch bestimmten Punkten absehen (s. u.).

Aber Günther, die Zeitverhältnisse schon in diesem Punkte verkennend, will uns beweisen, daß der Verfasser, den er uns auf Grund des völlig verkehrten Satzes „quanta erit elevatio maxima (sc. solis) tanta erit etiam elevatio poli arctici sive poli celi" als einen unwissenden Kompilator schildert, doch vielleicht selbst für seinen Aufenthaltsort mittelst des Gnomon oder des Baculus die Polhöhe gemessen habe! (p. 162). War dies letztere der Fall, so erscheinen die theoretischen Misverständnisse noch ungeheuerlicher. Andererseits konnte er sich mittelst des Gnomon kaum um mehrere Grade irren, wenn er nicht ein ebenso ungeschickter Beobachter wie Theoretiker war. In der That schließt Günther die Richtigkeit seiner „Messung" aus dem Umstande, daß *Prussia*, das eigentliche Deutschordensterritorium, mit 55° der Breite ganz gut weggekommen sei [1]). Wie reimt sich nun mit der eigenen Beobachtung von 55° die vermeintliche Uebereinstimmung zwischen der größten Sonnenhöhe h_1 und der Polhöhe am Beobachtungsort, da aus

$$\varphi = h_1 \text{ und } \varphi - 23^0\ 32' = 90^0 - \varphi$$

ja unbedingt $\varphi = 56^0\ 46'$ also fast 2° mehr folgt? Diese Breite ist, sagt Günther trotzdem, etwa diejenige von *Libau* und es gab somit in dem vom Kompilator bewohnten Lande einen Punkt, für welchen seine Vorschrift genau, und viele Punkte, für welche sie annäherud stimmte.

Ein weiteres Argument für den Ursprungsort der Handschrift im Ordenslande ist nach Günther ferner, daß in derselben an einer andern Stelle als gnomonisches Beispiel die Anfertigung einer Sonnenuhr „*in Prusia*" gelehrt werde. Indessen zeigt die betreffende Figur, neben welcher „*in Prusia*" steht, genau die gleiche Unwissenheit des Abschreibers in den ersten Elementen der Ortsbestimmung.

---

1) Was das von G. als „unter der topographischen Bezeichnung *Prussia media* wenig bekannte Mittelpreußen" betrifft, welches ebenfalls gut bestimmt sei (S. 162), so existirt dieses in der Handschrift nicht; es steht dort deutlich „*Russia media*".

Denn nach derselben bildet, was Günther entgangen ist, im Meridiandurchschnitt die linea equinoctialis einen Winkel von 55°, die Axis einen Winkel von 35° mit dem Horizont; während es für Orte unter 55° Br. gerade umgekehrt sein müßte. Unmöglich kann zwischen dem Misverständnis „quanta erit" und diesem „*in Prusia*" irgend ein Zusammenhang bestehen, da in dem ersten Falle die größte Höhe der Sonne (also zur Zeit des Sommer-Solstitiums), im zweiten die Aequatorhöhe derselben, (also zur Zeit der Aequinoctien) mit der Polhöhe bezw. der geographischen Breite identifizirt wird. Und der Mann also, der sich solche Verstöße zu Schulden kommen läßt, sollte im Stande gewesen sein die Polhöhe durch Gnomon oder gar durch den Baculus zu bestimmen[1]?

3. Vorausgesetzt der Abschreiber habe wirklich in jenen Gegenden gewohnt, wie stimmen nun seine Ansichten über die gegenseitige Lage der in Frage kommenden Landschaften mit der Wirklichkeit überein? — es werden *Samaicia*, *Litphania*, *Liphania*, *Prussia* genannt, nebst *Darpht*, ein Name, der hinter *Litphania* folgt. Unter *Darpht* ist gewiß, wie G. ausführt, nichts anderes zu verstehen als *Dorpat* (*Tarbatum*) und für diesen Ort ($58^1/_3$° N.) stimmt die Breite von 57° wenigstens nicht schlechter, als für manche andere Orte. *Dorpat* liegt aber, und lag doch auch niemals in *Lithauen* (*Litphania*). Doch wie dem auch sei, wie sollte ein in jenen Gegenden wohnender Klosterbruder nun *Livonia* (*Livland*), südlich von *Litthauen* setzen? „Gerade dieser Umstand spricht dafür", sagt G. (S. 162 ob.), „daß ein Preuße die Beschreibung anfertigte, denn ein solcher bezeichnete eben mit dem Wort *Litthauen* das ganze Gebiet des Ordenslandes bis hoch in den Norden" (!?). In der That eine seltsame Argumentation. Denn niemals konnte eine so generelle Bezeichnung es zuwege bringen, daß man deshalb glaubte, der Weg von Preußen führe durch das Gebiet von *Litthauen* südwärts nach *Livland*. Aber selbst wenn beide Namen zu vertauschen wären, sodaß an erster Stelle *Liphania* (57°), an zweiter *Litphania* (56°) stände, so müßte die Stellung von *Samaicia* unter 58° die Vermutung, der Verfasser habe in *Prussia* gewohnt, ganz über den Haufen werfen. Denn für *Samaicien* liegt ein Schreibfehler in keinem Fall vor. *Sarmatia*

1) Das letztere Instrument ist doch vor Regiomontan sicher nur in den Händen von astronomisch durchgebildeten Männer gewesen, wenn wirklich auf Grund der neuern Handschriftenfunde die Existenz desselben gegenüber den frühern Ansichten um hundert und dreißig Jahre zurück datirt werden muß (s. Günther, Martin Behaim. Bamberg 1890. p. 63. Anm. 55 u. ders. in Eneström's Bibliotheca mathematica 1890. 73—80).

dafür einsetzen zu wollen bei der besondern Aufzählung von *Russia alba, media, parva* hat keinen Sinn. *Samaicia* mit *Samland* zu identificiren, wie G. es bedingungsweise thut, ohne zu bedenken, daß dadurch der Breitenunterschied zwischen *Prussia* (55°) und *Samland* (58°) ja noch viel unerklärlicher bei einem „Preußen" wäre, ist ebensowenig angängig, da *Samland* im Mittelalter *Sambia* oder *Zambia* hieß. *Samaicia* ist vielmehr nichts anderes als die unzweifelhaft zu *Litthauen* gehörige Landschaft *Sameytha*, das Land der Samogiten, durch die Swiatha (jetzt Swenta, rechter Nebenfluß der Wilija) von *Litthauen* getrennt, kurz also eine südlich von *Livland* gelegene Landschaft. Roger Baco, der über die gegenseitige Lage dieser Landschaften (Opus majus. Lond. 1733 p. 226) schon weit besser orientirt war, als die Tabelle unserer Handschrift, verlegt *Semi-gallia* (*Samogitia*) östlich von *Livland*. Es muß also gerade aus dem Umstand, daß die Tabula regionum im Nordosten so außerordentlich fehlerhaft ist, von neuem geschlossen werden, daß ihr Ursprung in jenen Gegenden nicht zu suchen ist.

4. Aber zu Gunsten seiner Auffassung führt G. weiter den doppelten Umstand an, daß einerseits mit weiterem Fortschreiten gegen Süden die Unsicherheit der Angaben mehr und mehr wächst, und daß andererseits die Breiten, wenn Fehler mit unterlaufen, nur vergrößert niemals verkleinert werden. Auch diese Behauptung ist, wie sich aus der Einzelanalyse der Tabelle ergeben wird, in ihrer Allgemeinheit faktisch unrichtig. Einige ganz auffallende Misverständnisse in Bezug auf gewisse Namen mögen teilweise Veranlassung zu der irrtümlichen Auffassung gegeben haben (s. u. *Dacia* und *Wandalicia*); im übrigen hätte eine geographische Untersuchungsmethode den Interpret sicher zu andern Ansichten geführt. Es zeigt sich nämlich bei einer solchen, daß die Breitenlagen am besten für die westdeutschen Landschaften stimmen, etwa zwischen 52° und 47°, daß die Fehler sich von hier aus nordostwärts und südostwärts am meisten vergrößern, und zwar sind die östlichen Landschaften fast alle zuweit nach Norden gerückt, wofür man auch eine plausible Erklärung geben könnte. Dies soll indessen, da es näher belegt werden müßte, für jetzt nicht geschehen. Wir wollen die Tabelle selbst näher betrachten, sie in drei Abteilungen zerlegend.

a) Schreibt man zunächst die Landschaften mit einer Polhöhe von mehr als 53° nach ihrer Breitenlage, wie folgt, in horizontalen Reihen neben bezw. übereinander, so weicht unter den 22 Namen nur *Pomerania* (Nr. 11 in Tab. I) von der Regel ab, daß in jeder Breitenzone die Aufzählung mit der westlichen Landschaft beginnt:

Breite								
60°				*Norvegia*				
59°					*Svecia*		*Russia alba*	
58°				*Dacia*		*Samaicia*		*Asia*
57°						*Litphania*		
56°	*Scocia*			*Pomerania.*		*Liphania*		
55°		*Frisia.*	*Hernested.*	*Marchia vetus.*		*Prussia*		
54°	*Hibernia.*	*Holandria.*	*Saxonia.*	*Marchia nova*			*Russia media*	
53°	*Anglia.*	*Britannia.*						

Zunächst weist diese Anordnung schon unzweideutig auf die Identität von *Dacia* und *Dania* oder *Dänemark* hin, auch wenn nicht jede Ptolemäusausgabe den Namen *Dacia* im südlichen Schonen bezw. im Gebiet der Inseln trüge und derselbe Name sich auf zahlreichen handschriftlichen und gedruckten andern Karten des 15. u. 16. Jahrhunderts (Reysch, Orontius Finaeus, J. Vadian u. a.) fände, sodaß es in der That verwunderlich ist, wie G. darüber Erörterungen noch anstellen konnte, daß „mit jenem Namen *Dacia* (das unter 58° verlegt ist!), wohl etwas anderes gemeint sein müsse als das *Dacien* zur Römer Zeit" (bekanntlich in ca. 45° Br.!)

Nur der Name *Hernested* macht Schwierigkeit. Mir scheint jedoch die Karte des Cl. Clavus v. J. 1427 den Schlüssel zu geben. Dort steht (ca. 57½° nach Ptolemaeus, 53½° nach Clavus, also im Mittel 55°) die Inselgruppe *Haelieland (Helgoland)*, wie G. Waitz (Nordalbingische Studien I. 1844) aus dem aus dem schwer zu entziffernden Namen gelesen; ich lese *Haelgaeland*. Das von Nordenskjöld (Studien u. Forschungen. Lpz. 1885. Taf. II) herausgegebene Facsimile der Karte des Clavus zeigt den Namen etwa wie: [illegible], dessen letzte Hälfte leicht als *sted* gelesen werden könnte. Die Aufzählung hinter *Frisia* spricht jedenfalls nicht gegen diese Konjektur.

b) Auffallend ist, daß keiner deutschen Landschaft die Polhöhe von 53° gegeben wird. Auf der andern Seite zeigt sich sofort, daß die Namen Nr. 23—35, die sich mit Ausnahme von *Russia parva* und *Walachia* auf Mitteleuropa beziehen, in annähernd richtiger Breite und westöstlicher richtiger Folge aufgezählt sind. Die fünf Ortsnamen lassen wir zunächst aus der Uebersicht fort.

Breite							
52°		*Brabancia.*	*Geliea.*	*Westfalia.*	*Thuringia.*	*Misna*	*Slesia.*
51°		*Flandria.*		*Hassia.*		*Lusacia.*	
50°	*Normandia.*	*Pacardia.*	*Vestril.*	*Franconia.*	*Bawaria.*	*Bohemia.*	*Morawia.*
49°			*Luthringia.*	*Swevia.*		*Austria.*	
48°			*Elsacia.*			*Stiria.*	
47°		*Francia.*	*Burgundia.*	*Swaicia.*			

Daraus ergibt sich, daß die östlichen Landschaften z. T. um 1° zuweit nördlich gerückt sind, dies gilt von *Thuringia*, *Misna*, *Slesia*, *Bawaria*, *Austria*, *Stiria*, während man für die *Lausitz* und *Böhmen* den 51° bezw. 50° als mittlere Breite annehmen kann. Unter den westlichen Landschaften macht uns *Vestril* Schwierigkeit. Verstümmelt oder verschrieben ist der Name gewiß. Einen Schlüssel für die Erklärung kann jedoch die Aufzählung zwischen *Picardia* und *Franconia* abgeben; nach meiner Vermutung handelt es sich um den Namen *Westrich* (*Vestric*). Der Name rührt bekanntlich von *Neustria* oder *Westria* (*Austrasia*) her und umfaßte im Mittelalter die Landschaften zwischen *Elsaß*, *Lothringen*, *Trier* und *Pfalz*, also jedenfalls einen größern Landkomplex als später, wo man darunter den südwestlichen Teil der *Pfalz* verstand. Schon des Nic. Cusanus Germania (ca. um 1460, gestochen 1491)[1]) gibt der Landschaft diesen beschränkten Umfang.

Es ist ferner bemerkenswert, daß sich sämmtliche Ortsnamen in der Tabelle mit Ausnahme von *Darpht* und *Remis* auf bekannte Städte u. zw. meist Bischofsitze in der schmalen Zone zwischen *Köln* und *Löwen* beziehen, nämlich *Colonia* selbst, *Julk* (*Jülich*), *Lowanium* (*Löwen*) und *Leodium* (*Lüttich*), und daß die Breitenfehler für dieselben, sobald man unter den Ziffern nicht Parallelkreise, sondern Breitengrade versteht, hier ziemlich gering sind. *Reims* freilich ist in der Lage erheblich falsch gesetzt (und vielleicht erst später eingeschoben). Immerhin könnte jener Umstand in Verbindung mit der ziemlich richtigen Lage der Landschaften im rheinischen Deutschland plausibler auf den Ursprungsort hindeuten, als auf irgend eine andere Gegend Mitteleuropas.

c) Die Fehler vergrößern sich von neuem für die südlichen, mehr noch für die südöstlichen Landschaften und wenn die Breitenlage auch für einige (norditalische) gut paßt, so fällt es auf, daß die Ordnung der Aufzählung in westöstlicher Richtung fast ganz durchbrochen wird. Dadurch wird die Lokalisirung der nicht ohne weiteres verständlichen Namen erschwert. Wir trennen die westlichen von den östlichen Landschaften:

54. *Carinthia*	46°	66. *In pede montis*	45°	72. *Narwarra*	44°
57. *Hastringis*		67. *Prewenzia*		73. *Primania*	
58. *Gabaudia*		68. *Tuscana*			
60. *Venezia*		69. *Wandalicia*			
61. *Coneolla*		70. *Delphinatus*			
62 *Croacia*		71. *Roma*			

1) S. die photolithographische Reproduktion der kürzlich wiedergefundenen Karte, herausg. v. S. Ruge im Globus Bd. LX. 1891.

In dieser Tafel ist Nr. 54 *Hastringis* nicht zu erklären. Der Umstand, daß er vor *Gabaudia* (oder, wie G. schon sagt, *Sabaudia* d. h. *Savoyen*) genannt wird, könnte vielleicht ihn in Zusammenhang mit einer westlichen Landschaft (*Gastinois* um *Nemours*??) bringen. Für die Vermutung G.'s, daß man unter *Carniolla Krain* zu verstehen habe, spricht in der That der Umstand, daß dort *Coneolla* und nicht *Concolla* steht und zwar vor *Croacien* aufgezählt wird. — Ganz entschieden müssen wir uns gegen die Uebersetzung von *Wandalicia* mit *Andalusien* erklären. Schon der gewaltige, alle andern Irrthümer weit übersteigende Fehler von 8° in der Breite spricht gegen diese Annahme. Ebenso scheint aber auch die Latinisirung des Namens *Andalusia*, der erst aus der arabischen Geographie spät in die mittelalterliche übergegangen ist, in der Form *Wandalicia* eine sehr selten gebrauchte und jedenfalls sehr späten Datums zu sein. Während der Name *Andalus* sich auf den arabischen Karten des 10. Jahrh. schon zeigt, tritt er in den Karten der Abendländer erst am Ende des 16. Jahrh. auf, aber stets in der Form „*Andalusia*". Die Karten zu den Ptolemäusausgaben nennen auch auf den sog. Tabulae novae jene Landschaft *Baetica*, ebenso fehlt *Wandalicia* oder *Vandalicia* im Thesaurus geogr. von Ortelius v. J. 1587, wogegen auch in diesem *Andalusia* mit *Baetica* latinisirt wird. Wie sollte ferner plötzlich diese eine südspanische Landschaft in die Gruppe der norditalischen kommen, während sonst überhaupt keine von so südlicher Breite genannt werden? Es dürfte daher wenig Zweifel sein, daß *Wandalicia* für *Vindelicia* steht, und die wiedergefundene Karte des Cusanus, die jedenfalls spätern Datums (s. vor. S.), bestätigt, daß der Name ähnlich wie *Westrich* im 15. Jahrh. noch nicht obsolet geworden war. — Mit *Narwarra* (*Navarra*) und *Primania* erreichen wir im Westen die südlichsten Landschaften. Ob *Romania* für *Primania* zu lesen ist, so daß dieses für den ganzen Kirchenstaat zu stehen hätte, muß dahin gestellt sein. Doch wüßte ich auch zunächst keinen andern Ausweg, nur kann nicht der nördliche Teil des ehemaligen Kirchenstaates, *Romagna* im engern Sinne, gemeint sein, wie G. vermutet.

Als östliche Landschaften bleiben dann noch die folgenden

55. *Bulgaria* 56. *Yberia* 57. *Cumanna* 58. *Palespontus* 64. *Magna insula Calchus* 65. *Albania*	46°
74. *Cracia* 75. *Pontus* 76. *Ellespontus insula*	44°

Auch hier also beträchtliche Nordverschiebung, die jedoch 3 Breitengrade nicht übersteigt, wenn wir bedenken, daß *Cracia* (*Graecia*) nicht dem heutigen Griechenland, sondern dem Rumpf der türkischen Halbinsel entspricht. Unter *Cumanna* ist Cumanenland d. h. Ungarn zu verstehen (G.) *Yberia*, *Colchis* und *Albania* führen uns in die Kaukasusländer bezw. das südlichste Rußland. Die Form *Palespontus* vermag ich für jetzt auch nicht zu erklären. Da *Pontus* noch besonders — südlicher von jenem gelegen — genannt wird, kann man vielleicht an den Asow'schen Busen denken und irgend eine Kombination von *Palus* und *Pontus* vermuten (??)

5. Fassen wir die ganze Tabelle zusammen, so entbehrt sie in ihrer Gruppirung nicht des Interesses und ist eine nicht unwichtige Ergänzung der kartographischen Darstellungen aus dem Anfang (?) des 15. Jahrhunderts. Denn älter als des Cusanus (1464) Germania ist sie gewiß. Zur Zeit ist mir jedoch weder eine Karte bekannt, die als Quelle der Aufstellung angesehen werden könnte, noch eine anderweitige Tabula regionum, an die sie sich anschließt. Gerade die Beschränkung auf Landschaften des mittlern und nördlichen Europa gibt ihr ein Alter vor dem allgemeinern Bekanntwerden der Geographie des Ptolemäus im Abendland (die erste lateinische Uebersetzung durch den Florentiner Jacobo Angelo ward bekanntlich 1410 vollendet, was hier nur erwähnt wird, weil G. den Italiener (l. c. 160 Anm. 2) schlankweg zu einem Deutschen Jakob Engels, macht). Setzt die geordnete Reihenfolge, in welcher die Landschaften nördlich des 46° mit geringen Ausnahmen aufgezählt werden, m. E. voraus, daß der ursprüngliche Verfasser eine Karte vor sich hatte, welche am Rande eine Einteilung nach Klimaten und Einzelgraden hatte, so kann dieselbe nicht ganz klein, nach Art der Imago mundi des Petrus d'Ailly, gewesen sein; dies könnte höchstens von einer zweiten Karte gelten, aus der vielleicht die Landschaften zwischen 44° und 46° entnommen sind, wobei die richtige Aufzählung nach Breitenzonen größere Schwierigkeit bot, denn unwahrscheinlich ist es, wie gesagt, daß eine solche überhaupt ohne eine die räumliche Vorstellung unterstützende Kartenskizze erfolgt sein sollte. Indessen mag das Weitere bis zur Durchmusterung noch anderen Materials zurückgestellt werden.

III.

Nur ein Kriterium gibt es noch für die Datirung zu erörtern, welches G. nicht weiter beachtet hat, nämlich die Annahme der Schiefe der Ekliptik zu 23° 32′. Ueber diesen Punkt enthält

die G.'sche Darstellung nur die Worte „die Schiefe der Ekliptik ward von Peurbach zu 23°33′ angesetzt, von Coppernikus zu 23°29′, unsere Quelle bedient sich eines zwischen diesen beiden Zahlen liegenden Wertes". Diese Darstellung ist in den Ziffernangaben des erstern Teils unrichtig, in ihrem zweiten m. E. irreführend. Ich muß über diesen Punkt etwas weiter ausholen. Jener Ausdruck kann doch wohl nicht anders verstanden werden, als daß Peurbach selbstständig die Schiefe zu 23°33′ bestimmt habe, ebenso wie später Coppernikus zu 23°29′. Aber für diese Behauptungen liegen keine Belege vor. Ich berühre dabei einen wunden Punkt in der Geschichte der astronomischen Wissenschaft. Trotzdem im Laufe der letzten drei Jahrhunderte die Geschichte der Bestimmungen der Schiefe der Ekliptik (meist unter dem Stichwort der säkularen Aenderung bezw. Abnahme derselben) oft in kosmographischen oder astronomischen Werken behandelt ist, fehlt es, so viel mir bekannt, noch ganz an einer vollständigen und wirklich quellenmäßigen Darstellung [1]). Meist wird in den Einzelhinweisen nicht auf die Originalquellen zurückgegangen. Für seine Zeit am vollständigsten hat wohl Riccioli im Almagestum novum Bonon. 1661. p. 160—161 berichtet [1]). Sonst pflegt der eine Autor diesen, der andere jenen Urheber in ziemlich willkührlicher Weise fort zu lassen oder er nimmt einen solchen auf, ohne das Gewicht desselben für die Entwickelung der Wissenschaft erst abzuwägen. So schiebt Günther neuerdings (Handbuch der math. Geogr. 1890. S. 736) auf eine zufällige, neue litterarhistorische Notiz hin [2]) in eine alte Mädler'sche Tabelle von nur vier Namen (die Versetzung Albatâni's oder des Albategnius a. a. O. ins 10. statt ins 9. Jahrh. darf nicht auf Mädlers Rechnung gestellt werden) zwischen Arzachel und Coppernicus noch den Lehrer des letztern, Novara, ein, den Copp. selbst nicht einmal nennt und dessen Bestimmung keinerlei Einfluß auf die Berechnungen seiner oder

---

1) Wenn G. in seinem Handbuch der math. Geogr. 1890. S. 736 sagt: „Im Zusammenhang studirt die aus älterer Zeit überlieferten Messungsergebnisse Laplace in seinem den Conn. des temps von 1841 einverleibten Aufsatze: Sur la diminution de l'obliq. de l'éclipt. qui resulte des observ. des Anciens" (sic, statt anciennes) so kann G. die Arbeit unmöglich selbst eingesehen haben, denn erstens steht dieselbe in den Conn. des temps 1811, sodann beschäftigt sie sich nur mit den Messungen der Chinesen, älterer Griechen excl. Ptolemaeus und einiger Araber und Perser, aber nicht mit denen des 15. und 16. Jahrhunderts.

2) Leben d. Coppernikus v. Prowe I. 1885. S. 244, wo die Autorschaft des Novara für den Wert 23°29′ durch handschriftliche Notizen festgestellt wird.

späterer Zeiten geübt hat, während z. B. weder Prophatius, noch Peurbach und Regiomontan, noch Werner etc. von G. in die Liste gestellt werden.

Genug die Bestimmung des Coppernicus ist nicht 23°29', sondern 23°28'24" (wie G. auch in seinem Handbuch anführt), wofür in seinem Hauptwerk auch öfters 23°28'30" gesetzt wird[1]). Aber mehr interessirt uns zur Zeit Peurbach, von dem feststeht, daß er 1460 mit Regiomontan zugleich die Ekliptikschiefe zu 23°28' bestimmt hat, so daß Coppernikus mit Recht sagen konnte, die von ihm gefundenen Werte stimmen mit dem von P. u. R. erhaltenen wohl überein[2]). Das rein fachwissenschaftliche Interesse knüpft sich bei solchen Werten bekanntlich mehr an die Bedeutung derselben für die Kenntnis der wahren Verhältnisse zu

1) Nic. Coppernicus: Ueber die Kreisbewegung der Himmelskörper, übers. mit Anm. v. M. Menzzer. Thorn 1879. S. 60. 135. 143.

2) Menzzer gibt (l. c. Anm. 102 u. 103) nur einige biogr. Notizen über Peurbach und Regiomontan, aber sagt nichts über ihre Bestimmung. Daher mögen folgende Belegstellen folgen. M. Ptolemei alex. in Magnam Constructionem Georgii purbachii ejusque discipuli Joh. de Regio monte Astronomicon Epitoma (Venetiis 1496). Lib. I prop. XVII: Nos autem invenimus arcum alt. trop. hiem. 65 graduum 6 minutorum et arcum alt. trop. estualis 18 gr. 10 min. Ideoque nunc distantia tropicorum est 46 gr. 56 min., ergo declinatio solis maxima nostro tempore est 23 gr. 28 min." — Ferner ist der in *Nürnberg* aufbewahrte und von Murr (Memorabilia biblioth. publ. Norimb. 1786. I.) veröffentlichte Briefwechsel Regiomontans mit Bianchini von Wichtigkeit. Anfang 1464 (l. c. 148—149) schreibt R. an B.: „Nos autem, praeceptor meus et ego, instrumentis reperimus declinationem solis maximam 23 gr. minutorum 28 fere. M. Paulum florentinum et D. Baptistam de Alberthis sepe audivi dicentes se diligenter observasse et non reperisse majorem gr. 23 minutis 30 que res etiam tabulas nostras videlicet tabulam declinationis et ceteras que super eam fundantur innovare persuadet". Es ist dies die Stelle, in welcher sich R. sehr eingehend mit einer Kritik auch der ältern Werte beschäftigt. Wenn, beiläufig, Günther in seinen Studien z. Gesch. d. math. u. phys. Geographie (Halle 1877. Heft 2. S. 77) gegenüber Mädler (Gesch. der Himmeskunde I, 123) behauptet, es sei ein Irrtum des letztern, daß Peurbach bereits etwas von der Veränderung der Schiefe der Ekliptik gewußt habe, so kann G. wohl nicht die Theorica motus octavae sphärae (den letzten Teil der 1460 geschriebenen Theoricae novae planetarum), selbst eingesehen haben, deren vorletzter Abschnitt: „de mutatione declinationum solis maximarum" mit dem Worten beginnt: „Unde fit, ut maximae Zodiaci declinationes variabiles existant . . . . .; majores namque reperta sunt a Ptolemeo quam ab Almeone" etc. Erst hinterher folgte jener Anhang: „Theorica octavae sphärae secundum Thebit". Wenn ferner Peurbach im Eingang seiner Theorica oct. sphaerae dem „tertius motus" derselben hinzufügte: „qui motus trepidationis vocatur", warum nennt Günther a. a. O. diesen von Delambre gebrauchten Ausdruck einen ganz und gar unhistorischen"?

gewissen Zeiten, sodaß man die event. von den Beobachtern noch vernachlässigten Korrektionen, wie in unserm Fall besonders diejenigen der Refraktion, anbringt, sie also gleichsam wissenschaftlich zustutzt. Aber das historische Interesse verweilt mehr bei den Originalziffern selbst und deren Einfluß auf die Arbeiten der Zeit. Wenn nun einerseits keine Frage ist, daß eine ganze Reihe von Tafeln Regiomontans und seiner unmittelbaren Nachfolger bezw. Herausgeber auf jenen Wert von 23°28', der von ihm und Peurbach ein Jahr vor des letztern Tode gefunden ward, gegründet sind, so steht andererseits fest, daß beide und besonders Peurbach während des größern Teil seines Lebens hindurch sich an einen der ältern Werte hielten und zwar wesentlich an die Zahl 23°33'30", den Regiomontan ausdrücklich als den üblichen bezeichnet[1]) und gelegentlich auf Thebit (ben Korra um 900)[2]) zurückführt, woneben gelegentlich auch 23°33' oder wohl auch rund 23½° angewandt wird.

Der in unserm Manuskript vorkommende Wert 23°32' hat also mit den eben genannten Zahlen nichts zu thun und dieser ist mit Sicherheit auf Prophatius Judaeus (Jacob ben Machir um 1300) zurückzuführen, wobei ich mich ohne weitere Erörterungen auf die ausführlichen Darlegungen Menzzer's[3]) die er zum Teil dem gelehrten M. Steinschneider verdankt, beziehen kann; nur mag hinzugefügt werden, daß die Kommentatoren Peurbachs und Regimontan's den Prophatius auch bereits mit zu nennen pflegten[4]). Jedenfalls geht hieraus hervor, daß uns diese Zahl nicht etwa auf eine zeitlich zwischen Peurbach und Coppernicus fallende Periode führt, wie man leicht aus Günthers Worten herauslesen könnte. Nicht daß wir die Ortstabelle auf

1) Regiomontan an Bianchini 23. Juli 1463 (Murr l. c., 76): „utor enim declinatione maxima solis usitata gr. 23 min. 33 sec. 30" und als Bianchini (p. 81), „den Wert gr. 23 m. 30 sec. 30 supponirt „sicut ipsam multociens cum instrumento at in diversis temporibus consideravi diligenter" antwortet R. (p. 85), daß er bei Berechnung der ihm von Bl. gestellten Frage die größte Deklination der Sonne zu 23 gr. 30 min. angenommen habe „que declinatione maxima convenienter usitata minor fere est tribus minutis".

2) Reg. im Brief an Bianchini 1464 (Murr. l. c. p. 146): „post eos Tebith declinationem invenit maximam gr. 23 minuta 33 fere. Vergl. auch Peurbach: Theor. oct. sphaerae sec. Thebit: Eclyptica fixa semper secat equatorem ad angulum semper eundum, puta 23 gr. 33 min. et 30 sec.

3) Nic. Copp.: Ueber d. Kreisbewegungen etc. s. o. Anm. 89.

4) S. z. B. Chr. Vurstisius: Quaest. novae in theor. planet. Basel. 1578. S. 421, wo jedoch Prophatius mit 23°22' min. angeführt wird, oder Peurbach: theor. nov. planet. ed. Ed. Reinholdo. Wittenb. 1601 p. 238.

die Zeit des Prophatius zurück datiren wollen, aber da Regiomontan dessen Berechnung der Ekliptikschiefe niemals erwähnt, so folgt wohl hieraus von neuem, daß wir jene Tabelle auf eine Zeit vor Reformation der Astronomie durch die Wiener Schule zurückrücken dürfen.

IV.

1. Die Ortstabelle (Tabula civitatum) unseres Manuskripts, unter deren 62 Namen sich einige wenige Landschaftsnamen finden, ist die folgende. Ein Tabellenkopf fehlt.

1.	*Hibernia*	m	1	16	59
2.	*Scocia*	m	0	36	59
3.	*Oxonium*	m	0	52	53
4.	*Compostellum*	m	1	40	45
5.	*Lisibona*	m	1	40	41
6.	*Toletum*	m	1	27	41
7.	*Corduba*	m	1	21	38
8.	*Cesaraugusta*	m	1	6	41
9.	*Rhotomagus*	m	0	43	50
10.	*Parsiiis* (sic)	m	0	30	48
11.	*Lugdunum*	m	0	31	45
12.	*Burdigalia*	m	0	52	45
13.	?	m	0	32	44
14.	*Tolosa*	m	0	43	43
15.	*Vienna provincie*	m	0	30	44
16.	*Massilia*	m	0	28	43
17.	*Pragis*	m	0	36	52
18.	*Gandanum*	m	0	24	52
19.	*Trajectum*	m	0	12	53
20.	*Colonia*	m	0	13	51
21.	*Machilia*	m	0	24	51
22.	*Maguntia*	m	0	15	50
23.	*Herpipolis*	m	0	4	50
24.	*Argentina*	m	0	12	45
25.	*Constantia*	m	0	10	46
26.	*Augusta Vindelicorum*	A	0	10	46
27.	*Dacia*	*a*	0	36	58
28.	*Swetia*			26	62
29.	*Bubeca*			16	56
30.	*Dantiscum*			56	56
31.	*Prunswigum*	*a*	0	0	53
32.	*Magdeburgum*			16	54
33.	*Erffort*			4	51
34.	*Lips*			10	51
35.	*Ingelstadium* (*Ingelstadum* G.)			4	49
36.	*Nurenberga*	*a*	0	0	49
37.	*Ratisbona*	*a*	0	6	49
38.	*Ulma*	*a*	0	0	47
39.	*Praga*	*a*	0	24	50
40.	*Vratislavia*	*a*	0	40	51
41.	*Cracovia*	*a*	0	50	51
42.	*Caschovia*			56	50
43.	*Buda*			50	47
44.	*Segnia* (*Seguia* G.)			32	45
45.	*Vienna anno'*			15	48
46.	*Patavia*			10	48
47.	*Saltzeburga*			12	48
48.	*Iudeburgum*			14	47
49.	*Villacum*			13	46
50.	*Brixina*			8	45
51.	*Venetie*			10	45
52.	*Ancona*			14	44
53.	*Roma*			20	42
54.	*Tarentum*			44	40
55.	*Brudusium* (sic)			40	39
56.	*Neapolis*			36	41 (sic)
57.	*Florentia*			10	42
58.	*Mediolanum*			0	44
59.	*Taurinum*	m	0		43
60.	*Genua*	m	0	4	
61.	*Sardinia*	*a*	0	2	38
62.	*Sicilia*	*a*	0	30	37

2. „Man wird zugestehen müssen“, sagt Günther, „daß diese Tafel, welcher auch nicht ein Schatten von Erklärung beigegeben ist, demjenigen, der sie betrachtet, zunächst ein Räthsel aufgibt.“ Muß schon diese Frage der ohne Weiteres verständlichen Tabelle gegenüber verwundern, wieviel mehr die Lösung, daß man es

hier mit einer Tafel ausschließlich der Längen zu thun habe und obige Ziffern den Längen in Stunden, Minuten und Sekunden entsprächen!! Hier darf man wohl mit Recht fragen, welche Fortschritte für den so notwendigen streng wissenschaftlichen Betrieb der Erdkunde zu erwarten sind, wenn ein Autor, der seit mehr als einem Jahrzehnt mit besonderer Vorliebe die historische Seite der mathematischen Geographie traktirt und uns der Führer durch das nicht leicht verständliche Gebiet sein könnte, der u. a. über Peurbach, Regiomontan, Joh. Werner, Apian, Keppler kleinere oder größere Monographien geschrieben, eine so einfache Tabelle jener Zeit total misversteht, und die beigegebenen Grade der Breite für Längensekunden erklärt! Man würde es für ein Versehen allzu flüchtiger Betrachtung ansehen, wie es einem so unendlich vielschreibenden Autor einmal unterlaufen kann, wenn G. sich nicht diesmal besonders Zeit genommen hätte und sich des Langen und Breiten abmühte, aus den so verkannten Zahlen den Mittelmeridian herauszukonstruiren. Zuvor erklärt er offen: „Wir sind außer Stande anzugeben, von welchen Worten *a* und *m* als Anfangsbuchstaben zu denken sind.“ Wunderbar, daß nicht wenigstens dem Mathematiker G. und Verfasser einer Geschichte des mathematischen Unterrichts die Ausdrücke „adde“ und „minue“ oder „addendum“ und „minuendum“ eingefallen sind, wofür in den deutschen Ausgaben der Tabelle, von denen die Rede sein wird, *g* (zugeben) und *n* (abnehmen) steht. „Da somit“, sagt G., „ein offenbarer Fehler vorliegt, so gilt es eine möglichst schonende Verbesserung anzubringen; so sehr wir uns die Schwierigkeit vor Augen stellen, in ein solches Zahlenheer, vielleicht von einem unwissenden Kopisten mit allen möglichen Versehen zusammengeschrieben, Konjekturen hineinzutragen, so wird sich doch im gegebenen Falle dieses Wagnis nicht ganz vermeiden lassen.“ Ich finde die einzige Erklärung für das totale Verkennen der Zahlen der dritten Spalte (von denen, wohl bemerkt, keine unter 37 herabgeht) als Zeitsekunden in der irrigen Vorstellung, welche sich G. über den Grad der Genauigkeit für die Beobachtungen jener Zeit gebildet hat, vielleicht verführt durch die langen Ziffernreihen der astronomischen Tabellenwerke, wie z. B. der Libros del saber des Königs Alphons. Hier handelt es sich jedoch einfach um rechnerische Operationen, die beliebig weit ausgedehnt werden konnten und mit dem Genauigkeitsgrad, mit dem man sich bei Beobachtungen begnügen mußte, nichts gemein haben.

Die obige Tabelle, welche wir als eine weit verbreitete aus

dem Kalender und den Ephemeriden des Regiomontan ohne Schwierigkeit werden nachweisen können, gibt, obwohl sie bereits aus der Zeit der Reformation der Astronomie durch diesen großen Mathematiker stammt, ein neues Zeugnis für die Genügsamkeit jener Zeit. Die vermeintlichen Zeitsekunden geben die Breitenlage zwischen 62° und 37° in ganzen Graden an und die Längenangaben in Stunden und Minuten bieten nur für fünf Orte eine ungerade Zahl von Minuten, d. h. im Bogenmaß eine Genauigkeit bis auf Viertelgrade. Für weitere 11 gerade, aber nicht durch vier teilbare Zahlen, also eine Genauigkeit nur bis auf halbe Grade, alle übrigen (durch 4 teilbaren) Längenangaben würden im Bogenmaß ausgedrückt für die Lage nur ganze Grade ergeben!

Die völlig falsche Prämisse, daß man es hier nur mit Längenangaben in Stunden, Minuten und Sekunden zu thun habe, sind begreiflicher Weise Schuld, daß Günthers Versuche den angenommenen Mittelmeridian aus der Tabelle herauszulesen, völlig hinfällig sind. Wir brauchen uns dabei nicht aufzuhalten, da sich derselbe aus der Länge $0^h\ 0^m$ von selbst ergibt; es ist die durch *Braunschweig*, *Nürnberg*, *Ulm* und *Mailand* ziehende Mittagslinie, die von selbst schon auf *Nürnberg* als den Ursprungsort der Tabelle hinweist.

3. Natürlich mußten auch die Versuche, die veralteten Ortsnamen in die uns geläufige Form umzuschreiben, durch das Verkennen vor allem der Bedeutung der dritten Zahlenspalte leiden. Es könne nicht entschieden werden, sagt G., ob *Lugdunum* (Nro. 11) *Leyden* oder *Lyon* sei. Der Zusatz 45, d. h. 45° d. Br., läßt ohne Weiteres erkennen, daß *Lyon* gemeint ist. *Dacia* entspricht natürlich auch in dieser Tabelle *Dänemark*. Auch würde G. sich bei *Neapel* nicht verlesen und 45° gesetzt haben, wenn er die Ziffern als Breiten erkannt hätte (die Zahl 41 ist nicht gut geschrieben). Ebenso hätte er die fehlenden Zahlen bei *Neapel* (0° 2^m L.) und *Genua* (43° Br.) ergänzen können. Im übrigen halten wir uns bei den leichtverständlichen Namen nicht auf, die an der Hand der häufigen Reproduktionen durch den Druck leicht identificirt werden können, auch wenn sie hier verschrieben sind (*Pragis* statt *Prugis*, *Bubeca* statt *Lubeca*, *Argentina* 45° statt 47° etc.).

Nur gegen der Vermutung G.'s, daß man unter *Segnia* (nicht *Seguia*, wie G. gelesen) der Bischofssitz *Seckau* in Steiermark zu verstehen sei, wollen wir uns mit Entschiedenheit erklären. Eine geographische Untersuchungsmethode ist von G. nicht angewandt, es bot ihm offenbar nur die Namensähnlichkeit den Anhalt. *Seckau* liegt jedoch nicht 20 Kil. nordöstlich von Judenburg. Man vergleiche da-

mit den Längenunterschied nach obiger Tabelle; nach dieser liegt *Segnia* $18^m = 4^1/_2$ Längengrade oder ca. 350 Kil. östlich von Judenburg. Solcher Fehler wird dem Autor der Tabelle also bei zwei ganz benachbarten Orten imputirt! Indessen ist m. E. gar kein Zweifel, daß man *Segnia* mit dem heutigen *Zengg* in Dalmatien zu identifiziren hat, wofür nicht nur jener Längenunterschied, sondern auch die Breite von 45° spricht. Außerdem findet sich der alte Name für *Zengg* als *Senia*, *Signia*, *Segnia* auf zahlreichen Karten des Mittelalters, sowie der Ptolemäusausgaben. Selbst Spruner-Menkes Atlas genügt zur Erläuterung.

4. Wie schon angedeutet, ist es ebenso verwunderlich, daß der Biograph des Regiomontan, der uns eine genaue Inhaltsangabe seines berühmten Kalenders (Allg. deutsche Biographie Bd. 22 Joh. Müller) mitteilt, die vorliegende Ortstabelle nicht sofort als diejenige erkannt hat, die sich nicht nur in fast allen Ausgaben des lateinischen Calendarium, wie des deutschen Kalenders, sondern auch in den Ephemeriden und dem Almanach desselben als *„Tabula regionum“* figurirt und von hier aus auch in die Ausgaben der Alphonsinischen Tafeln übergegangen ist, um, später allmählich erweitert, im 16. Jahrhundert noch oft abgedruckt zu werden. Freilich müssen wir auch nach der rein litterarhistorischen Seite G. einer seltsamen Unkenntnis zeihen, wenn er nach — doch hoffentlich aus der Autopsie geschöpften — Beschreibung des deutschen Kalenders von 1475 mit der Tafel der „Landt und stet“ (das eben ist unsere Tabelle) in der Allg. deutschen Biographie, die das Zuverlässigste enthalten sollte, was gegeben werden kann, fortfährt: „Ganz ähnlich war auch der z. Z. in Göttingen — vielleicht in dem einzigen noch übrigen Exemplar — befindliche latein. Kalender, der 1485 zu Venedig erschien“ etc. Hätte G. einmal in Hain's Repertorium bibliograph. 1836—38 geblickt, so würde er mit Nro. 13 775 beginnend allein gegen 15 Ausgaben des Kalenders, davon 9 lateinischen, neben 5 Ausgaben der Ephemeriden und zweien des Almanach, welche bis 1500 im Druck erschienen, begegnet sein, und nach den mit einem * bezeichneten, von Hain selbst gesehenen Ausgaben, darf angenommen werden, daß die Münchener Bibliothek eine ganze Reihe dieser Kalender besitzt, ganz abgesehen von den nach 1500 gedruckten. Das Göttinger Exemplar ist nebenbei die 1482 in Venedig erschienene (Hain 13 777) Ausgabe. Uebrigens sind die Hain'schen Zusammenstellungen sowohl Stern (Ersch u. Gruber 1843 Joh. de monte regio) als R. Wolf (Gesch. der Astronomie 1877, S. 96) entgangen.

Durch Einsicht in eine dieser Ausgaben hätte sich auch die Lücke Nro. 13 mit *Avignon* ausfüllen lassen und der „räthselhafte Zusatz“ *annoe* bei Wien hätte sich als *Vienna pannonie* im Gegensatz zum *Vienna provincie* entpuppt. Auf die kleinen Abweichungen, welche die verschiedenen Ausgaben der tabula regionum haben, verlohnt es hier kaum einzugehen. Mit *Hibernia* beginnend und mit *Sicilia* endigend füllt sie fast immer eine Seite kl. 4^0 in den genannten Werken. In der Ausgabe der Alphonsinischen Tafeln von 1483 (Alfontii regis tab. astron., cur. Erh. ratoldt) befindet sich noch eine Kombination der ältern Tabula regionum und der neuen, geordnet nach der Länge von W. nach O. und mit Angabe der Längen in Graden und Minuten (letztere meist auf 10 abgerundet) und der Breiten in Graden, nur daß bei 9 Orten auch noch Breitenminuten eingesetzt sind. In der hier in Göttingen befindlichen Ausgabe der Alph. regis tab. astr. vom Jahre 1498 steht dagegen genau die gleiche wie im Regiomontans Kalender, wobei die Längen in Stunden und Minuten ausgedrückt sind [1]).

5. In dem einen Punkte glaube ich Günther beistimmen zu müssen, daß hier die erste Ortstabelle vorliegt, in welcher die Längen durchweg in Zeit angegeben sind, und nach allem, was zur Zeit bekannt, dürfen wir wohl nur Regiomontan als den Urheber dieser Neuerung ansehen, welche im engen Zusammenhang mit der Herausgabe neuer Ephemeriden stehen dürfte. Daß derselbe früher sich der üblichen Bezeichnung im Bogenmaß, mit dem Anfang an der Westgrenze der bewohnten Erde, bediente, geht u. A. unzweideutig aus dem Briefwechsel mit Joh. Bianchini, Jac. Spira, Christian Roder in Erfurt 1463—71 hervor. Noch im letzten Brief vom 4. Juli 1471 an Roder heißt es (Murr l. c. 195): „Urbs roma longitudinem habet ab occidente graduum 35 et latitudinem ab equinoctiali 42 graduum.“

Ob die erste Ausgabe des Kalender Regiomontans bereits 1473 oder erst 1474 erschienen, ist mir zur Zeit nicht bekannt. Die k. Bibliotheksverwaltung zu Berlin teilte mir mit, daß die dort befindliche Ausgabe von 1473 (sic) eine Tabula regionum nicht habe, wohl aber die von 1475. Da nun die erste 1474 gedruckte Ausgabe der Ephemeriden für 1475—1506 [2]) (s. Wolf, Gesch. d. Astron. 1877, S. 96, Hain Nro. 13 790) die Tabula gleichfalls enthält, so muß wohl 1474 bezw. 1475 als das Jahr des ersten Erscheinens

1) Nicht also zuerst in den alphonsinischen Tafeln erschienen diese Listen neuer Breitenbestimmungen, wie S. Ruge (Globus Bd. LX. 1891) meint.

2) Gallois (s. folg. S.) gibt S. 7 irrtümlich 1405—1506 an.

der Tabula mit Angaben der Längen in Zeit angesetzt werden. Damit ist dann auch unsere handschriftliche Tabelle datirt, welche nach allem nichts anderes sein kann, als eine Kopie aus dem Kalender selbst, vielleicht eine Abschrift des handschriftlichen Originals. Damit werden wir in Betreff der Herstellung dieses Mittelstücks wieder auf *Nürnberg* hingeführt und zwar auf die Zeit, in welcher Regiomontan sich dort aufhielt (1471—75).

6. Zum Schluß lenken wir die Aufmerksamkeit nochmals auf die „Genügsamkeit der Zeit in Betreff guter Polhöhen“. Nicht, daß es zu jener Zeit nicht eine Reihe von Städten gegeben hätte, für welche man bessere Werte hätte einsetzen können, wie *Wien*, *Nürnberg*, *Erfurt*, *Würzburg*, *Mainz*, *Paris*, *Oxford*, *London* u. A., aber kaum wird sich aus unserer Tabelle ein Dutzend Orte herausheben lassen, für welche man Polhöhen hatte, die man anders als auf halbe Grade abzurunden wagte. Da sie fast verschwanden gegenüber den unsicher bestimmten, ließ man die Minuten auch bei den genauer bekannten fort, trotzdem auf diese Weise geographische Ungereimtheiten sich ergaben, wenn man die Tabelle zur unmittelbaren Eintragung in eine Karte hätte benutzen wollen, wo *Salzburg* und *Passau*, ebenso *Regensburg*, *Ingolstadt* und *Nürnberg* auf eine westöstliche Linie gerückt worden wären. Es zeigt sich daraus, daß die Tabelle wesentlich zu astronomischem Gebrauch, nicht zu geographischen Zwecken zusammengestellt war und daß sie in den Ephemeriden ihren eigentlichen Platz hatte. Die Bevorzugung der Längen durch Angabe der Zeitminuten ist natürlich mehr scheinbar, da, wie oben nachgewiesen, für nicht weniger als 44 Orte bezw. Landschaften die Zeitmaße nur ganzen Graden der Länge im Bogenmaß entsprechen. Die nähere Untersuchung wird jedoch auch diese Tabelle in den Kreis ihrer Betrachtung ziehen müssen, wenn es gilt die Kartographen zu nennen, welche die Feststellungen der Astronomen in Mitteleuropa zuerst mit ausnutzten. Für jetzt fragen wir, ob aus dieser Tabelle nicht von neuem hervorgeht, daß es in damaliger Zeit an guten Polhöhen noch ganz außerordentlich gefehlt haben muß, und man sich demnach mit den rohesten Annäherungen zufrieden geben mußte. Von diesem Standpunkt aus erfährt der von Günther begangene Irrtum von Längenangaben bis auf einzelne Zeitsekunden zu sprechen (in unsern Breiten entspricht die Differenz einer Zeitsekunde einer Längendifferenz im Wegemaß von ca. $^1/_3$ Kilometer) eine neue Beleuchtung.

Nachträglich sei auf die mir erst 1891 zugekommene Arbeit von L. Gallois, Les géographes allemands de la renaissance (Biblio-

thèque de la faculté des lettres de Lyon T. XIII 1890. Paris, E. Leroux) hingewiesen, in welcher sich der Verfasser eingehender mit den ältern im Druck erschienenen Tabulae regionum (Regiomontan, Stöffler, Schoener, Apian, Münster) beschäftigt, die er zum Abdruck bringt (App. I—VI). Er vergleicht dabei teils Regiomontans Positionen mit solchen aus Ptolemaeus, teils die der andern mit den wirklichen nach unserer heutigen Kenntnis. Daß die Tabula regionum Regiomontans auch im Calendarium enthalten war, scheint dem Verfasser entgangen zu sein. Hinsichtlich des Zwecks der Ortstabellen in den Ephemeriden kommt Gallois zu den gleichen Resultaten, wie ich sie oben angeführt habe (l. c. p. 8). Der Vollständigkeit wegen mag noch hinzugefügt werden, daß R. Wolf schon 1872 (Vierteljahrsschr. Zürich. nat. Ges. 1872. 17 S. 378) einen kleinen Auszug (6 Orte) aus Regiomontans Ortstabelle von 62 Namen mitteilte.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Bölcsészettudományi Ertekezések. (Philosoph. Abhandlungen). III. Köt. 2. Szám. Ebd. 1889.
Ballagi Aladár: Colbert. Második Resz. Ebd 1887/90.
Czánki Dezső: Magyarország történelmi földrajza a Hunyadiak korában. (Geschichtliche Geographie Ungarns im 15. Jahrh.). I. Köt. Ebd. 1890.
Monumenta Hungariae juridico-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. Tom. II. Pars I. Ebd. 1890.
Demkó Kálmán: A felső-magyarországi városok életéről a XV.—XVII. században. (Das Leben oberungarischer Städte im 15.—17. Jahrh). Ebd. 1890.
Kovács, Ferd.: Index alphabeticas codicis diplomatici Arpadiani continuati per G. Wenzel editi. Ebd. 1889.
Monumenta comitialia regni Hungariae. X. Köt. (1602—1604). Ebd. 1890.
Monumenta comitialia regni Transsylvaniae. XIV. Köt. (1664—1669). Ebd. 1889.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. November. **№ 9.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. November.

de Lagarde, A) Worterklärungen: *Cicisbeo*, *Caparra*, *Σατράπης*, B) dritter Brief des Paulus an die Korinther.

Schering theilt von Herrn Alberto Tonelli „eine Notiz über die Auflösung quadratischer Congruenzen" mit.

Klein legt einen Aufsatz von Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen".

Ehlers legt einen Aufsatz von Herrn Privatdocenten Dr. Bürger vor: „Vorläufige Mittheilungen über Untersuchung an Nemertinen von Neapel".

Wallach legt eine Mittheilung vor „Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome".

Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen.

Von **Franz Meyer** in Clausthal.

(Vorgelegt von Herrn F. Klein).

1. Sei gegeben eine Gleichung n^{ten} Grades

$$(1) \qquad f(\lambda) = a_0 + n a_1 \lambda + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 \lambda^2 + \cdots + a_n \lambda^n = 0$$

mit reellen Coefficienten und ungleichen Wurzeln, so kann man nach einem endlichen System von Gleichungen

$$(2) \qquad f_1(\lambda) = 0, \quad f_2(\lambda) = 0, \quad \ldots \quad f_\nu(\lambda) = 0$$

fragen, so, daß die Gesammtanzahl der reellen Wurzeln aller $\nu+1$-Gleichungen (1), (2), von Uebergangsfällen abgesehen, unverändert dieselbe bleibt, wie auch die ursprüngliche Gleichung (1) ausgewählt sein mag.

Beschränken wir uns auf den Fall, wo die Gleichungen (2) vermöge Annahme von (1) bereits völlig und zwar rational mitbestimmt sind, so werden die Formen $f_1, f_2 \ldots f_\nu$ rationale Covarianten der Form f sein.

Das Gleichungensystem (1), (2) wird — falls Complicationen vermieden werden sollen — die Eigenschaft besitzen müssen, daß, sobald für irgend eine derselben in Folge geeigneter Variationen der Coefficienten a zwei reelle Wurzeln in's Imaginäre übergehen (resp. vice versa), genau umgekehrt zwei Wurzeln einer der übrigen Gleichungen aus dem imaginären Größengebiet in das reelle übertreten (resp. vice versa).

Daß eine derartige Erscheinung möglich ist, lehrt das bekannte Beispiel einer cubischen Form $f(\overset{3}{\lambda})$ und ihrer Hesse'schen Covariante $f_1(\overset{2}{\lambda})$. Sind nämlich die drei Wurzeln von $f=0$ reell, so fallen die beiden von $f_1=0$ imaginär aus (u. umg.); ist hingegen nur eine Wurzel von $f=0$ reell, so müssen es auch die von $f_1=0$ sein (u. umg.). Oder anders ausgedrückt, die Productgleichung $ff_1=0$ hat die constante Anzahl von drei reellen Wurzeln.

Der algebraische Grund dieser Eigenthümlichkeit ist offenbar der, daß die Discriminanten der beiden Formen f und f_1 übereinstimmen.

2. Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

„Ist $f_0 = f(\overset{n}{\lambda})$ eine binäre Form *ungerader* Ordnung $n=2\nu+1$, und bildet man die Reihe der Ueberschiebungen:

$$(3)\quad f_1=(f,f)^2,\quad f_2=(f_1,f)^4,\quad f_3=(f_2,f)^6,\ \ldots\ f_\nu=(f_{\nu-1},f)^{2\nu},$$

so erfüllen die Discriminanten der $\nu+1$ Formen f_i die Kette von Beziehungen:

$$(4)\qquad D(f)=D_0,\quad D(f_1)=D_0D_1,\quad D(f_2)=D_1D_2,\ \ldots$$
$$D(f_{\nu-1})=D_{\nu-2}D_{\nu-1},\quad D(f_\nu)=D_{\nu-1},$$

wo sämmtliche D irreducible Invarianten der Form f_0 sind.“

Das Bildungsgesetz der Covarianten f_i (3) tritt noch deutlicher hervor, wenn wir dasjenige ihrer Leitglieder berücksichtigen.

Es ist nemlich das Leitglied von f_i nichts Anderes, als die Determinante j_i:

$$(5)\qquad j_i = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{i-1}, & a_i \\ a_1, & a_2, & \dots & a_i, & a_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \dots & a_{2i-1}, & a_{2i} \end{vmatrix} = (0, 1, \dots i-1, i).$$

Hieraus geht sofort der Ausdruck für den nächstfolgenden Coefficienten von f_i hervor; derselbe ist (bis auf einen Zahlenfactor) gleich der Determinante j':

$$(6)\qquad j_i' = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{i-1}, & a_{i+1} \\ a_1, & a_2, & \dots & a_i, & a_{i+2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \dots & a_{2i-1}, & a_{2i+1} \end{vmatrix} = (0, 1, \dots i-1, i+1).$$

Die weiteren Coefficienten von f_i setzen sich linear aus Determinanten zusammen, von denen wenigstens eine noch andere Colonnen von Größen a enthält, als die in j_i und j_i' auftretenden.

Eine Ausnahme dieser Regel findet nur bei der letzten Covariante $f_\nu = f_{\frac{n-1}{2}}$, der sog. Canonizante von f_0 statt, deren Coefficienten bekanntlich die Determinanten der Matrix:

$$(7)\qquad \begin{Vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{\nu-1}, & a_\nu, & a_{\nu+1} \\ a_1, & a_2, & \dots & a_\nu, & a_{\nu+1}, & a_{\nu+2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\nu, & a_{\nu+1}, & \dots & a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n \end{Vmatrix}$$

sind.

Mit f_ν bricht offenbar die Reihe der Bildungen f_i von selbst ab.

Der Grad von f_i in λ ist $(i+1)(n-2i)$, derjenige in den Coefficienten a ist $(i+1)$, mithin der Grad der Discriminante von f in den a gleich $2(i+1)\{(i+1)(n-2i)-1\}$.

3. Es fragt sich nunmehr, unter welchen Umständen die Discriminante von f_i verschwinden kann. Denkt man sich die dann entstehende Doppelwurzel von $f_i = 0$ an die Stelle $\lambda = 0$ verlegt, so kommt die Frage darauf hinaus, wann die beiden Determinanten j_i und j_i' gleichzeitig Null sind.

Zufolge eines bekannten Determinantensatzes kann dies nur dann stattfinden, wenn entweder von der einen, oder aber der andern der beiden Matrices:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{i-1} \\ a_1, & a_2, & \dots & a_i \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \dots & a_{2i-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{i-1}, & a_i, & a_{i+1} \\ a_1, & a_2, & \dots & a_i, & a_{i+1}, & a_{i+2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \dots & a_{2i-1}, & a_{2i}, & a_{2i+1} \end{vmatrix}$$

sämmtliche vollständige Determinannten verschwinden.

Im ersten Falle verschwinden dann aber auch die beiden ersten Coefficienten j_{i-1}, j'_{i-1} von f_{i-1} (indessen keine weiteren, auch keine sonstigen Größen j), im letzteren die beiden ersten Coefficienten j_{i+1}, j'_{i+1} von f_{i+1} (mit dem entsprechenden Zusatze).

Eine eigenthümliche Schwierigkeit bietet hierbei die letzte Covariante f_ν. Zuvörderst gilt allerdings wiederum der Schluß, daß das Verschwinden der beiden ersten Coefficienten j_ν, j'_ν entweder das von $j_{\nu-1}$, $j'_{\nu-1}$ nach sich zieht, oder aber dasjenige sämmtlicher Coefficienten von f_ν.

Nun bemerkt man aber leicht, daß die Covariante f_ν nicht einmal dann identisch verschwindet, wenn die ersten $\nu+1$ Coefficienten $a_0, a_1, \dots a_\nu$ von f_0 gleich Null gesetzt werden, während alle übrigen Bedingungen ($j=0$, $j'=0$) sicher dadurch erfüllt werden.

Nach einem Satze von H. Hilbert[1]) kann daher einzig und allein das identische Verschwinden von f_ν nicht durch das Verschwinden von Invarianten der Form f_0 ersetzt werden d. h. die Discriminante von f_ν kann überhaupt keinen Factor (der doch eine Invariante sein müßte) aufweisen, der dem in Rede stehenden Falle entspräche.

4. Durch das Vorhergehende ist bereits begründet, daß eine Kette von Zerlegungen der Art (4) existiren muß: es wäre nur möglich, daß die dort mit D_i bezeichneten Ausdrücke Potenzen irreducibler Invarianten $\varDelta_i$, und daß sogar die beiden Potenzen von $\varDelta_i$ in $D(f_i)$ und $D(f_{i+1})$ verschiedene sind.

Diesem Einwande begegnet man durch wirkliche Aufstellung der D_i und nachfolgende Gradvergleichung.

Zu dem Behuf betrachte man die Gleichung:

$$(9)\qquad a^{2(\nu-i)}_{\lambda_0;\,\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_i;\,\mu_0,\mu_1,\mu_2,\dots\mu_i} = 0$$

als eine in den $i+1$ Größen μ identische; von den damit äquivalenten $i+2$ Gleichungen bilde man die Resultante bez. der Größen λ.

Es wird behauptet, daß diese Resultante R_i mit der Invariante D_i übereinstimmt.

---

1) Vgl. diese Nachrichten vom laufenden Jahre Nr. 7.

In der That ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jene $i+2$ Gleichungen für ein Werthsystem $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ zusammenbestehen, genau durch das Verschwinden aller Determinanten der zweiten, unter (8) angegebenen Matrix characterisirt.

Wie man ferner durch geeignete Specialisirungen der Coefficienten a erkennt, ist die Resultante R_i auch nicht die Potenz einer andern Bildung. Mithin könnte D_i nur noch eine Potenz von R_i sein.

Nun ist aber R_i vom Grade $(i+1)(i+2)(n-2i-1)$ in den a, somit der Gesammtgrad von $R_{i-1} R_i$ gleich $2(i+1)\{(i+1)(n-2i)-1\}$ d. i. gleich dem Grade von $D(f_i)$. Also folgt $D_i = R_i$ q. e. d.

5. Nach diesen Vorbereitungen können wir zum Beweise des Hauptsatzes übergehen:

„Ist $f_0 = f(\lambda)$ wiederum eine binäre Form ungerader Ordnung $n = 2\nu + 1$, und sind f_i $(i = 1, \ldots \nu)$ die unter (3) aufgestellten Covarianten, so besitzt die Productgleichung:

$$f_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots f_\nu = 0 \tag{10}$$

eine *unveränderliche*[1]) Anzahl von *reellen* Wurzeln".

Man lasse etwa die Invariante D_{i-1} vermöge Variation der Coefficienten a den Werth Null passiren. Im „penultimaten" Zustande befinden sich dann sowohl unter den Wurzeln von $f_{i-1} = 0$, wie unter denen von $f_i = 0$ zwei nahezu coincidirende. Es handelt sich um den Nachweis, daß diese beiden Wurzelpaare von ungleichem Realitäts-Character sind, sodaß stets eines der beiden Paare reell, das andere imaginär ausfällt.

6. Zu dem Zwecke ist eine explicite Darstellung der drei ersten Coefficienten der Covariante f_i erforderlich.

Die Werthe der beiden ersten entnehmen wir aus (5) und (6):

(5) $j_i = (0, 1, \ldots i-1, i)$; (6) $j_i' = (0, 1, \ldots i-1, i+1)$,

sodaß die Entwickelung von f_i beginnt, wie folgt:

$$f_i = j_i + \mu j_i' \lambda + (\ ) \lambda^2 + \cdots \tag{11}$$

Der Zahlenfactor μ berechnet sich leicht als

$$\mu = n - 2i. \tag{12}$$

---

1) sc. mit Ausschluß der Uebergangsfälle, wo eine oder mehrere der Invarianten D_i verschwinden.

Um zu einer übersichtlichen Darstellung des Coefficienten von λ^2 in (11) zu gelangen, wählen wir eine Entstehung von f_i, die derjenigen von D_i in Nr. 4 analog ist.

Versteht man nämlich unter:

$$(13) \qquad a^{n-2i}_{\lambda;\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_i;\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_i} = 0$$

eine in den μ identisch erfüllte Gleichung, so fließen daraus $i+1$ Gleichungen, aus denen die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ eliminirt werden können. Das Eliminationsresultat ist eine Covariante mit dem Leitgliede j_i, die demnach mit f_i übereinstimmen muß.

Es kommt so für f_i die Determinante (von der es genügt, die erste Zeile zu notiren):

$$(14) \qquad f_i = \Big| a_0 + \mu a_1 \lambda + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a_2 \lambda^2 + \cdots,$$

$$a_1 + \mu a_2 \lambda + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a_3 \lambda^2 + \cdots, \quad \ldots, \quad a_i + \mu a_{i+1} \lambda + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a_{i+2} \lambda^2 + \cdots \Big|$$

Bedient man sich entsprechender Abkürzungen, wie bei (5) und (6), so hat man für den Factor von λ^2:

$$(15) \qquad \frac{\mu(\mu-1)}{2}(0,1,\ldots i-1, i+2) + \left(\mu^2 - \frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)(0,1,\ldots i, i+1)$$

$$= \frac{\mu}{2}\left\{(\mu-1)(0,1,\ldots i-1, i+2) + (\mu+1)(0,1,\ldots i, i+1)\right\},$$

und die Entwickelung von f_i fängt mit nachstehenden drei Gliedern an:

$$(16) \qquad f_i = (0,1,\ldots i-1, i) + \mu(0,1,\ldots i-1, i+1)\lambda$$

$$+ \frac{\mu}{2}\left\{(\mu-1)(0,1,\ldots i-1, i+2) + (\mu+1)(0,1,\ldots i, i+1)\right\}\lambda^2 + \cdots$$

$$= F_i(\lambda^2) + \cdots$$

7. Indem wir jetzt die Bedingungen, unter denen die Gleichungen $f_i = 0$ und $f_{i+1} = 0$ eine gemeinsame Doppelwurzel Null erhalten, nahezu als erfüllt ansehen, werden wir zeigen müssen, daß alsdann die Discriminanten der beiden quadratischen Formen F_i und F_{i+1} stets verschiedene Vorzeichen besitzen.

Dieser Beweis soll indessen hier unter einer vereinfachenden Annahme geführt werden.

Die fraglichen Bedingungen werden zweifellos befriedigt, wenn man alle Coefficienten $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{2i+1}$ verschwinden läßt. Dagegen bleiben dabei sämmtliche Invarianten D_k $(k \gtrless i)$ von Null verschieden.

Demgemäß ergiebt sich ein penultimater Zustand, wenn man setzt:

$$(17) \qquad a_i = \varepsilon\alpha_i, \quad a_{i+1} = \varepsilon\alpha_{i+1}, \quad \ldots, \quad a_{2i+1} = \varepsilon\alpha_{2i+1}$$

wo ε eine beliebig kleine, positive resp. negative reelle Größe bedeutet, während die α endlich und reell sind.

Berücksichtigt man beim Hinschreiben der Formen F_i und F_{i+1} immer nur die niedrigsten Potenzen von ε, so liefert eine leichte Rechnung mit Rücksicht auf (16):

$$(18) \quad \begin{cases} F_i = -a_{i-1}^i a_{2i} + (\,)\,\varepsilon\lambda - \dfrac{(n-2i)(n-2i-1)}{2} a_{i-1}^i a_{2i+2}\lambda \\ F_{i+1} = -a_{i-1}^i a_{2i} a_{2i+2} + [\,]\,\varepsilon\lambda + \dfrac{(n-2i-2)(n-2i-1)}{2} a_{i-1}^i a_{2i+2}^2 \lambda^2. \end{cases}$$

Die Factoren von $\varepsilon\lambda$ sind nur angedeutet, da sie bedeutungslos sind. Stellt man nemlich nunmehr die beiderseitigen Discriminanten auf, so beginnen dieselben mit der ersten Potenz von ε, wie folgt:

$$(19) \quad \begin{cases} D(F_i) = -2(n-2i)(n-2i-1)\,a_{i-1}^{2i}\,\alpha_{2i}\,a_{2i+2} \quad \varepsilon + \cdots \\ D(F_{i+1}) = +2(n-2i-2)(n-2i-1)\,a_{i-1}^{2i}\,\alpha_{2i}\,a_{2i+2}^2\,\varepsilon + \cdots, \end{cases}$$

sind also in der That stets von ungleichen Vorzeichen: die letzteren vertauschen sich nur, wenn ε durch Null hindurchgeht.

Für $i = 0$ und $i = 1$ treten hinsichtlich der Vorzeichen der einzelnen Glieder in (18) kleine Modificationen ein, die aber das Endergebniß (19) nicht beeinflussen.

Damit ist gezeigt, daß die Anfangs aufgeworfene Realitätsfrage für Gleichungen ungeraden Grades eine einfache Lösung [1]) zuläßt.

Für Gleichungen von geradem Grade versagt indessen eine entsprechende Beantwortung, wenigstens auf dem hier eingeschlagenen einfachsten Wege.

Allerdings ist auch hier die geschlossene Reihe der Ueberschiebungen

$$f_1 = (f, f)^2, \quad f_2 = (f_1, f)^4, \quad \ldots \quad f_{\frac{n}{2}} = (f_{\frac{n}{2}-1}, f)^n$$

1) Die sich naturgemäß anschließende Frage nach der Größe der als constant nachgewiesenen Gesammtanzahl von reellen Wurzeln zu beantworten, ist mir vorderhand nicht möglich.

vorhanden, aber die letzte derselben ist vom Grade Null in λ, kann also keine Discriminante liefern.

Obgleich demnach alle Schlüsse des Vorhergehenden bis zur vorletzten Form $f_{\frac{n}{2}-1}$ gültig bleiben, so hört es eben bei dieser [1]) auf d. i. wenn die Invariante $f_{\frac{n}{2}}$ durch Null hindurchgeht, so kann die Gleichung $f_{\frac{n}{2}-1} = 0$ reelle Wurzeln verlieren oder gewinnen, ohne daß ein Ausgleich stattfindet.

1) Uebrigens tritt hier noch die weitere Aenderung hinzu, daß der zweite Factor der Discriminante von $f_{\frac{n}{2}-1}$ gleich der $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ten}}$ Potenz von $f_{\frac{n}{2}}$ wird.

Clausthal, den 24. October 1891.

Vorläufige Mittheilungen über Untersuchungen an Nemertinen des Golfes von Neapel.

Von

Dr. **Otto Bürger,** Privatdozent in Göttingen.

(Vorgelegt von Ehlers.)

Der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin bin ich zu großem Dank verpflichtet, da sie mir einen längeren Aufenthalt an der zoologischen Station zu Neapel ermöglichte. Es wurde mir somit nicht nur Gelegenheit gegeben, reiches Material zu sammeln, sondern auch eine Reihe von Beobachtungen am lebenden Thier zu machen, die unerläßlich sind, sobald man eine vielseitige Bearbeitung einer Thiergruppe ins Auge gefaßt hat. Einige der gewonnenen Resultate erlaube ich mir vorläufig mitzuteilen.

Die Nemertinenfauna des Neapler Golfes erscheint bisher als die bedeutendste der Welt. Erstaunlich ist die Menge, in der sich viele Arten zu allen Zeiten vorfinden, und überraschend der Formenreichtum. Durch Hubrecht sind bislang 52 Arten registriert worden. Nur 5 von diesen sind mir während der sechs Monate, die ich am Golfe weilte, nicht zu Gesicht bekommen, dagegen über 30 von Hubrecht noch nicht beschriebene und überhaupt mit wenigen Ausnahmen neue Formen.

Es ist bekannt, daß fast alle in der Nordsee aufgefundenen Nemertinenformen auch im Golfe Neapels angetroffen sind. Man

macht aber die sehr augenfällige Beobachtung, daß die Nemertinen des mittelländischen Meeres klein sind im Vergleich zu ihren nordischen Verwandten, die z. B. an den englischen und amerikanischen Küsten gefischt sind. Solch riesig lange Nemertinen wie sie Mc. Intosh und Verrill (Lineus marinus [Montg.] 15—30 und Macronemertes gigantea [Verr.] 10 Fuß) gesehen haben, sind, wie mir der Herr Conservator Lo-Bianko versicherte, niemals gedredgt worden und somit auch wohl nicht dort. Ein Schauexemplar, ein Cerebratulus marginatus, welcher conserviert fast noch 1 m lang und 3 cm breit ist, wird in der Sammlung der Station als ein Unicum von Größe aufbewahrt.

Die Arten der waffenlosen Nemertinen dokumentieren sich als solche meist durch Färbung und characteristische Zeichnung, Merkmale, die nur bei relativ wenig bewaffneten sich vorfinden. Es bedarf daher bei letzteren der eingehendsten und oft sehr langwieriger Untersuchungen, Art- ja selbst Gattungsmerkmale aufzufinden.

Aus der Zahl der bewaffneten Nemertinen hebe ich heute nur drei sehr dünne Nemertinen hervor, welche im Sande mit Lineus lacteus und Amphioxus zusammen leben. Sie besitzen Otolithen und Nemertinen mit diesen Organen ausgestattetet sind soviel ich weiß in Neapel überhaupt noch nicht und sonst nur vereinzelt aufgefunden worden.

Die Otolithen kommen nur paarig vor, jede Gehirnhälfte besitzt eine Otolithenblase von ovaler Form. In ihr liegt ein je nach der Art verschieden gestalteter Otolith. Ich fand solche in Hantelform (man muß das Verbindungsstück der Kugeln nur sehr verkürzt denken) und solche die eine Rosette bilden. In jeder Blase liegt nur ein Otolith. Claparède[1]) fand eine sehr kleine Nemertine Oerstedia pallida (Kef.) mit ein Paar Otolithenblasen deren jede drei Otolithen enthielt, die durch schwingende Wimpern in zitternde Bewegung versetzt wurden.

Die Otolithen der von mir beobachteten Nemertinen rührten sich nicht. Auch Wimpern vermochte ich in der Blase nicht zu konstatieren.

Ich bemerkte schon daß die Arten der unbewaffneten Nemertinen gut gekennzeichnet sind. Auch ihre Gattungen zeigen vielfach einen bestimmten auffälligen Habitus.

So sind alle Arten der Gattung Carinella durch den sehr

1) Beobachtungen über Anatomie und Entwickelungsgeschichte wirbelloser Thiere. Leipzig 1863.

breiten nach hinten durch die Furchen der Seitenorgane scharf abgesetzten discusartige Kopf kenntlich. Sie ähneln so den Angehörigen der Gattung Enpolia, aber alle Enpoliiden vermögen den Kopf völlig einzuziehen im Gegensatz zu den Carinelliden.

Von Kennel beschrieb letzterdings[1]) eine ziemlich transparente Nemertine, welche er früher in Neapel erhalten hatte unter dem Namen Balanocephalus pellucidus.

Sie soll den Kopf völlig einziehen können. Kennel sagt: „dass kein Vergleich so passend erscheint wie der mit der Glans-penis und dem sich darüberziehenden Praeputium“:

Es ist kein Zweifel, nach der guten Beschreibung, welche der Autor beifügte, diese Nemertine mit dem characteristischen Vorderende ist eine Eupolia. Sie ist dreimal während meines Aufenthaltes in Neapel zu Tage gefördert worden. — Der discusartig geformte retractile Kopf, die vielen Augen, die Furchen am Kopfe, das sehr kurze Rhynchocoelom mit dem entsprechend kurzen Rüssel: das alles sind Charactere einer Eupolia. Dass diese Nemertine ventrale seitliche Spalten besitzt, von derem hintersten Ende die Kanäle der Seitenorgane in die Tiefe ziehen, so beschreibt Kennel, wird uns nicht verleiten, sie vom Genus Eupolia abzutrennen. Im Gegenteil es sind auch diese ventralen wohl etwas flachen Spalten wie ich schon früher Gelegenheit hatte nachzuweisen, Eigentümlichkeiten vieler Eupoliiden. — Eupolia pellucida würde man sie nennen müssen; vielleicht ist sie auch identisch mit Eup. minor Hubr. Eine andere systematische berichtigende Bemerkung finde hier noch Platz.

Von Joubin[2]) ist unter anderen Nemertinen eine Carinella Aragoi nov. sp. beschrieben worden.

Es ist diese Carinella dieselbe, welche Mc. Intosh[3]) als Carinella annulata beschrieben und abgebildet hat. Aber letztere ist nicht ein Synonym von Valencinia ornata Quatrefages, wie Mc. Intosh angiebt. Nämlich Valencinia ornata zeichnen auf rothbrauner Grundfarbe drei dorsale und eine ventrale weisse Längslinie, die vom Kopf bis zum Schwanzende verlaufen. Die mittlere dorsale Längslinie führt aber bis zur äußersten Kopfspitze. Außerdem sind weiße Querringel vorhanden, deren vorderster um den Kopf geht. Derselbe schneidet ein vorderes rothbraunes Feld, ein Stirnfeld ab, daß von der dorsalen Mittellinie natürlich halbiert

1) Ueber einige Nemertinen. Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher Gesellschaft. Jahrg. 1890.

2) Recherches sur les Turbellariés des côtes de France. Némertes. Arch. d. Zoolog. exp. T. 8. 1890.

3) A. Monograph of the British Annelids. Part I. Nemerteans.

wird. Es folgen dann 3 Ringel in sehr weiten Abständen. Dann erst beginnt die Region in welcher die Ringel sehr nahe gerückt sind, sodaß etwa 10 Ringel auf jeden der beiden von den voraufgehenden durch die 3 Ringel begrenzten weiten Abstände kommen würden. Carinella annulata Mc. Intosh hat eine gelbrothe Grundfarbe. Wir vermissen die ventrale weiße Längslinie, die mittlere dorsale reicht nur bis an den Kopfringel hinan, sodaß das Stirnfeld ungeteilt bleibt. Die nachfolgenden Ouerringel rücken ganz allmählich von vorn nach hinten zu dichter zusammen, aber nicht so dicht wie bei Valencinia ornata die Ringel in der hinteren Körperregion.

Hubrecht[1]) führt sowohl Valencinia ornata Ouatrf. als auch Carinella annulata Mc. Int. als Syn. seiner Carinella annulata an.

Beide Carinellen sind in Neapel nicht selten. Ich möchte der Anciennität gemäß folgendermaßen nominieren.

Syn. Valencinia ornata Ouatrf.	Syn. Carinella annulata Mc. Int.
„ Carinella annulata Joub.	„ Carinella Aragoi Joub.
Carinella annulata (Montagu. Johnst.)	Carinella Mc. Intoshii (mihi).

Leicht kenntlich sind auch die Vertreter der Gattung Valencinia an dem pfriemenförmig zugespitzten Kopfende.

Unter die Gattung Cerebratulus faßt Hubrecht eine Anzahl von Arten zusammen, die Mc. Intosh in Cerebratulus, Mikrura und Lineus sondert.

Ich habe mich bereits überzeugt, daß sich mindestens in diese 3 Gattungen auch die Neapler Cerebratuliden Hubrechts verteilen.

Nämlich erstens im Schlamm ziemlich seicht wohnen breite kräftige Formen, die sich durch ihre raschen Bewegungen auszeichnen. Sie sind vorzügliche Schwimmer; mit schlängelnden aalartigen Bewegungen durchmessen sie das Bassin. Solche Thiere sieht man, wie mir Herr Conservator Lo Bianko versicherte, gelegentlich an der Oberfläche des Meeres sich rasch schwimmend fortbewegen. Ihr Kopf ist lanzettlich zugeschärft, der breite Körper ist platt und mit stark hervortretenden Seitenrändern versehen. Diese Thiere vermögen sich wohl wie eine Spirale aufzurollen, aber nicht zu Klumpen aufzuknäueln. Sie besitzen ausnahmelos ein weißliches Schwänzchen.

Zweitens, finden sich in größeren Tiefen, zwischen Corallineen wohnend, kleine im Verhältnis zur Länge dünne Formen mit spatelförmigem Kopf; sie sind weich und können sich zu Klumpen zu-

1) The Genera of European Nemerteans critically revised with description of several new species. Notes from the Leyden Museum N. 44.

sammenknäueln, aber sie vermögen sich nicht durch Schwimmbewegungen fortzubewegen. Die Ortsveränderung geschieht lediglich durch kriechen. Im Bassin können sie am Wasserspiegel durch Flimmerbewegung hingleiten. Auch sie besitzen ein Schwänzchen.

Drittens giebt es Formen, welche den letzt characterisierten im Habitus nahe stehen — aber sie besitzen kein Schwänzchen.

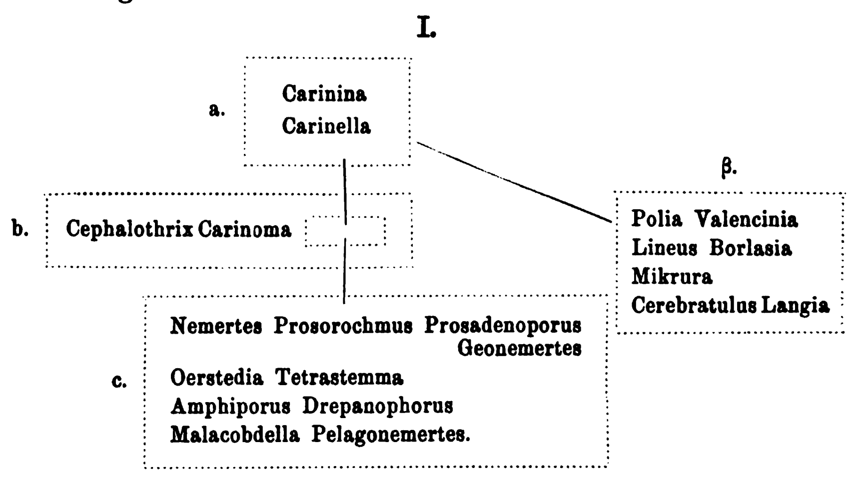
Die Vertreter der Gattung Langia, die von Hubrecht aufgestellt wurde, sind kenntlich an den nach oben aufgebogenen Seitenrändern. Sie stehen der ersten der eben skizzierten 3 Gruppen nahe. In Neapel ist nur eine Art bislang gefunden worden eine zweite wurde von Joubin[1]) beschrieben. Diese kommt an der französischen Küste vor.

Nicht minder characteristisch ist der Habitus der Gattung Borlasia. Ich war so glücklich eine zweite Art derselben zubekommen. —

Ein bis ins Einzelne ausgearbeitetes System der Nemertinen ist mir noch nicht zur Hand allein für die Anordnung der Hauptgruppen auf phylogenetischer Grundlage, deren Plan ich bereits früher angedeutet habe, sammelte ich weitere Erfahrungen, die in mir die Ueberzeugung, daß das Hubrechtsche System und mithin auch dasjenige von Max Schulze ein künstliches, befestigten.

Ich gebe ein Schema.

I.



a) Bei Carinina liegen die Seitenstämme epithelial, bei Carinella sind sie bis unter die Basalmembran gesunken, also liegen sie der Ringmuskulatur außen an.

1) L'Anatomie d'une Némerte d'Obock. Langia Obockiania. Archiv d. Zoolog. exp. 1887.

b) bei Cephalothrix und Carinoma haben sie auch die Ringmuskulatur durchbrochen und liegen bereits inmitten der Längsmuskulatur.

c) Bei Nemertes-Malacobdella (Hoplonemertinen Hubrechts) haben sie die Längsmuskulatur völlig durchbrochen und liegen innen von ihr im Leibesparenchym.

β) Bei Polia-Langia sind die Seitenstämme in der Lage wie sie sich uns bei Carinella darstellten, liegen geblieben, aber es hat sich zwischen Ringmuskulatur und Epithel eine Schicht von Drüsenzellen, Bindegewebe und Längsmuskeln gebildet. Somit liegen die Seitenstämme auch hier in der Tiefe.

Man beachte, von a nach b zu c sind die Seitenstämme gerückt, aber in die Lage wie sie bei β statt hat gerückt worden.

Anordnung der Gattungen in den Rechtecken c und β ist eine durchaus provisorische; ich stütze mich wesentlich auf die von Hubrecht gegebene (op. cit.). Ebenso bemerke ich ausdrücklich, daß ich weder Cephalothrix noch Carinoma für die Uebergangsformen von a zu c halte; ich fasse sie als Verwandte der wahren Zwischenform auf, die wir bisher nicht kennen. Das habe ich durch das leere Rechteck anzudeuten versucht.

Jedenfalls ist es meines Erachtens nicht möglich den Stammbaum anders zu construieren, nachdem wir Nemertinen mit der characteristischen Mittellage der Seitenstämme kennen lernten, deren eine, selbst wenn auch sie durch das Fehlen der Seitenorgane eine abweichende Form darstellt, so doch — ich habe Carinoma im Auge — durch den Bau der Körperwand, durch die Nephridien und das Blutgefäßsystem ferner durch die eigentümliche innere Ringmuskulatur sehr an Carinella erinnert; füge ich nun noch andrerseits hinzu, daß Carinoma Darmtaschen besitzt, die im hinteren Körperabschnitt ungemein tief sind, daß diese metamer angeordnet mit Genitaltaschen wechseln — so wird sich der Leser, wenn er die tiefe Lage der Seitenstämme bedenkt ein Querschnittsbild contruiren können, das sehr an das z. B. einer Nemertes erinnert.

In der eben gegebenen Darlegung der inneren Bauverhältnisse von Carinoma Armandi (Mc. Int. Oud.) bin ich in wesentlichen Punkten von derjenigen Oudemans[1]) abgewichen. Ich gedenke die meine bald zu rechtfertigen.

Indem ich die systematischen Betrachtungen schließe, ich weiß ich habe nichts weiter gegeben als einige Ideen zu einem Bauplane,

---

1) The circulatory and nephridial Apparatus of the Nemertea. Qu. Journ. of micr. Sc. Vol 25. N. S. 1885.

füge ich zunächst einige Beobachtungen über die Organisation der Nemertinen an, welche fast ausschließlich am lebenden Object gemacht wurden.

Bei sehr vielen bewaffneten Nemertinen so Amphiporus, Drepanophorus, Tetrastemma habe ich bemerkt wie sich an der Kopfspitze bald ein rundlicher Hügel vorwölbt, bald dieser wieder verschwindet; er ist mit borstenartigen Haaren besetzt, die bedeutend kürzer sind als die Wimpern des Körperepithels. Er ist ohne Frage ein vorstülpbarer Sinneshügel, ein Sinnesorgan, das über der Rüsselöffnung gelegen ist und zum Tasten dient. Aber an der nämlichen Stelle müßte ja die Mündung der Kopfdrüse sich befinden[1])! Gewiß. Wir entsinnen uns, daß die Kopfdrüsen in eine terminale flaschenförmige Grube einmünden, und ich zweifle nicht, daß es dieses Grübchen ist, das sich handschuhfingerartig aus- und einzustülpen vermag. Ich fand früher[2]) auch bei verschiedenen Cerebratuliden an Schnittpraeparaten am Kopfende 3 kleine Grübchen und bemerkte nunmehr auch am lebenden Nemertinen (z. B. Mikrura purpurea Mc. Int.) 3 kleine mit langen Haaren besetzte Hügel, die bald hervorragten bald eingezogen wurden[3]).

Lange als Tasthaare zu deutende einzeln stehende Borsten bemerkte ich außer in der Kopfregion, bei den Tetrastemmaarten vor allem, am Schwanzende. Aber vorne und hinten sind sie immer nur in sehr geringer Anzahl eingepflanzt.

Von neuem überzeugte ich mich von der Existenz der tiefen Gruben, welche in nächster Nähe der äußerlich auch mit der Lupe nicht sichtbaren Nephridialöffnungen gelegen sind, welche ich früher als ein zweites Paar von Seitenorganen bei Carinella polymorpha und annulata beschrieb. Diese eben sind auch mit unbewaffnetem Auge leicht erkennbar. Bei anderen Carinellaarten habe ich sie bisher nicht aufgefunden.

Ein eingehendes Studium widmete ich dem Nervensystem, angeregt durch die Ehrlichsche Färbmethode mittels Methylenblau. Die Ergebnisse dieser Experimente sind, kurz gefaßt, diese.

---

1) Bürger zu Anatomie und Histologie der Nemertinen nebst Beiträgen z. Systematik. Zeitschrift f. wiss. Zoolog. Bd. 50. 1890.

2) Bürger, Beiträge zur Kenntnis der Nemertinen. Nachricht. der Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. 1888. No. 17.

3) Hubrecht erwähnt von Meckelia Ehrenbergii (Diesing): „an der Rüsselöffnung fanden sich 3 kleine mit längeren Flimmern besetzte Papillen vor“. Untersuchungen über Nemertinen a. d. Golf von Neapel. Niederländ. Archiv für Zoologie. Bd. II. 1873.

Der Ganglienbelag des Gehirns und der Seitenstämme besteht nur aus unipolaren Zellen, deren jede einen Fortsatz in die Centralsubstanz (Punktsubstanz) sendet. Aber die Centralsubstanz, welche quantitativ mächtig entwickelt ist, besteht nur zur geringsten Masse aus nervösem Gewebe, es stellt vielmehr die Centralsubstanz des Gehirnes, Kugeln, die der Seitenstämme Cylinder aus einem feinverfilzten Bindegewebe gebildet dar. In der bindegewebigen Grundmasse der Centralsubstanz des Seitenstammes befindet sich nun bei vielen Nemertinen nur ein einziger sehr dünner mehr oder minder central gelegener Längsstrang, welcher aus nervösen Fibrillen besteht. Diese Fibrillen sind die Fortsätze der Ganglienzellen. Den Strang, zu welchem sie sich inmitten der bindegewebigen Centralsubstanz vereinigen, habe ich Centralstrang genannt. Einen zweiten Längsstrang finden wir dort, wo Neurochordzellen vorhanden sind, da deren Fortsätze sich nicht mit den Fortsätzen anderer Ganglienzellen mischen. Dem Centralstrang entspringen Fibrillen, die in oder an dem Hautmuskelschlauch abgehen. Mit andern Worten: aus dem Centralstrang gehen die Nervenfasern der „Spinalnerven“ ab, die ihre beträchtliche Dicke (man kann sie auch auf Schnitten gut constatieren) wiederum bindegewebigen Hüllen verdanken.

Es gelang mir nicht selten, eine Nervenfaser, die sich im Hautmuskelschlauch hinzog, zurück in dem Centralstrang und schließlich bis an die Ganglienzelle zu verfolgen.

Niemals sah ich aus dem Strang der Nenrochorde eine Nervenfaser entspringen. Dagegen gehen vom Seitenstamm feine und dickere Nervenfasern ab, denn es besteht auch sein Ganglienbelag aus kleinen und größeren Ganglienzellen. — Wie man zwei Arten von Ganglienzellen außer dem Neurochordzellen am Seitenstamm scharf unterscheiden kann, wird man auch zwei Arten von Nervenfasern immer constatiren müssen. Ich betone dies, da ich der Meinung bin, daß die dickeren Nervenfasern die motorischen, die dünneren die sensiblen darstellen. Beiderlei Fasern verfolgte ich bis zu Ganglienzellen zurück. Ich kann mithin nicht an die doppelte Ursprungsweise der Nervenfasern und den verschiedenartigen Ursprung der motorischen und sensiblen glauben. Die abgehenden Nervenfasern gehen sämmtlich unter ziemlich gleichem stumpfem Winkel in symmetrischer Weise ab, es kreuzen sich also eine große Anzahl von Nervenfasern, die Ganglienzellen entstammen, welche vorne im Thierkörper liegen mit solchen, welche mit Ganglienzellen verbunden sind, die wir hinten suchen müssen.

Es besitzen die Fibrillen des Centralstranges feinste Aestchen.

Nennen wir die Fibrillen Stammfortsätze der Ganglienzellen, so müssen wir sagen, der Stammfortsatz hat Nebenfortsätze und zwar nicht nur in seinem ersten Abschnitt, nicht nur unmittelbar nach seinem Eintritt in die Centralsubstanz, sondern vielleicht in seiner ganzen Länge, sicher wenigstens in einer sehr langen Strecke seines Verlaufes innerhalb der Centralsubstanz des Seitenstammes. Die Fibrillen des Centralstranges ebenso wie die Nervenfasern (wie wir jene Fibrillen ja nennen, nachdem sie sich aus dem Seitenstamm herausbegeben haben zur Innervation der Muskulatur u. s. f.) sind mit unzähligen Verdickungen besetzt, die ihnen ein perlschnurartiges Aussehen verleihen.

Eine merkwürdige Erscheinung sind bekanntlich die peripheren Nervenschichten, welche vor allem bei den Formen auftreten, deren Seitenstämme auf der Grenze zweier Schichten der Körperwand liegen. Also weder die Hoplonemertinen noch die Arten von Cephalothrix, noch Carinoma besitzen sie in typischer Ausbildung wie Hubrecht[1]) sie uns bei Carinella, Eupolia, Cerebratulus, Langia kennen lehrte. Durchaus nicht aufgeklärt ist auch die Bedeutung der medianen Nerven, die ich den kleinen und großen Rückennerven nannte.

Ich fand: die periphere Nervenschicht, deren reticulären Character ich früher schon betonte, besteht zum Wesentlichen aus demselben Bindegewebe wie die Centralsubstanz der Seitenstämme. In dieses sind die Nervenfasern, welche dem Seitenstamm entspringen, eingebettet.

Die Rückennerven haben *nicht* die Bedeutung von Nerven, welche Organe innervieren wie die Schlundnerven, die Augennerven u. s. f. Es steht nur der obere große Rückennerv (Carinella) in direkter Verbindung mit dem Gehirn durch die dorsale Commissur, der untere Rückennerv wird gebildet, indem Fasern des oberen die Ringmuskulatur durchdringen und unter dieser über dem Rhynchocoelom nach hinten ziehen. Aber fortgesetzt in sehr engen Abständen steigen immer wieder Fasern vom oberen Rückennerven zum unteren herab, diesen unablässig verstärkend.

Oberer und unterer Rückennerv bilden ein Strickleitersystem. Mit dem oberen Rückennerven treten die „Spinalnerven" in engste Beziehung. Sämmtliche Spinalnerven, die bei Carinella,

---

1) Hubrecht, The peripheral nervous System in Palaeo- and Schizonemert etc. Ou Journ. of micr. Sc. Vol. 20.

welche ich im Auge habe, ziemlich regellos vom Seitenstamm entspringen verflechten sich mit dem oberen Rückennerven und vermischen sich mit seinen stammeigenen Fasern, die, wie gesagt, teils der dorsalen Commissur entspringen, teils aber von einem sehr spärlichen eigenen Belag von unipolaren Ganglienzellen abstammen. Es ist nachzuweisen, daß mindestens ein Theil der „Spinalnervenfasern“ im Rückennerven fortzieht und sich auch nunmehr an der Bildung des kleinen Rückennerven beteiligt, aber es ist auch zweifellos, daß die Fasern der „Spinalnerven“ teilweise durch den großen Rückennerven hindurch dringen und mithin Nervenfasern, welche vom linken Seitenstamme kommen bis in die rechte Körperhälfte sich fortsetzen.

Der große Rückennerv ist also ein Längsstrang nervöser Fasern, die teilweise vom Gehirn herkommen, teilweise eigenen Ganglienzellen entspringen, vor allem aber von den Fasern der Nerven der Seitenstämme sich herleiten. Diese drei nach dem Ursprung verschiedenartigen Nervenfasern verflechten sich in ihm.

Ich möchte ein Analogon heranziehen und glaube ein solches bei den Wirbeltieren im Grenzstrang des Sympathicus zu finden.

Leider gelang es mir nicht, die Nervenfasern, welche ich einerseits wohl zu den zugehörigen Ganglienzellen verfolgen konnte, andererseits bis zu den Endigungen hinzuverfolgen, und zwar weder bis zu Zellelementen motorischer noch sensibler Art.

Darin war ich glücklicher bei der Untersuchung des Rüssels. Im bewaffneten Rüssel befindet sich eine wechselnde für die Art constante Anzahl von Nerven, deren jeder mit einem Ganglienbelag ausgestattet sind. Die Ganglienzellen liegen zwischen den im Rüssel parallel verlaufenden Längsnerven und zwar sind die einzig unipolaren Ganglienzellen fast ausnahmslos mit den aufgebauchten Enden aneinander gepreßt. Immer je ein Paar Ganglienzellen liegt zusammen. Wir haben Geschwisterzellen im Rüssel vor uns. Jede Zelle sendet ihren einzigen Fortsatz in einen anderen Nerven.

Auch der Rüsselnerv besteht quantitativ der Hauptsache nach aus verfilztem Bindegewebe. In jedem Nerven, wie ich diesen Strang auch in seiner Gesammtheit trotzdem nennen will, bilden die Ganglienzellfortsätze einen sehr feinen Centralstrang. Aus diesem gehen feine Fibrillen ab, Nervenfasern, welche den Muskelschlauch des Rüssels innervieren und deren Endigungen zwischen den Muskelzellen deutlich zu sehen sind, ferner entspringen dem Centralstrang zugweise auch jene Nervenfasern, von denen man

jede einzelne an eine Zelle der Papillen herantreten sieht. Doch nicht direkt; zwischen beiden, zwischen Nervenfibrille und Papillenzelle ist noch eine Zelle, eine Nervenzelle eingeschaltet.

Was bedeutet aber der Reichtum an Ganglienzellen, die ich (was die physiologische Bedeutung anbetrifft) in scharfem Gegensatz zu den Nervenzellen stelle, für den Rüssel? Nur durch den Besitz von Ganglienzellen, mit denen das Rüsselnervensystem in so hohem Maße ausgezeichnet ist, kann man es erklären, daß der Rüssel so wenig abhängig vom Centralnervensystem ist, so wenig, daß derselbe vom Körper getrennt nicht leblos erscheint, sondern fast alles leistet, was er leistete als er mit ihm noch eins war: Er stülpt sich ein und aus, er klebt sich vermöge seiner Papillenzellen fest und läßt sich wieder los, ja er kriecht; er zeigt mit einem Worte die bedeutendsten Lebenserscheinungen. Vermöchte er das, wenn nicht sein eigener nervöser Apparat ein dem centralen fast gleichwertiger wäre?

Am wichtigsten von vorn herein erschien mir die Aufgabe, die Art der Endigungen des Excretionsgefäßsystemes festzustellen.

Den Angaben Oudemans[1]), wonach die Canäle des Nephridialapparates in offner Verbindung mit den Blutgefäßen stehen sollen, vermochte ich nicht Zutrauen zu schenken.

An stark comprimirten dünnen Nemertinen wie Nemertes gracilis und einer noch unbeschriebenen durch den Besitz von 4 Augen ausgezeichneten sehr langen, ziemlich durchsichtigen Nemertine beobachtete ich zuerst Wimperflammen als letzte Enden der verzweigten Nephridialcanäle.

Die Nephridialcanäle sind bei diesen Formen sehr lang, sie sind vom Gehirn bis in die hintere Körperregion zu verfolgen, wo sie auch noch zwischen den Geschlechtsorganen entlang ziehen und auch die Wimperkölbchen überall erkannt werden können.

Das Excretionsgefäßsystem jener Nemertinenarten ist mithin ganz anders als das eines Amphiporus oder Drepanophorus, wo die Nephridialcanäle lediglich in der Oesophagalregion sich ausbreiten, oder richtiger jederseits mit ihren vielen Aesten ein Knäuel bilden, durch das die seitlichen Blutgefäße hindurchgehen. Aber auch ihre letzten Enden sind Wimperkölbchen, von denen sich unzählige in die Wand der seitlichen Blutgefäße einbohren.

Eine Beziehung zwischen Blutgefäßsystem und Nephridialapparat besteht mithin, aber sie ist ganz anderer Art wie die von

1) Op. cit.

Oudemans beschriebene: Es bohren sich die blindgeschlossenen Enden der Nephridialcanäle in die Wandung der Blutgefäße ein, nicht allein bei den Hoplonemertinen, von denen ich soeben einige Vertreter heranzog, sondern auch bei Carinella und Carinoma. Bei diesen ursprünglicheren Formen hat Oudemans derartige Enden, wie ich später beweisen werde, für offene gehalten, obwohl dieselben immer vom Endothel der Blutgefäße vollständig bekleidet sind.

Auf Grund meiner Nachuntersuchung darf ich es als höchstwahrscheinlich hinstellen, daß auch in dem blindgeschlossenen, in das Blutgefäß hineinragenden Enden der Excretionsgefäße von Carinoma Armandi Wimperflammen sich befinden. Solcher Enden finden sich bei Carinoma aber nur wenige, kaum in und an jedem Blutgefäß mehr als 10.

Das Excretionsgefäßsystem der Nemertinen weist auf das der Turbellarien hin.

Der histologische Bau freilich beider ist sehr verschieden. Die Excretionscanäle der Nemertinen haben eine zellige Auskleidung, deren einzelne Elemente hohe Cylinderzellen darstellen, die denen des Körperepithels sehr ähnlich sind. Doch trägt jede Zelle nur eine Wimper oder doch nur ein Paar Flimmern. Auch die Endkölbchen, in welchen der lange dicke Wimperschopf schwingt, besitzen ein aus sehr vielen kleinen, hier freilich etwas flachen Zellen sich zusammensetzendes Epithel.

Bei den Turbellarien aber ist das Zellmaterial, aus welchem die Excretionscanäle sich aufbauen, bekanntlich ein sehr spärliches, es sollen die Canäle z. B. bei den Polycladen nach Lang eine Durchbohrung von linearen Zellreihen darstellen. Das Endkölbchen besteht aus einer einzigen Zelle.

Auf große Schwierigkeiten stieß in Neapel die Beschaffung von Material zwecks entwicklungsgeschichtlicher Studien.

Obwohl ich ein halbes Jahr lang verschiedene Arten, teilweis sehr massenhaft, in Aquarien gehalten habe, welche Geschlechtsprodukte enthielten und Männchen und Weibchen vorhanden waren, war ich nicht so glücklich, je einmal Eier zu bekommen. Die Thiere, Lineus lacteus, Eupolia delineata und curta und Nemertes gracilis hielten sich Monate lang sehr gut, aber dann begannen viele Exemplare, besonders von Lineus lacteus, zu zerstückeln. Es gelang mir nicht, die Ursachen ihres Unterganges festzustellen.

Die Nemertinenarten, welche in größeren Tiefen leben, halten sich überhaupt nur wenige Tage mit Ausnahme einiger Amphiporusarten und Drepanophorus serraticollis, den ich außerordent-

lich lange im Aquarium am Leben erhalten konnte. Merkwürdiger Weise ganz im Gegensatz zu seinem nahen Verwandten Drepanophorus rubrostriatus, der die Gefangenschaft gar nicht erträgt. Auch mit den großen im Schlamm lebenden Cerebratulusarten habe ich unglücklich experimentirt. Indes war ich so glücklich, von draußen einmal ein Thier, Nemertes gracilis, zu bekommen, das sofort Eier ablegte, die sich ungemein schnell entwickelten. Die Furchung war eine totale aequale, und noch in der Eihülle entwickelte sich ein Embryo, der ein dichtes Wimperkleid besitzt, und an dessen einem Ende — er hat eine länglich ovale Form angenommen — zwei lange Geißeln schwingen. Es wurden zwei Richtungskörper, welche in diesem Entwicklungsstadium sich noch vorfanden, gebildet.

Der Embryo wächst, durchbricht die Eihülle und bewegt sich mit Hilfe seiner beiden Geißeln im Wasser umher. Seine weitere Entwicklung habe ich nicht beobachten können.

Deshalb war es mir eine außerordentlich erwünschte Hilfe, als mir Herr Professor Korotneff, Director der Zoologischen Station in Villa Franca, seine Unterstützung zusicherte, indem derselbe mir lebendes und conserviertes Material von Prosorochmus Claparèdii versprach und mir auch wiederholt Sendungen dieser lebendig gebärenden von Claparède an der Küste der Normandie entdeckten Nemertine zukommen ließ.

Besonders erfreulich war es aber, als ich diese Nemertine auch in Neapel zwischen dem Materiale, das die Fischer besorgen, mit Nemertes gracilis vergesellschaftet fand.

Herrn Professor Korotneff bin ich zu großem Danke verpflichtet, ich erlaube mir denselben an dieser Stelle auszusprechen.

Obwohl sich die Exemplare von Prosorochmus Claparèdii, welche von Villa Franca und aus dem Neapler Golf stammen, in Gestalt und Färbung gleichen, ist doch die Bewaffnung des Rüssels ein derartig verschiedene, daß man in Versuchung kommt, zwei Prosorochmusarten, zu unterscheiden, mindestens aber Varietäten als Pr. Claparedii (Nizza) und Pr. Claparedii (Napoli).

Nämlich die Prosorochmus-Individuen von Villa Franca zeigen in jeder Seitentasche des Rüssels 4 Nebenstilette. Das untere Ende derselben bildet einen glatten kugligen Knauf, diejenigen aber des Golfes besitzen stets nur je 2 Nebenstilette in jeder Tasche; aber der Knauf ist fünfteilig, er bildet eine Rosette. Dementsprechend ist natürlich auch der Knauf des Hauptstilettes gestaltet.

Ein Prosorochmus enthält oft alle Entwicklungsstadien. Während vorn noch Eier sich befinden, sieht man im hintersten Ende

des Thieres Embryonen, in welchen man bereits die Nebenstilette bemerkt. Aus Villa Franca bekam ich Thiere mit Embryonen im Mai und Anfang Juni, in Neapel im Juli.

Die Entwicklungsperiode wird auch wohl in Neapel früher fallen und schon lange begonnen haben, ehe ich die ersten Prosorochmen dort auffand, immerhin ist zu bedenken, daß sich dieses Jahr ein ausnahmslos ungünstiger Frühling in Neapel geltend gemacht hat, sodaß die heurigen klimatischen Verhältnisse an der Riviera vielleicht günstiger waren, als bei uns am soviel weiter südlich gelegenen Golfe Neapels. Jedenfalls wird man doch mindestens auf 5—6 Wochen rechnen können, während welcher man fortgesetzt trächtige Thiere erwarten darf.

Wo sind die Männchen von Prosorochmus? Ich habe sie bislang nicht gefunden.

Beim Weibchen sind die Genitaltaschen mit Eier prall gefüllt. Dieselben alterniren mit den Darmtaschen. Aber nur wenige, meist nur ein einziges Ei kommt von einem Haufen von Eiern zur Entwicklung. Das sich entwickelnde nährt sich von den anderen Eiern. Es bildet sich eine Hülle um das in die Embryonalentwicklung eintretende Ei und in dieser liegen anfangs zahlreich andere Eier eingeschlossen. Je mehr aber die Entwicklung fortschreitet, je kleiner werden die im Follikel eingeschlossenen Eier und schließlich, wenn sich ein Embryo entwickelt hat, an dem der Kopf sich schon formt, sind auch die letzten Eireste verschwunden.

Von der Entwicklung des Embryo will ich nichts vorweg nehmen, da ich die nach lebenden Entwicklungsstadien aufgezeichneten Befunde erst noch am conservierten Material, das mir reichlich zur Verfügung steht, prüfen und weiter verfolgen möchte.

Nur über die Entwicklung des Stilettapparates des Rüssels will ich gleich folgendes bemerken. Man ist sich nicht darüber einig, wo das Hauptstilett herkommt. Man behauptet, es werde aus den Seitenstiletttaschen bezogen und nennt dementsprechend die Stilette, welche in den seitlichen Taschen enthalten sind, Reservestilette, man behauptet aber dem entgegengesetzt auch, das Hauptstilett habe nichts mit den sog. Reservestiletten zu thun, das Hauptstilett entstehe nicht in deren Tasche, sondern an Ort und Stelle.

Die Beweise, welche Max Schultze[1]) für seine Ansicht bringen konnte, waren, wenn auch nicht völlig exacte, so doch sehr beachtenswerte. Er war der Meinung, das Hauptstilett stamme aus den Seitentaschen.

1) Max Schultze. Beiträge zur Naturgeschichte der Turbellarien. Greifswald 1851.

In dem sich entwickelnden Rüssel von Pr. Claparedii treten zuerst die Reservestilette auf und zwar sind sie, in jeder Tasche ein Paar, schon ziemlich fertig, wenn die Basis des Hauptstilettes erst im Entstehen begriffen ist. Diese wird geschaffen, indem sich ein Sekret, das einem Drüsenkranze entstammt, der sich in der Stilettregion sehr frühzeitig ausbildet und zeitlebens erhält, in eine Form ergießt, die von der inneren Muskulatur des Rüssels gebildet wird. Die Rüsselmuskulatur bildet nämlich eine trichterförmige Mulde und daher hat auch die Basis des Hauptstilettes anfangs in eine pyramidale Gestalt, welche sich erst später ändert und die Form eines (nicht mathematischen) Kegels annimmt.

Man kann die Bildung der Basis in allen Stadien verfolgen, man wird aber nichts von einer doch gleichzeitig notwendigen Bildung des Hauptstilettes an diesem Orte wahrnehmen, obwohl schon im Embryo die Basis ein Stilett erhält. Man macht nun stets die Beobachtung, daß, sobald die Basis bepflanzt ist, in einer der Seitentaschen 1 Stilett fehlt.

Wie die Stilette aus der Reservetasche zur Basis gelangen, ist mir nicht klar geworden. Ich habe sie nie auf halbem Wege gesehen, sondern ich constatierte nur stets das vollendete Factum.

Ich war aber so glücklich, einmal ein Stilett in der Basis eingeschlossen zu erblicken. Die Basis war in dem bereits ausgeschlüpften Thier aber auch bepflanzt und in der einen Seitentasche waren zwei, in der anderen nur ein Reservestilett enthalten. Das zeugte davon, daß die Basis erst kürzlich besetzt war, denn die Reservestilette bilden sich ungemein rasch, um die übliche Zahl in den Taschen wieder herzustellen. Es ist dies Bild nicht anders zu deuten, als daß das Reservestillett zu früh zur Basis, ehe sie vollendet war, gelangte und nunmehr verschüttet wurde. Man findet derartige Bilder auch in Mc. Intosh's Monographie gezeichnet. Ich deute sie nicht anders.

Um die Frage nach der Herkunft der Hauptstilette zu studieren, habe ich mehreren Exemplaren von Drepanophorus serraticollis die Rüssel exstirpiert. Dieselben wurden bald regeneriert. Und in jedem der neuen Rüssel legten sich am frühzeitigsten die Taschen der Reservestilette an, welche ja hier so ungemein zahlreich sind. Den 20 Hauptstiletten entsprechen 18 Taschen mit etwa 12 Reservestiletten. (Häufig stimmt sogar die Zahl der Hauptstilette mit derjenigen der Reservestilettaschen genau überein.) Viel später erst, nachdem sich eine größere Anzahl der Nebenstilettaschen gebildet hatte, begann die Basis zu entstehen, mit der jede Tasche durch einen Schlauch in Verbindung gesetzt ist. Nie sieht man

in oder an der Basis kleine Stilette, die Entstehungsherde sind die Seitentaschen. Wohl aber habe ich vereinzelt in den Schläuchen Stilette jedenfalls auf dem Wege zur Basis begriffen, constatiert.

Auch diese meine Beobachtungen stützen mit den Befunden Schultzes, die sie ergänzen können, nur den Satz: Die Hauptstilette kommen aus den Seitentaschen. Die Stilette der Seitentaschen sind Reservestilette und nicht Gebilde, die im Lauf der Stammesgeschichte der Nemertinen außer Funktion gesetzt sind und nunmehr, obwohl zwecklos geworden, als Ballast mitgeschleppt werden.

In wenigen Jahren hoffe ich die Neapler Repräsentanten der Nemertinen, dieser merkwürdigen Thiergruppe, von welcher Haller bei Gelegenheit seiner Studien über die Textur des Centralnervensystems höherer Würmer die Anneliden, Arthropoden, Mollusken und Vertebraten ableitet, den Fachgenossen in Wort und Bild vorführen zu können.

Göttingen, im November 1891.

Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome.

Von

Otto Wallach.

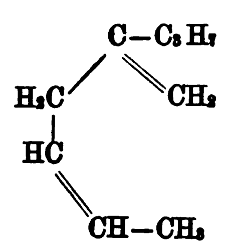
Die Eigenschaften der Kohlenwasserstoffe und ihrer Derivate sind bekanntlich in hohem Grade abhängig von der Art der Bindung der in ihnen enthaltenen Kohlenstoffatome. Bei den organischen Verbindungen mit kettenförmiger Anordnung der Atome sind die Eigenschaftsänderungen, welche mit dem Vorhandensein mehrfacher oder bloß einfacher Kohlenstoffbindungen Hand in Hand gehen, bereits sehr eingehend studirt. Dasselbe gilt für die Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Kohlenstoffbindung vom Typus des Benzol, Naphtalin u. s. w. Weniger gut sind diejenigen Substanzen bekannt, welche durch theilweise oder vollständige Hydrirung von Verbindungen des letztgenannten Typus entstehen. Neuere Arbeiten, vorzüglich von v. Baeyer und von Bamberger, haben unsere Kenntniß auch nach dieser Richtung zwar sehr erweitert, doch ist es bei dem großen theoretischen Interesse, welches die hier ins Spiel kommenden Verhältnisse bieten, er-

wünscht, die diesbezügliche Forschung auch nach neuen Richtungen hin auszudehnen.

Ich bin nun gelegentlich meiner Arbeiten über die Terpene, von denen einige unzweifelhaft als hydrirte, jedoch ungesättigte Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Atome angesprochen werden müssen, auch zu gesättigten, vollkommen hydrirten Kohlenwasserstoffen mit ringförmiger Bindung gelangt. Dieselben dürften z. Th. einem neuen Verbindungstypus angehören. Ueber diese Substanzen und den Weg zu ihrer Darstellung möchte ich mir erlauben kurz zu berichten.

Den Campher $C_{10}H_{16}O$ hat man in eigenthümlicher Weise zu Verbindungen mit geringerem Kohlenstoffgehalt abzubauen gelernt. Man stellt durch Umsetzung des Camphers mit Hydroxylamin das Campheroxim, $C_{10}H_{16}NOH$, dar. Es gelingt dann leicht aus dieser Verbindung 1 Mol Wasser abzuspalten. Der so resultirende Körper $C_{10}H_{15}N$ verhält sich wie ein Säurenitril, also wie $C_9H_{15}.CN$. Durch Kochen mit Alkali kann man aus ihm das dem Campheroxim isomere Amid $C_9H_{15}.CONH_2$ und dann die Campholensäure $C_9H_{15}.COOH$ erhalten. Die Campholensäure ihrerseits verliert unter geeigneten Bedingungen Kohlensäure und verwandelt sich in das Campholen, C_9H_{16}.

Für das Campholen, dessen Siedepunkt von Goldschmidt (Ber. d. chem. Ges. XX, 484) zu 130° – 140° angegeben wird, hat Bamberger (l. c. XXI, 1131) die Formel aufgestellt:



Danach wäre also das Campholen ein Fettkohlenwasserstoff mit zwei Aethylenbindungen. Diese Annahme hat die andere zur Voraussetzung, daß bei dem Uebergang von Campheroxim in sein Anhydrid eine Sprengung des im Campher anzunehmenden Kohlenstoffringes eintritt. Bamberger denkt sich den Vorgang in folgender Weise:

```
   H   C3H7                              C3H7
    \ /                                   |
     C                                    C
    / \                                  / \\
H2C     CH2                          H2C     CH2
 |       |              = H2O +       |
HC       C = NOH                     HC       CN
  \\    /                              \\    /
     C                                    C
     |                                    |
    CH3                                  CH3
Campheroxim                            Nitril
```

Die sehr merkwürdige Reaction kann indeß, meiner Ansicht nach, auch ganz anders aufgefaßt werden. Es ist allerdings wahrscheinlich, daß bei dem Uebergang des Campheroxims in das Nitril der durch sechs Kohlenstoffatome gebildete Ring sich vorübergehend öffnet. Aber in demselben Augenblick könnte [unter Eintritt einer Bindungsverschiebung, falls man die Bredt'sche Campherformel der Betrachtung zu Grunde legt] eine erneute Ringschließung zwischen fünf Kohlenstoffatomen sich vollziehen. Es würde dann der Nitril-artigen Verbindung etwa die Formel zukommen:

```
        C3H7
         |
         C
        / \\
    H2C     CH
     |       |
    H2C      |
       \    /
         C — CN
         |
        CH3
```

Auch an das Vorhandensein eines Rings von vier Kohlenstoffatomen könnte man denken, doch soll das eben außer Betracht bleiben.

Sonach ergeben sich zwei ganz verschiedene Auffassungen bezüglich der Natur der Campholensäure und des Campholens. Nach Bamberger würde der Kohlenwasserstoff zwei Aethylenbindungen enthalten, der ihm zugehörige gesättigte Kohlenwasserstoff hätte die Formel C_9H_{20} und wäre nichts anderes als ein

Nonylwasserstoff. Meiner Ansicht nach enthielte indeß das Campholen nur eine Aethylenbindung, sein Hydrirungsproduct hätte die Formel C_9H_{18} und ihm zu Grunde würde ein Kohlenwasserstoff von eigenthümlichem Typus mit ringförmiger Bindung von fünf (oder auch von vier) Kohlenstoffatomen liegen.

Es ist mir nun in sehr einfacher Weise gelungen durch einen Versuch die Richtigkeit der letztentwickelten Ansicht wahrscheinlich zu machen.

Freie Campholensäure wurde in Portionen von je 5 Gr mit 6 Gr Jodwasserstoffsäure vom spec. Gew. 1,96 8 Stunden auf 200° erhitzt. Das entstandene Product wurde dann mit Wasserdampf abdestillirt, mit Natronlauge gewaschen, mit festem Kali getrocknet und fractionirt. Die Hauptmenge des erhaltenen flüssigen Kohlenwasserstoffs ging zwischen 135°—140° über. Analysirt wurde eine Mittelfraction vom Siedepunkt 134°—136°.

0.1005 Gr Substanz gaben

$$0.3150\ CO_2 = 85.48\%\ C$$
$$0.1302\ H_2O = 14.40\ „\ H$$

	Berechnet für					Gefunden
	C_9H_{20}	$C_{10}H_{22}$	C_9H_{18}	$C_{10}H_{20}$		
C	84.34	84.47	85.68	85.72	. . .	85.48
H	15.66	15.53	14.32	14.28	. . .	14.40

Die Dampfdichtebestimmung ergab:

0.0512 Gr lieferten 9.8 ccm V bei 17° und 751mm B.

	Berechnet für				Gefunden
	C_9H_{20}	$C_{10}H_{22}$	C_9H_{18}	$C_{10}H_{20}$	
D =	4.43	4.91	4.36	4.84	2 4.45

Die analytisch gefundenen Daten schließen demnach für den Kohlenwasserstoff die Formeln C_9H_{20} und $C_{10}H_{22}$ aus, nach den Dampfdichtebestimmungen wäre weiter die Formel C_9H_{18} wahrscheinlicher als $C_{10}H_{20}$. Für die Formel C_9H_{18} spricht auch der niedrige Siedepunkt der Verbindung (c. 135°) und das specif. Gewicht, das bei 20° = 0.773 ermittelt wurde.

Der Brechungsexponent für Natriumlicht wurde gefunden

$$n_D = 1.42491$$

Setzt man nun in die bekannte Lorenz'sche Formel

$$\frac{(n^2-1)p}{(n^2+2)d}$$

den eben angegebenen Werth von n_D ein, einmal aber $p = 126$ (C_9H_{18}), das andere Mal $p = 140$ ($C_{10}H_{20}$), so ergiebt sich als Molecularrefraction (M)

$$\text{für } C_9H_{18} : M = 41.66$$

$$\text{für } C_{10}H_{20} : M = 46.29$$

Es würde aber verlangen:

ein gesättigter Kohlenwasserstoff $\begin{cases} C_9H_{18} : M = 41.43 \\ C_{10}H_{20} : M = 46.03 \end{cases}$

ein ungesättigter Kohlenwasserstoff $\begin{cases} C_9H_{18}F : M = 43.13 \\ C_{10}H_{20}F : M = 47.74 \end{cases}$

Der gefundene Werth zeigt demnach an, daß eine gesättigte Verbindung vorliegt, die Bestimmung des Refractionswerthes giebt aber ebensowenig wie die Analyse sichere Auskunft darüber, ob der vorliegende Kohlenwasserstoff die Formel C_9H_{18} oder $C_{10}H_{20}$ besitzt.

Die wichtige Thatsache, daß man es jedenfalls mit einer völlig gesättigten Verbindung zu thun hat, wird durch das chemische Verhalten des Kohlenwasserstoffs ganz außer Zweifel gestellt. Er ist nicht im Stande Brom zu entfärben, dagegen entwickelt er in Berührung mit dem Halogen alsbald sehr lebhaft Bromwasserstoffgas und es entsteht ein Substitutionsproduct.

Diese Thatsachen genügen nun, um die Unrichtigkeit der von Bamberger für das Campholen und die Campholensäure entwickelten Formeln zu erweisen. Aus Verbindungen, denen jene Formeln zukommen, könnten als gesättigte Reductionsproducte nur Kohlenwasserstoffe der Formel C_9H_{20} oder $C_{10}H_{22}$ entstehen. Ist hingegen im Campholen und in der Campholensäure eine ringförmige Schließung von Kohlenstoffatomen — etwa in der oben von mir angegebenen Weise — enthalten, so muß bei der Reduction der Campholensäure, ganz der gemachten Beobachtung entsprechend, ein Kohlenwasserstoff C_9H_{18} oder $C_{10}H_{20}$ sich bilden. Das letztere wird der Fall sein, wenn die Carboxyl-Gruppe der Säure bei der Reduction in eine Methylgruppe CH_3 übergeht, das erstere, wenn die Säure bei der hohen während der Reduction herrschenden Temperatur gleichzeitig Kohlensäure abspaltet.

Ob also dem neuen Kohlenwasserstoff die Formel eines Bihydrocampholens, C_9H_{18}, oder eines Bihydromethylcampholens, $C_{10}H_{20}$, zukommt, ist für die theoretische Frage, die hier entschieden werden sollte, ganz gleichgültig. Jedenfalls liegt eben ein neuer gesättigter Kohlenwasserstoff mit ringförmiger Bindung vor,

dessen weiteres Studium großes Interesse beanspruchen und auch Rückschlüsse auf die Constitution des Camphers erlauben dürfte.

Die eben beschriebenen Versuche sind im Gefolge von Erfahrungen angestellt worden, welche ich gelegentlich anderer Untersuchungen gesammelt hatte.

Vor einiger Zeit habe ich den Nachweis geliefert, daß eine im Fenchelöl vorkommende Verbindung $C_{10}H_{16}O$, das Fenchon, mit Campher isomer und auch in Hinsicht auf fast alle ihre Reactionen jener Verbindung unmittelbar an die Seite zu stellen ist. Auch aus dem Fenchon läßt sich leicht ein Oxim $C_{10}H_{16}NOH$ und aus diesem eine Nitril-artige Verbindung, $C_9H_{15}CN$, gewinnen. Letztere verseift sich sehr viel schwerer als die entsprechende Campherverbindung. Es entsteht daraus bei mehrtägigem Erwärmen mit alkoholischem Kali nur wenig Säure und ganz überwiegend das s. g. α-Isoxim $C_9H_{15}CONH_2$, dessen Schmelzpunkt bei 114° liegt. Nach einer neuerlich gemachten Beobachtung verwandelt sich diese Substanz beim Ermärmen mit verdünnter Schwefelsäure in eine isomere, schön krystallisirende, erst bei 137° schmelzende Verbindung, welche als β-Isoxim bezeichnet werden soll. Auch durch andere Säuren als Schwefelsäure kann man das α-Ixosim in das β-Ixosim umwandeln. Das β-Isoxim krystallisirt besonders gut aus Alkohol, ist aber auch in Wasser verhältnißmäßig löslich. Er hat einen ausgeprägt basischen Character. Leitet man in seine ätherische Lösung Salzsäuregas, so fällt ein Chlorhydrat aus, welches mit Platinchlorid ein Doppelsalz scheint geben zu können. Beim Kochen mit alkoholischem Kali oder mit Säuren wird das β-Ixosim nicht leichter angegriffen als das α-Isoxim. Erwärmt man es aber mit Phosphorsäure-Anhydrid, so wird Wasser abgespalten und es entsteht ein Oel von den Eigenschaften des aus dem α-Oxim unter dem Einfluß selbst verdünnter wäßriger Säuren sich so leicht bildenden nitrilartigen Körpers.

Von Wichtigkeit war es zu wissen, ob bei dem Uebergang von Fenchon in das α- und β-Isoxim sich vielleicht eine ganz durchgreifende Aenderung der Atomconfiguration im Molecül vollzogen habe. Um darüber Aufschluß zu erhalten, wurde das β-Isoxim in schwefelsaurer Lösung mit Kaliumpermanganat oxydirt. Als Oxydationsproduct wurde eine reichliche Menge Dimethylmalonsäure gewonnen, also dieselbe Säure, welche nach früheren Versuchen auch bei der Oxydation des Fenchon selbst entsteht.

Die bezüglich der Umwandlungsfähigkeit des α-Fenchon-Isoxims in die β-Verbindung gemachten Erfahrungen haben beiläufig

Veranlassung gegeben, auch das Iso-Campheroxim nach dieser Richtung zu untersuchen. Beim Kochen der letztgenannten Verbindung mit verdünnter Schwefelsäure wurden bisher aber nur ölförmige Producte erhalten.

Wenn es, wie erst bemerkt, auch Schwierigkeiten bietet, das aus dem α-Oxim des Fenchons entstehende Anhydrid $C_9H_{15}CN$ zu verseifen, so gelingt doch immerhin bei tagelangem Kochen mit alkoholischem Kali eine theilweise Ueberführung in die Fencholensäure $C_9H_{15}COOH$. Der Versuch, aus dieser durch Kohlensäure-Abspaltung glatt das Fencholen C_9H_{16} darzustellen, hat bisher nicht ganz den gewünschten Erfolg gehabt, da ein Gemenge zwischen weiten Grenzen siedender Kohlenwasserstoffe erhalten wurde. Hingegen ließ sich sehr scharf der Nachweis führen, daß die Fencholensäure eine ungesättigte Säure ist. Sie addirt nämlich Halogenwasserstoffsäure und geht dabei in krystallisirte Producte über. Die Hydrochlorfencholensäure, $C_{10}H_{16}Cl\,CO_2H$, schmilzt bei 97°—98°, giebt in Berührung mit Alkali aber leicht wieder Salzsäure ab, unter Rückbildung der flüssigen Fencholensäure.

Beim Erhitzen mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor wird die Fencholensäure, ebenso wie die Campholensäure, leicht reducirt und in einen Kohlenwasserstoff übergeführt, dessen Hauptmenge zwischen 138°—145° siedete. Zur näheren Untersuchung gelangte eine zwischen 141°—142° siedende Fraction, deren Analyse folgende Werthe ergab:

0.1335 Gr gaben	0.4191 CO_2	=	85.62 %	C
	0.1726 H_2O	=	14.40 „	H
0.1395 „ „	0.4368 CO_2	=	85.40 „	C
	0.1788 H_2O	=	14.28 „	H
0.1368 „ „	0.4284 CO_2	=	85.41 „	C.

Bei einer Dampfdichtebestimmung lieferten

0.048 Gr Substanz 9.4 ccm V bei 18° und 748^{mm} B,

woraus sich ergiebt

$$D = 4.38.$$

Das specif. Gewicht des flüssigen Kohlenwasserstoffs wurde bei 20° = 0.7900 gefunden, als Brechungsexponent

$$n_D = 1.43146.$$

Die analytischen Werthe zeigen eine große Uebereinstimmung mit denjenigen, welche für das Reductionsproduct aus Campholensäure ermittelt wurden. Auch die Siedepunkte der aus den ana-

logen Säuren gewonnenen Kohlenwasserstoffe stimmen überein. Nur das specifische Gewicht der Verbindung der Fenchonreihe liegt etwas höher. Daß die Ursache dafür in zufälligen Verunreinigungen gesucht werden müßte, ist nicht wahrscheinlich. Eher wäre wohl anzunehmen, daß hier ein Gemenge eines Kohlenwasserstoffs C_9H_{18} mit dem höheren Homologen $C_{10}H_{20}$ vorliegt, da, wie erst auseinander gesetzt wurde, beide Kohlenwasserstoffe aus der Säure $C_9H_{15}CO_2H$ sich bilden können. Die Entscheidung dieser Frage muß zukünftigen Untersuchungen überlassen bleiben. Für den Augenblick ist noch der Versuch angestellt worden, ob man nicht, direct von dem Nitril $C_9H_{15}CN$ ausgehend, ebensogut zu dem Kohlenwasserstoff gelangen könne, als wenn man erst das Nitril in die schwerer zugängliche Säure überführt. Zu dem Zweck wurde die durch Wasserabspaltung aus dem Fenchonoxim gewonnene Verbindung mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor erhitzt. Aus dem Reactionsproduct konnte leicht ein Kohlenwasserstoff isolirt werden, der dem erst beschriebenen, aus Fencholensäure erhaltenen, sehr ähnelt. Die Hauptmenge siedete von 135°—145°. Von Einzelfractionen zeigte die von 136°—138° siedende ein specif. Gewicht = 0.775 bei 18°, die vom Siedepunkt 140°—142° ein specif. Gewicht = 0.7785 bei 19°. Auch hier könnte also ein Gemenge von Kohlenwasserstoffen vorliegen, falls die Schwankungen im specif. Gewicht nicht einer Verunreinigung durch Jod-haltige Verbindungen zuzuschreiben sind.

Ob das aus der Fencholensäure durch Reduction dargestellte Product die Formel $C_{10}H_{20}$ oder C_9H_{18} besitzt, ist noch nicht sicher zu entscheiden gewesen. Man mußte aber einen gesättigten Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{20}$ aus dem Fenchon jedenfalls auch in anderer Weise herstellen können, durch Reduction nämlich des Fenchylalkohols oder des Fenchons selbst. Die entsprechenden Versuche hat nun auf meine Veranlassung Hr. Wicke angestellt. Sie sollen hier nicht eingehender beschrieben und nur erwähnt werden, daß der aus dem Fenchylalkohol $C_{10}H_{17}OH$, durch Reduction sehr leicht entstehende gesättigte Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{20}$ folgende Eigenschaften hat:

Siedepunkt = 160°—465°, specif. Gewicht = 0,7945 bei 22°,
Brechungsexponent n_D = 1.43701 bei 22°.

Der Siedepunkt dieses Kohlenwasserstoffs liegt also um etwa 25° höher als die Siedepunkte der aus der Fencholensäure und Campholensäure gewonnenen Verbindungen. Entsprechend höher ist auch das specifische Gewicht. Man hat es demnach unzweifelhaft mit ganz verschiedenartigen Producten zu thun. Bei directer Reduc-

tion des Fenchons entsteht ein Kohlenwasserstoff, der dieselben physikalischen Eigenschaften besitzt, wie der zuletzt beschriebene.

Auf einen noch anderen Wege, den ich in Gemeinschaft mit Herrn A. Berkenheim aus Moskau eingeschlagen habe, ist es gelungen zu einem weiteren isomeren gesättigten Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{20}$ zu gelangen.

Pinenhydrochlorid, $C_{10}H_{17}Cl$, wurde mit Jodwasserstoff und Phosphor auf 200° erhitzt, das Reactionsproduct durch Destillation mit Wasserdampf, Waschen mit Alkali und Trocknen mit metallischem Natrium gereinigt und dann sorgfältig fractionirt. Die Hauptmenge siedete von 162°—163°. Von einem genau bei 162° übergehenden Antheil wurden Analysen ausgeführt und die physikalischen Constanten bestimmt.

0.1334 Gr Substanz lieferten	0.11397 CO_2	= 85.46 % C
	0.1740 H_2O	= 14.46 „ H
0.2784 „ „ „	0.8579 CO_2	= 85.77 „ C
	0.3584 H_2O	= 14.30 „ H.

Für $C_{10}H_{20}$ berechnet sich C = 85.72 %, H = 14.28 %.

0.0547 Gr lieferten bei der Dichtebestimmung 9,6 ccm V, bei 17°,2 und 751mm B. D = 4.86, berechnet = 4,83.

Das specifische Gewicht ergab sich zu 0,795 bei 20°, der Brechungsexponent n_D = 1.43703 bei 20°; berechnet M = 46,03, gefunden = 46.13.

Die physicalischen Eigenschaften stimmen demnach für die beiden aus dem Fenchon und aus dem Pinen erhaltenen Kohlenwasserstoffe $C_{10}H_{20}$ sehr nahe überein und beide weichen, namentlich in den Siedepunkten, erheblich von den aus Fencholensäure und Campholensäure erhaltenen ab.

Alle neu beschriebenen Kohlenwasserstoffe sind gesättigt und müssen daher ihrer Zusammensetzung gemäß eine ringförmige Verknüpfung von Kohlenstoffatomen enthalten. Sie sind selbst in der Wärme durch Kaliumpermanganat ganz ungemein schwer oxydirbar. Brom wirkt substituirend. Rauchende Salpetersäure ist in der Kälte ohne Wirkung, erst beim Erhitzen erfolgt lebhafte Reaction.

Eine nähere Erforschung des chemischen Verhaltens der hier vorliegenden neuen Verbindungen wird den Gegenstand weiterer Arbeiten bilden.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Archivum Rákóczianum. Sectio I. Tom. X. Ebd. 1889.
Ováry Lipót: A történelmi bizottságának oklevél-másolatai. (Abschriften der Urkunden der historischen Commission d. Ungar. Akad.). Füz. I. Ebd. 1890.
Archaeologiai Ertesitö. (Archäolog. Anzeiger. Neue Folge). IX. Köt. 3.—5. Szám. X. Köt. 1. 2. Szám. Ebd. 1889. 90.
Természettudományi Értekezések. (Naturwissenschaftl. Abhandlungen). XVIII. Köt. 6. 7. Szám. XIX. Köt. 1.—10. Szám. Ebd. 1889. 90.
Mathematikai Értekezések. (Mathematische Abhandlungen). XIV. Köt. 2. 3. Szám. Ebd. 1889.
Mathematikai és természettudományi Értesitö. (Mathematischer und naturwissenschaftl. Anzeiger). VII. Köt. 4/5. 6/7. 8/9. Szám. VIII. Köt. 1. 2. 3/4/5. Szám. Ebd. 1889. 90.
Mathematikai és természettudományi Közlemények. (Mathematische und naturwissenschaftl. Mittheilungen). XXIII. Köt. 4. Szám. Ebd. 1889.
A magyar. Tud. Akadémia kiadásában megjelent munkák és folyóiratok betürendes czim- és tartalomjegyzéke. 1830—1889. (Alphabetische Zusammenstellung der Werke, welche im Verlage der Ungar. Akad. der Wissenschaften erschienen sind. 1830—1889). Ebd. 1890.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. VII. Bd. Berlin u. Budapest 1890.
Λογοδοσία τῶν κατὰ τὸ κδ' ἔτος γενομένων (1888—1889) *ὑπὸ Σ. Μπαλανοῦ. Ἐν Ἀθήναις* 1890.

November 1890.

Sitzungsberichte der Kön. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XLI. XLII u. XLIII. 1890.
Sitzungsberichte der philos.-philol.- u. historischen Classe d. k. B. Akademie d. Wissensch. zu München. 1890. Bd. II. Heft II.
Berichte über die Verhandlungen d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig. Philologisch historische Classe. 1890. I. Leipzig. 1890.
Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1888. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. Bericht über die Thätigkeit im K. sächsischen meteorol. Institut f. d. J. 1888. II. Hälfte oder Abth. III des Jahrbuches des Königl. sächs. meteorolog. Inst. VI. Jahrg. 1888. Chemnitz 1890.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. 63. Band. (5. Folge 1. Band). 4/5 Heft. Halle-Saale 1890.
Mitteilungen der Pollichia. XLVII. Jahresbericht 1888. Nr. 1/2. XLVIII. Jahresber. 1889/90. Nr. 3. 4. Dürkheim a/H.
Leopoldina. Heft XXVI. Nr. 19—20. Oktober 1890. Halle a/S.
Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. 15. u. 16. Jahrg. 1888/1889 u. 1890. (Bis Febr.). Leipzig 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

23. December. № 10. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. December.

Riecke spricht zum Gedächtniß von Wilhelm Weber.

Wieseler kündigt einen Aufsatz „über Stierdienst" an.

Voigt legt a. einen Aufsatz von den Herrn Prof. W. Nernst und Herrn Privatdocenten Dr. P. Drude vor: „über die Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen".

b. einen Aufsatz von Herrn Dr. A. Sella in Rom „Beitrag zur Kenntniß der specifischen Wärme der Mineralien".

Klein legt vor a. eine Mittheilung von Herrn Prof. Dr. G. Frobenius in Zürich, Korrespondenten der Math. Klasse: „über Potentialfunctionen, deren Hessesche Determinante verschwindet".

b. einen Aufsatz von Herrn Privatdocenten Dr. Schönflies: „Bemerkung zu Hilberts Theorie der algebraischen Formen".

Bericht des Beständigen Sekretärs über das J. 1891.

Beitrag zur Kenntniß der specifischen Wärme der Mineralien.

Von

Alfonso Sella in Rom.

Einleitung. — Nur gering ist die Zahl der physikalischen Eigenschaften der Mineralien, welche mit unseren jetzigen Beobachtungsmitteln genauen Messungen unterworfen werden können. Obwohl nun die Bestimmung der specifischen Wärme für die meisten Mineralien durchführbar ist, liegen doch noch verhältniß-

mäßig wenige Beobachtungen darüber vor und die bezüglichen Data werden in der Mehrzahl der Lehrbücher der Mineralogie nicht einmal angegeben; so geringes Interesse wurde daran geknüpft.

Die erste und größte Schwierigkeit, welche bei der Bestimmung der spec. Wärme sich darbietet, liegt in der Beschaffung eines reinen Materials. Dabei stellen sich als bedenklich heraus nicht bloß die mikroskopischen Einschlüsse, welche nicht zu entfernen sind und doch niemals fehlen, sondern auch die makroskopischen, deren Nichtvorhandensein in opaken Mineralien schwer festzustellen ist, da das Untersuchungsmaterial in nicht zu kleinen Stücken angewandt werden muß, damit nicht andrerseits wegen der Beobachtungsmethode neue Fehlerquellen eintreten, welche das Resultat noch mehr beeinflussen könnten. Bei den vielen Mineralclassen, bei welchen Isomorphismus auftritt, wäre ferner eine directe chemische Analyse des untersuchten Materiales sehr erwünscht. Die chemische Zusammensetzung nämlich ist zweifellos in erster Linie bestimmend für die specifische Wärme, da die über die Aenderung der letzteren mit der physikalischen Beschaffenheit der Mineralien angestellten Untersuchungen diese Aenderung als ziemlich gering erweisen. Ich will hierfür nur die bekannten Beispiele von Pyrit und Strahlkies, Kalkspath und Aragonit, Rutil und Brookit[1]) anführen.

Die subtilen Speculationen von Joly (On the specific heat of Minerals. Proc. Royal Soc. Vol. XLI, 1886) über einige Variationen der spec. Wärme bei chemisch und krystallographisch durchaus identischen Mineralien beziehen sich auf zu wenige Fälle, als daß ihnen eine allgemeine Bedeutung beigelegt werden könnte; außerdem würde es schwer zu erklären sein, wie in Körpern, die in den übrigen chemischen und physikalischen Eigenschaften übereinstimmen, die Molekeln eine verschiedene „thermische Freiheit“ (nach der Joly'schen Ausdrucksweise) besitzen könnten.

Großes Interesse würde die Bestimmung der specifischen Wärme bei verschiedenen Temperaturen darbieten; die sehr bedeutenden Aenderungen, welche in dieser Hinsicht für die Elemente Kohlenstoff, Bor, Silicium und Beryllium gefunden worden sind, führen uns zur Vermuthung, daß etwas ähnliches auch bei zusammengesetzten Körpern stattfinden könnte. Vielleicht mag dadurch ein Theil der Abweichungen der von verschiedenen Be-

1) Ich habe mich durch besondere Bestimmung überzeugt, daß Anatas (gelbe Krystalle vom Binnenthal) denselben Werth wie die beiden anderen Modificationen von TiO_2 liefert.

obachtern angegebenen Werthe zu erklären sein. Jedenfalls ist es zu bedauern, daß so wenige Untersuchungen in dieser Richtung vorliegen.

Ich habe im physikalischen Institut zu Göttingen während des Winters 1889/90 die specifische Wärme einer Reihe von Mineralien aus der Classe der Sulfide bestimmt und werde die erhaltenen Werthe vom Gesichtspunkt des Woestyn'schen Gesetzes discutiren. Leider hat die Bestimmung der spec. Wärme als Unterscheidungsmerkmal für die hier in Betracht kommenden Mineralien einen geringen Werth, da die Differenzen zwischen den den verschiedenen Mineralien zukommenden Werthen oft so gering sind, daß sie bei einer approximativen Bestimmung nicht zu Tage treten, und andererseits eine Bestimmung von der erforderlichen Genauigkeit umständliche Vorarbeiten verlangt. —

Beschreibung der Beobachtungsmethode.

Die Bestimmungen wurden nach der Mischungsmethode ausgeführt; ich werde hier über den Apparat und die Beobachtungsmethode nur dasjenige berichten, was mir als neu einiges Interesse zu haben scheint.

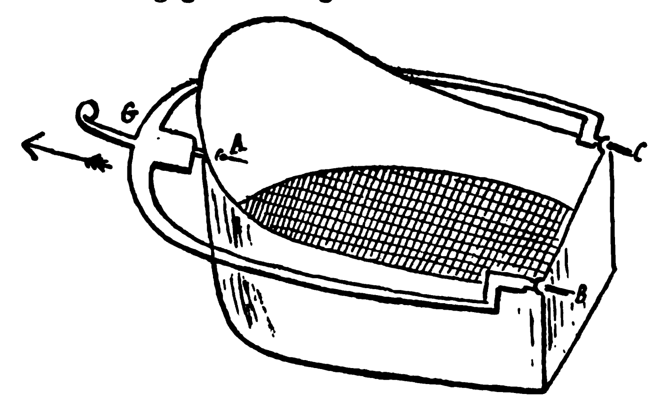
Der angewandte Erhitzungs-Apparat ist im Wesentlichen mit dem „Neumann'schen Hahn" identisch, von welchem er sich insofern unterscheidet, daß statt des inneren Kegels der äußere Mantel beweglich ist. Der Raum, in welchen der zu erwärmende Körper hineingebracht wird, ist von einem verticalen Cylinder[1]) begrenzt, welcher den inneren Kegel durchbricht. Die Einfüllung der zu untersuchenden Stücke geschieht dadurch leichter als bei der alten Einrichtung: man braucht dazu nur den äußeren Mantel so weit zu drehen, bis seine Oeffnung auf die obere Oeffnung des verticalen Cylinders zu liegen kommt. Die untere Oeffnung des Cylinders ist mit einer Klappe versehen, welche den Körper vor dem Fett schützen soll, mit welchem man die zwei Kegelflächen schmieren muß, damit sie dampfdicht auf einander gleiten.

Es wurde ferner versucht, eine Fehlerquelle zu eliminiren, welche in der That ziemlich bedeutend erscheint. Wenn nämlich auch die Fallhöhe des Körpers bis ins Calorimeter gering ist, ist es doch nicht gänzlich zu vermeiden, daß der fallende Körper ein Ausspritzen des Wassers bewirkt. Nun können die herausfallen-

1) Es wäre zu empfehlen, statt eines Cylinders einen nach unten sich verbreitenden Kegel zu gebrauchen, da sonst manchmal die Stücke durch die Wärmeausdehnung sich klemmen und nicht mehr herausfallen.

den Wassertropfen in Berührung mit dem Körper gewesen sein, daher eine hohe Temperatur angenommen haben und dadurch einen merklichen Wärmeverlust verursachen, welcher nicht abgeschätzt werden kann. Diesen Nachtheil zu vermeiden, wurde in mancherlei Weise versucht. Ein Blatt von sehr feinem Papier auf dem Wasser schwimmend erwies sich als nicht dazu geeignet. In der That ist das Spritzen meist nicht dem Schlag des fallenden Körpers auf das Wasser zuzuschreiben: die Stücke fallen vielmehr auf das Papier und sinken wie in einem Sack unter; das Wasser stürzt herum um den hinterlassenen Luftraum zu erfüllen und an der Spitze des dabei entstandenen Wasserbergs nimmt es eine sehr große Geschwindigkeit an, welche das Spritzen verursacht. Aus anderen Gründen erwies es sich nicht als zweckmäßig, ein feines metallisches Drahtnetz dicht auf der Oberfläche durch Korkstücken schwimmen zu lassen, welches durch ein geringes Uebergewicht untersinken sollte.

Die endgültig angewandte Einrichtung war die folgende, welche aus der beigegebenen Figur leicht verständlich sein wird.



Die Gabel G trägt durch die 3 Spitzen A, B, C ein Körbchen, dessen Wand aus feinem Kupferblech und dessen Boden aus Drahtnetz besteht. Die Gabel allein stützt sich auf den Rand des Calorimeters und das Drahtnetz liegt dicht über der Oberfläche des Wassers. Sobald nun der Körper in's Körbchen gefallen ist, wird die Gabel in der Richtung des Pfeiles zurückgezogen. Das frei gewordene Körbchen sinkt alsdann mit dem Körper ins Wasser.

Freilich bleibt eine gewisse persönliche Unsicherheit bei der Aufgabe, die Gabel genau in dem Augenblick zu verschieben, in welchem der Körper gefallen ist; und es entsteht dadurch in der That eine Fehlerquelle in der Operation, da eine genaue Correc-

tion nicht möglich ist. Da aber die verschiedenen mit derselben Substanz erhaltenen Werthe untereinander und in besonderen dazu ausgewählten Fällen mit den von anderen Beobachtern angegebenen in befriedigender Weise übereinstimmen, so scheint ein störender Einfluß ausgeschlossen zu sein.

Das Calorimeter wurde mittelst seitlich befestigter Seidenfäden aufgehängt und mit einer metallischen polirten Hülle umgeben, welche sich als vollkommen genügend erwies, um die äußere Strahlung abzuhalten.

Ein Vortheil scheint mir auch die Einrichtung zur Umrührung des Wassers zu sein, welche aus einer kleinen im Calorimeter befindlichen Turbine besteht, die von einer anderen durch die Wasserleitung getriebenen Turbine mittelst eines Transmissionsfadens in Bewegung gesetzt wird. Der Abstand zwischen den beiden Turbinen betrug etwa 2 m; dadurch war ermöglicht, daß die Bewegung auch stattfinden konnte, während das Calorimeter unter den Hahn und zurück gebracht wurde. Diese Einrichtung ermöglicht zweifellos die vollkommenste Umrührung, wie durch die sehr regelmäßige Wärmeabgabe des Körpers an die Flüssigkeit erwiesen wurde; es zeigten sich dabei nicht jene Temperaturschwankungen, welche sonst stattfinden, je nachdem eine Welle von heißem oder kaltem Wasser mit dem Thermometer in Berührung kommt. Außerdem bildet sich das thermische Gleichgewicht zwischen Körper und Flüssigkeit sehr schnell aus; dies bewirkt, daß die Correctionen wegen des Wärmeverlustes nach außen äußerst gering sind (bei günstigen Verhältnissen der anfänglichen Temperatur des Wassers und der Zimmertemperatur erreichten diese kaum 0,02 Grad); ferner waren dieselben gleich, je nachdem die eine oder die andere der dazu vorgeschlagenen Correctionsmethoden gebraucht wurde.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle eine Bemerkung über diese Correctionen zu machen. Die sämmtlichen Correctionsmethoden, welche man nach der Régnault'schen und der Neumann'schen classificiren kann, beruhen auf der Annahme, daß die Flüssigkeit überall dieselbe Temperatur besitze, d. h. daß das Thermometer genau die Temperatur der ausstrahlenden Oberfläche zeige. Da dies schwer ohne eine sehr vollkommene Umrührung der Fall sein kann, so folgt, daß die Correctionen, die man angebracht hat, oft illusorisch gewesen sein müssen. Ich kann daher nicht genügend die Anwendung der Turbine empfehlen.

Das oben besprochene Körbchen konnte nur bis etwa auf die Mitte der Höhe des Calorimeters sinken, da dort zwei horizontale

Kupferdrähte von einer Seite der Wand des letzteren zur anderen gezogen waren. Das Thermometer lag mit seinem Quecksilbergefäß unmittelbar darunter und war mittelst eines Korkes horizontal befestigt. Die bewegte Flüssigkeit strömte vom Körper zum Thermometer, also von oben nach unten, während sie im Turbinenrohr emporgehoben wurde.

Das Thermometer wurde durch ein Fernrohr abgelesen, und die Zeit der Ablesungen nach einer Uhr, welche 15 Sekunden schlug, notirt. Das Thermometer (von Müller in Bonn) war in Zehntel Grade getheilt und corrigirt.

Während sich das Calorimeter unter dem Hahn befand, wurde es vor der Strahlung des Hahnes durch einen doppelwandigen kupfernen Schirm geschützt. Der Körper wurde mehrere Stunden im Hahn gelassen, obwohl ich mich durch besondere Versuche überzeugt hatte, daß der Körper eine constante Temperatur viel früher annahm. Es wurde angenommen, daß die Mineralstücke, welche ja direct in Berührung mit den allseitig von Wasserdampf umgebenen Wänden standen, dann die Temperatur des Dampfes, also die dem herrschenden Luftdruck entsprechende Siedetemperatur des Wassers, besaßen.

Die anfängliche Temperatur des Calorimeters war ungefähr 10^0; demnach sind die gefundenen specifischen Wärmen die Mittelwerthe für das Intervall von 10 bis 100^0. Das Wasseräquivalent des gefüllten Calorimeters nebst Körbchen, Turbine, sowie Thermometerkugel betrug durchschnittlich circa 114 gr.

Beobachtungsresultate.

Manganblende von Nagyag, Siebenbürgen. Derbe krystallinische Stücke von unebenem Bruch; eisenschwarz. Mittel aus 4 Versuchen (angewandte Menge 16 bis 36 Gramm): $c = 0{,}1392$.

Arsenkies von Freiberg in Sachsen. Isolirte Krystalle [(110), (014), auch Zwillinge] lichtstahlgrau, mit kleinen fremden Einschlüssen. $c = 0{,}1030$.

Arseneisen von Breitenbrunnen in Sachsen. Derbe, etwas stängelige Stücke; zinnweiß, von Epidot durchwachsen. Mittel aus 3 Versuchen (angew. Menge Gr. 51 bis 61): $c = 0{,}0864$.

Kobaltglanz von Tunaberg in Schweden. Isolirte Krystalle [(111), (110)]. Mittel aus 4 Versuchen (angew. M. Gr. 30 bis 32): $c = 0{,}0991$.

Speiskobalt von Schneeberg in Sachsen, Grube Kurfürst Wilhelm. Derbe Stücke, zinnweiß bis blaugrau; ursprünglich mit

Kalkspath verunreinigt. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 43 bis 57): $c = 0{,}0866$.

Speiskobalt von Frauenbreitungen in Sachsen-Meiningen. Derbe krystallinische zinnweiße Stücke, fast frei von Einschlüssen. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 34 bis 59): $c = 0{,}0830$.

Silberglanz von Schneeberg in Sachsen, Grube Wolfgang Massen. Derbe krystallinische Stücke von hackigem Bruch; schwärzlich blaugrau. Mittel aus 4 Versuchen (angew. M. Gr. 15 bis 44): $c = 0{,}0746$.

Antimonsilber von Andreasberg im Harz, Grube Samson. Ziemlich große, prismatische, längsgestreifte, unregelmäßig ausgebildete Krystalle; silberweiß; in Kalkspath eingewachsen, mit verdünnter warmer Essigsäure isolirt. Mittel aus 5 Versuchen (angew. M. Gr. 72): $c = 0{,}0558$.

Arsenkupfer vom Loake Superior, Nordamerika. Derbe Stücke von feinkörnigem Gefüge, auf frischem Bruch zinnweiß, Oberfläche leicht und stark anlaufend. Mittel aus 3 Versuchen (Gr. 57 bis 61): $c = 0{,}0949$.

Buntkupfererz von Bristol, Connecticut. Derbe Stücke von der charakteristischen Farbe. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 53 bis 55): $c = 0{,}1177$.

Bournonit von Neudorf im Harz. Bruchstücke von großen Krystallen von stahlgrauer Farbe und muscheligem stark glänzendem Bruch. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 20 bis 97): $c = 0{,}0730$.

Proustit von Joachimsthal in Böhmen. Durchscheinende rothe krystallinische Aggregate. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 17): $c = 0{,}0807$.

Pyrargyrit von Freiberg in Sachsen. Krystallinische Aggregate von metallischem Diamantglanz. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 27): $c = 0{,}0757$.

id. von Andreasberg im Harz. Krystallinische, röthlich eisengraue Stücke; halb metallischer Glanz. Mittel aus 2 Versuchen (angew. M. Gr. 47 bis 81): $c = 0{,}0754$.

Fahlerz von Clausthal im Harz. Auf Eisenspath aufgewachsene Krystalle, ursprünglich mit Kupferkies überzogen, Bruch muschelig, eisengrau, stark glänzend. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 47): $c = 0{,}0987$.

Enargit von Famatina, Kioja, Argentinische Republik, San Pedro mina. Krystallinische stängelige Aggregate, bläulich eisengrau. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 20 bis 31): $c = 0{,}1202$.

Zinnkies von Whealrock St. Agnes. Cornwall. Derbe Stücke, Bruch stahlgrau und metallglänzend; geringe Verunreinigungen aus Kupferkies. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 27): $c = 0{,}1088$.

Die Dimensionen der angewandten Stücke betrugen bei den meisten durchschnittlich ½ bis 2 Centimeter; beim Kobaltglanz und Pyrargyrit aus Freiberg waren die Stücke etwas kleiner.

In einem einzigen Falle habe ich eine freilich sehr geringe der Temperatur zuzuschreibenden Zersetzung des Minerals beobtet, und zwar beim Mangansulfid, welches die inneren Wände des Cylinders schwarz anlaufen ließ.

Discussion.

Das Woestyn'sche Gesetz:

$$c = \frac{\Sigma u_k a_k c_k}{\Sigma a_k} \quad \text{oder} \quad c = \frac{\Sigma p_k c_k}{\Sigma p_k},$$

drückt die spec. Wärme c eines zusammengesetzten Körpers durch die spec. Wärme c_k, das Atomgewicht a_k, die Zahl der vorhandenen Atome u_k der einzelnen Elemente, oder durch c_k und die Procente p_k der einzelnen Bestandtheile aus.

Zur Berechnung der theoretischen Werthe nach jener Formel wurden folgende Werthe zu Grunde gelegt.

	a_k	c_k	Temp.	Beobachter.
As	74.90	0,0830	2°—68°	Bettendorff u. Wüllner
Sb	119,60	0,0495	0—10	Bunsen
S	31,98	0,1764	15—97	Régnault
Bi	207,50	0,0298	9—102	Béde
Mo	95,90	0,0659	5—15	Delarive u. Marcet
Zn	64,88	0,0929	50	Naccari
Mn	54,80	0,1217	14—97	Régnault
Fe	55,88	0,1113	50	Naccari
Co	58,60	0,1067	„	„
Ni	58,60	0,1090	„	„
Cu	63,18	0,0932	„	„
Pb	206,39	0,0304	„	„
Ag	107,66	0,0556	„	„
Hg	199,80	0,0331	„	„
Sn	117,35	0,0545	0—100	Bunsen.

Nach der Woestyn'schen Formel wurde für die obigen Mineralien die spec. Wärme berechnet. Die chemischen Analysen wurden aus der Mineralchemie von Rammelsberg entnommen; dabei steht der Name des betreffenden Analytikers.

Analysen.

Manganblende, Nagyag.

	S	Mn	Spec. Wärmen ber.	Spec. Wärmen gef.
Arfvedson	37,9	62,1	0,1424	0,1392

Arsenkies, Freiberg.

	S	As	Fe	ber.	gef.
Stromeyer	21,08	42,88	36,04	0,1129	0,1030
Behnke	20,38	44,83	34,32	0,1119	
Arzruni	20,83	44,11	35,06	0,1124	

Arseneisen, Breitenbrunnen.

	S	As	Sb	Fe	ber.	gef.
Behnke	1,10	69,85	1,05	27,41	0,0915	0,0864
M'Cay	6,73	61,40	—	31,20	0,0982	

Kobaltglanz, Tunaberg.

	ber.	gef.
Co As S	0,1094	0,0991

Speiskobalt, Schneeberg.

	S	As	Co	Ni	Fe	Cu	ber.	gef.
Jäckel	0,49	66,06	21,21	—	11,60	8,41	0,0919	0,0866
Kobell	—	72,08	9,44	—	18,48	—	0,0905	
M'Cay	1,38	71,53	18,07	1,02	7,31	0,01	0,0910	
id.	0,73	75,40	3,42	11,90	7,50	0,39	0,0898	
id.	1,32	76,00	12,61	3,05	5,22	0,60	0,0896	
id.	1,80	74,35	13,80	3,60	5,05	1,20	0,0905	
Bull	—	75,85	3,32	12,04	6,52	0,94	0,0899	

Speiskobalt, Frauenbreitungen.

ber.	gef.
—	0,0830

Silberglanz, Schneeberg.

	ber.	gef.
Ag_2S	0,0712	0,0746

Antimonsilber, Andreasberg.

	ber.	gef.
Ag_6Sb	0,0546	0,0558
Ag_3Sb	0,0540	

Arsenkupfer, Lake Superior.

	As	Cu	Ag	ber.	gef.
Genth	12,28	87,48	0,04	0,0919	0,0949
id.	16,72	82,35	0,30	0,0914	
id.	29,25	70,68	—	0,0902	
Frenzel	28,39	72,02	—	0,0903	

Buntkupfererz, Bristol (Connecticut)

	S	Cu	Fe	ber.	gef.
Bodemann	25,59	62,64	11,67	0,1167	0,1177

Bournonit, Neudorf

	S	Sb	Pb	Cu	Spec. Wärmen ber.	Spec. Wärmen gef.
Rose	20,31	26,28	40,84	12,65	0,0730	
Linding	19,63	25,68	41,38	12,68	0,0722	
Bromeis	18,99	24,82	40,04	15,16	0,0728	0,0730
id.	19,49	24,60	40,42	13,06	0,0728	
Rammelsberg	20,15	24,54	41,83	13,48	0,0730	

Proustit, Joachimsthal.

	S	As	Sb	Ag	ber.	gef.
Rose	19,51	15,09	0,69	64,67	0,0833	0,0807

Pyrargyrit, Freiberg.

	S	Sb	As	Ag	ber.	gef.
Rethwisch	17,95	18,58	2,62	60,63	0,0769	0,0757

Pyrargyrit, Andreasberg.

	S	Sb	As	Ag	ber.	gef.
Bonsdorff	17,78	23,26	—	58,96	0,0757	
Petersen	17,70	22,35	1,01	58,03	0,0761	0,0754
Rethwisch	17,65	22,36	—	59,73	0,0756	
id.	17,99	18,63	3,01	60,78	0,0769	

Fahlerz, Clausthal.

	S	Sb	Ag	Cu	Fe	Zn	ber.	gef.
Sander	24,10	26,80	8,90	35,70	4,50	0,90	0,0989	
Schindling	25,63	28,52	5,13	33,14	2,73	5,77	0,1016	0,0987
Rose	24,73	28,24	4,97	34,48	2,27	5,55	0,0999	
Kuhlemann	25,54	27,64	3,18	34,59	6,23	3,43	0,1032	

Enargit, Sierra Famatina.

	S	As	Sb	Cu	Fe	Zn	Pb	ber.	gef.
Tschermak	13,80	16,59	2,51	47,75	1,21	0,44	0,70	0,1158	0,1202

Zinnkies, Whealrock St. Agnes.

	S	Sn	Cu	Fe	Zn	ber.	gef.
Klaproth	30,50	26,50	30,00	12,00	—	0,1104	
Kudernatsch	29,95	25,81	29,69	12,57	1,79	0,1110	0,1088
Mallet	29,51	26,90	29,23	6,74	7,27	0,1086	
Rammelsberg	29,83	27,34	29,83	5,08	7,71	0,1084	

Aus der vorstehenden Tabelle folgt, daß das Woestyn'sche Gesetz ziemlich gut der Wahrheit entspricht, wenigstens mit jener Annäherung, mit welcher ähnliche physikalische Gesetze als geltend angesehen werden. In den Fällen, wo ein größerer Werth gefunden worden ist, kann man wohl eine eventuelle Unreinheit

des Materials in Betracht ziehen, welche in unserem Falle, wo wir es mit Sulfiden zu thun haben, beinahe stets auf eine Zunahme des Werthes der spec. Wärme führt (z. B. wenn Oxydation oder Beimengung von Gangmineralien, d. h. Silicaten, Kalkspath etc. oder noch ein kleiner Wassergehalt vorhanden ist). Auffallend kleiner als die berechneten sind aber die gefundenen Werthe für Speiskobalt, Kobaltglanz, Arseneisen, Arsenkies. Stellt man damit zusammen den für den Pyrit von Jolly gefundenen Werth, welcher dem Régnault'schen sehr nahe kommt, so würde man folgende Reihe erhalten:

FeS_2	0,131
$FeAs_2$	0,0864
$CoAsS$	0,0991
$FeCoNi(As_6)$	0,0866
$FeAsS$	0,103.

Nimmt man aber an, daß dem Eisen, Kobalt und Nickel in den Zusammensetzungen dieselbe specifische Wärme wie im freiem Zustande zukommt und berechnet aus den gefundenen specifischen Wärmen von Pyrit und Arseneisen den sozusagen theoretischen Werth der spec. Wärme für Schwefel und Arsen, so erhält man für die übrigen von den obigen Verbindungen:

	ber.	gef.
$FeAsS$	0,1028	0,103
$CoAsS$	0,1013	0,0991
$FeCoNiAs_6$	0,0860	0,0866.

Dadurch wird also die Uebereinstimmung befriedigend; dieses Ergebniß besagt übrigens nichts anders als das Neumann'sche Gesetz.

Zum Schluß theile ich eine Tabelle der bisher beobachteten spec. Wärmen der zur Classe der Sulfide gehörenden Körper mit. Die berechneten Werthe folgen aus den den Mineraliennamen beigefügten Formeln, außer für Geokronit, Fahlerz, Enargit, für welche die Analysen von Nordenskiöld, Rose, Tschermak benutzt worden sind.

	Formel	Rég-nault	Neu-mann	Kopp	Jolly	Oe-berg	Sella	ber.
Realgar	AsS		0,1111					0,1109
Auripigment	As_2S_3		0,1132					0,1195
Antimonit	Sb_2S_3	0,0840	0,0907					0,0858
Bismutit	Bi_2S_3	0,0600						0,0573
Molybdaenit	MoS_2	0,1233	0,1067					0,1101
Sphalerit	ZnS	0,1230	0,1145	0,1200	0.1154			0,1205
Manganblende	MnS						0,1392	0,1419
Troilit	FeS	0,1357						0,1350
Schwefelkobalt	CoS	0,1251						0,1313
Millerit	NiS	0,1281						0,1328
Magnetkies	Fe_7S_8	0,1602	0,1533					0,1370
Eisenkies	FeS_2	0,1301	0,1275	0,126	0,1315			0,1460
Strahlkies	FeS_2		0,1332					0,1460
Arsenkies	$FeAsS$		0,1012			0,121	0,103	0,1111
Arseneisen	$FeAs_2$						0,0864	0,0907
Kobaltglanz	$CoAsS$		0,107			0,097	0,0991	0,1094
	$FeCoAs_2S_2$							0,1102
Speiskobalt	$CoAs_2$		0,0920					0,0897
	$NiAs_2$							0,0900
	$FeCoNiAs_6$						0,0848	0,0902
Kupferglanz	Cu_2S	0,1212		0,120				0,1100
Bleiglanz	PbS	0,0509	0,053	0,049	0,0520			0,0500
Silberglanz	Ag_2S	0,0746					0,0746	0,0712
Antimonsilber	Ag_2Sb						0,0558	0,0534
Arsenkupfer	Cu_3As						0,0919	0,0903
Zinnober	HgS	0,0512	0,0520	0,0517				0,0529
Kupferkies	$CuFeS_2$		0,1289	0,131	0,1271	0,1291		0,1278
Buntkupfererz	Cu_3FeS_3						0,1177	0,1195
Bournonit	PbS_2CuSb						0,0730	0,0722
Proustit	Ag_3AsS_3						0,0807	0,0832
Pyrargurit	Ag_3SbS_3						0,0755	0,0758
	SnS	0,0837						0,0806
	SnS_2	0,1793						0,0975
Geokronit						0,066		0,0660
Fahlerz							0,0987	0,0999
Enargit							0,1202	0,1158
Zinnkies	Cu_2FeSnS_4						0,1088	0,1086

Es sei mir zum Schluß gestattet, Herrn Prof. Voigt, welcher mich mit Rat und That unterstüzt hat, und Herrn Prof. Liebisch, welcher mir das Material für die Beobachtungen freundlichst zur Verfügung gestellt hat, meinen innigsten Dank auszusprechen.

Rom, November 1891.

Ueber Potentialfunctionen, deren Hesse'sche Determinante verschwindet.

Von

G. Frobenius in Zürich.

(Vorgelegt von Herrn F. Klein).

Sind die drei partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Potentialfunction nicht von einander unabhängig, so stellt die zwischen ihnen bestehende Gleichung, falls man jene Ableitungen selbst als Coordinaten betrachtet, eine Minimalfläche dar. Für diesen interessanten Satz, welchen Herr Weingarten vor kurzem (1890) in diesen Nachrichten hergeleitet hat, will ich hier einen anderen Beweis entwickeln uud zugleich einige weitere mit dieser Untersuchung zusammenhängende Ergebnisse mittheilen.

§ 1.

Seien x_1, x_2, x_3 drei von einander unabhängige Veränderliche, s eine Function derselben, $s_\alpha = \dfrac{\partial s}{\partial x_\alpha}$ und $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} = \dfrac{\partial^2 s}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$. Wenn die Hesse'sche Determinante von s verschwindet

$$(1) \qquad | s_{\alpha\beta} | = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

so besteht zwischen s_1, s_2, s_3 eine Gleichung

$$(2) \qquad \Phi(s_1, s_2, s_3) = 0.$$

Betrachtet man dieselbe als die Gleichung einer Fläche, so bezeichne ich die Richtungscosinus ihrer Normale im Punkte s_1, s_2, s_3 mit r_1, r_2, r_3 und setze $r_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta}$. Da die Coordinaten s_α der Punkte dieser Fläche als Funktionen von drei unabhängigen Variabeln x_β dargestellt sind, so wird die Veränderlichkeit der Größen s_α im allgemeinen nicht beschränkt, wenn man zwischen den Größen x_β eine willkürliche Gleichung annimmt, z. B. eine derselben als constant betrachtet. Ist nun $s_\alpha + ds_\alpha$ der unendlich nahe Punkt von s_α auf einer Krümmungslinie der Fläche (2), und ist ϱ der zugehörige Hauptkrümmungsradius, so bestehen die Gleichungen

$$(3) \qquad \varrho\, dr - ds_\alpha = 0, \quad \sum_\beta (\varrho\, r_{\alpha\beta} - s_{\alpha\beta})\, dx_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Da man diesen drei homogenen linearen Gleichungen zwischen

den Differentialen dx_β auch dann genügen kann, wenn das Differential einer willkürlichen Function der Größen x_β verschwindet, so müssen in dem System ihrer Coefficienten alle Determinanten zweiten Grades Null sein. Es muß also auch die Summe der drei Hauptunterdeterminanten verschwinden

$$\begin{aligned}&(\varrho r_{22}-s_{22})(\varrho r_{33}-s_{33}) - (\varrho r_{23}-s_{23})(\varrho r_{32}-s_{32})\\+&(\varrho r_{33}-s_{33})(\varrho r_{11}-s_{11}) - (\varrho r_{31}-s_{31})(\varrho r_{13}-s_{13})\\+&(\varrho r_{11}-s_{11})(\varrho r_{22}-s_{22}) - (\varrho r_{12}-s_{12})(\varrho r_{21}-s_{21}) = 0.\end{aligned}$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung mit

$$a'\varrho^2 - c'\varrho + b' = 0, \tag{4}$$

so ist

$$\begin{aligned}c' &= r_{11}(s_{22}+s_{33}+s_{11}) - r_{11}s_{11} - r_{12}s_{21} - r_{21}s_{12} + \cdots\\&= (r_{11}+r_{22}+r_{33})(s_{11}+s_{22}+s_{33}) - \sum_{\alpha,\beta} r_{\alpha\beta}\, s_{\beta\alpha}.\end{aligned}$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$a = r_{11}+r_{22}+r_{33}, \quad b = s_{11}+s_{22}+s_{33}, \tag{5}$$

so ist

$$\sum_{\alpha,\beta} r_{\alpha\beta}\, s_{\beta\alpha} = ab - c'. \tag{6}$$

Differentiirt man aber die Gleichung

$$\sum_{\beta,\alpha} r_\alpha s_{\alpha\beta} = 0 \tag{7}$$

nach x_β, so erhält man

$$\sum_\alpha r_{\alpha\beta}\, s_{\alpha\beta} + \sum_\alpha r_\alpha s_{\alpha\beta\beta} = 0,$$

also weil $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ ist,

$$\sum_{\alpha,\beta} r_{\alpha\beta}\, s_{\beta\alpha} = -\sum_\alpha r_\alpha \frac{\partial b}{\partial x_\alpha}$$

und mithin

$$c' = \sum r_\alpha \frac{\partial b}{\partial x_\alpha} + b\sum \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

oder

$$c' = \sum \frac{\partial (b r_\alpha)}{\partial x_\alpha}. \tag{8}$$

Ist nun s eine Potentialfunction, also $b = 0$, so ist auch $c' = 0$, und folglich stellt nach Formel (4) die Gleichung $\Phi = 0$ eine

Minimalfläche dar. Es können nämlich in diesem Falle nicht etwa alle Coefficienten der Gleichung (4) verschwinden. Denn da

(9)
$$a' = r_{22}r_{33} - r_{23}r_{32} + r_{33}r_{11} - r_{31}r_{13} + r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21},$$
$$b' = s_{22}s_{33} - s_{23}^2 + s_{33}s_{11} - s_{31}^2 + s_{11}s_{22} - s_{12}^2$$

ist, so ist

(10)
$$b^2 - 2b' = \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta}^2.$$

Ist also s reell, so kann b' nicht zugleich mit b verschwinden.

Damit aber die Fläche (2) eine Minimalfläche sei, ist nicht nothwendig, daß $b = 0$ ist, sondern wenn man

(11)
$$D\varphi = \Sigma r_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$$

setzt, nur daß b der partiellen Differentialgleichung $D\varphi = -a\varphi$ genügt. Diese kann man so integriren: Nach Gleichung (7) sind, weil $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ ist, die Functionen s_β drei particuläre Integrale der Differentialgleichung $D\varphi = 0$, von denen zwei unabhängig sind, und mithin ist ihr allgemeines Integral eine willkürliche Funktion der Größen s_β. Z. B. ist, da r_β eine Function der Coordinaten s_α ist, $Dr_\beta = 0$ oder

(12)
$$\sum_\alpha r_\alpha r_{\beta\alpha} = 0.$$

Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Determinante (1) mit $S_{\alpha\beta}$, so ist den Gleichungen (7) zufolge $S_{\alpha\beta} = k r_\alpha r_\beta$, und weil

(13)
$$\sum_\alpha r_\alpha^2 = 1$$

ist, $b' = \Sigma S_{\alpha\alpha} = k$, also

(14)
$$S_{\alpha\beta} = b' r_\alpha r_\beta.$$

Nun sind aber S_{11}, S_{21}, S_{31} die drei Determinanten, welche sich aus den partiellen Ableitungen erster Ordnung der beiden Functionen s_2 und s_3 bilden lassen, und mithin besteht zwischen ihnen die Gleichung $\Sigma \frac{\partial S_{\alpha 1}}{\partial x_\alpha} = 0$ oder $\Sigma \frac{\partial (b' r_\alpha r_1)}{\partial x_\alpha} = 0$; also weil nach Gleichung (12) $\Sigma r_\alpha \frac{\partial r_1}{\partial x_\alpha} = 0$ ist, ergiebt sich

$$\Sigma \frac{\partial (b' r_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0, \quad Db' = -ab'.$$

Daher ist

$$\Sigma r_\alpha \frac{\partial\left(\frac{b}{b'}\right)}{\partial x_\alpha} = \frac{c'}{b'} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}$$

die Summe der beiden Hauptkrümmungen. Soll nun b der Bedingung $c' = 0$ oder $Db = -ab$ genügen, so ist $D\left(\frac{b}{b'}\right) = 0$, und mithin ist $\frac{b}{b'}$ eine Function der Coordinaten s_α. Setzt man also $e_{\alpha\beta} = 0$ oder 1, je nachdem $\alpha = \beta$ ist, oder nicht, so erhält man den Satz:

Verschwindet die Hesse'sche Determinante $|s_{\alpha\beta}|$ einer Function s von drei Parametern, so besteht zwischen ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung s_α eine Gleichung. Damit dieselbe eine Minimalfläche darstelle, ist nothwendig und hinreichend, daß die Summe der reciproken Werthe der beiden Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\lambda}\ |s_{\alpha\beta} - \lambda e_{\alpha\beta}| = 0$ eine Function der Coordinaten s_α ist.

Der Coefficient a' in der Gleichung (4) läßt sich in ähnlicher Weise darstellen, wie nach Formel (8) der Coefficient c'. Mit Hülfe der Gleichung (12) erhält man nämlich

$$Da = \sum_{\alpha,\beta} r_\alpha \frac{\partial r_{\beta\beta}}{\partial x_\alpha} = \Sigma r_\alpha \frac{\partial r_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} = -\Sigma r_{\alpha\beta} r_{\beta\alpha} = -a^2 + 2a'$$

und demnach

$$\sum_\alpha \frac{\partial(a r_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 2a', \quad Da = 2a' - a^2.$$

Da endlich der Gleichung (4) zufolge $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{b'}$ Functionen der Coordinaten s_α sind, so ist $D\left(\frac{a'}{b'}\right) = 0$ und $D\left(\frac{c'}{b'}\right) = 0$, und mithin ergeben sich die Formeln

$$(15) \qquad \begin{aligned} Da' &= -aa', & Db' &= -ab', & Dc' &= -ac', \\ Da &= 2a' - a^2, & Db &= c' - ab, & Dc &= -ac. \end{aligned}$$

Die letzte, welche ich der Vollständigkeit wegen mit aufgeführt habe, bezieht sich auf eine Größe c, die ich erst später benutzen werde, und die so definirt ist: Aus der Gleichung (13) folgt

$$(16) \qquad \sum_\alpha r_\alpha r_{\alpha\beta} = 0$$

und daraus in Verbindung mit (12) $\Sigma r_\alpha (r_{\alpha\beta} - r_{\beta\alpha}) = 0$, also [1])

1) Sind die Größen r_α drei beliebige Functionen der Variabeln x_β, so hat

(17) $$\frac{r_{23}-r_{32}}{r_1} = \frac{r_{31}-r_{13}}{r_2} = \frac{r_{12}-r_{21}}{r_3} = c,$$

so daß

(18) $$c = r_1(r_{23}-r_{32}) + r_2(r_{31}-r_{13}) + r_3(r_{12}-r_{21}),$$
$$c^2 = (r_{23}-r_{32})^2 + (r_{31}-r_{13})^2 + (r_{12}-r_{21})^2$$

ist. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{\partial(r_{23}-r_{32})}{\partial x_1} + \frac{\partial(r_{31}-r_{13})}{\partial x_2} + \frac{\partial(r_{12}-r_{21})}{\partial x_3} = 0$$

ergiebt sich daher die Relation $Dc = -ac$. Aus den Gleichungen (15) leitet man die wichtigen Beziehungen ab

(19) $$D\left(\frac{a}{2a'}\right) = 1, \quad D\left(\frac{b}{c'}\right) = 1.$$

Der nämlichen Differentialgleichung $D\varphi = 1$ genügt auch jede der beiden Wurzeln der Gleichung $a'\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$, sowie auch der Ausdruck $\Sigma r_\alpha x_\alpha$.

§ 2.

Da man aus der Gleichung $c' = 0$ nicht schließen kann, daß $b = 0$ ist, so genügt der entwickelte Satz noch nicht zur Lösung der Aufgabe, alle Potentialfunctionen zu finden, deren Hesse'sche Determinante verschwindet. Um dies Ziel zu erreichen, stellt Herr Weingarten folgenden weiteren Satz auf:

Ist $\Delta\varphi$ der zweite Differentialparameter der Function $\varphi(s_1, s_2, s_3)$ für die Fläche $\Phi = 0$, so ist

(1) $$t = \Sigma s_\alpha x_\alpha - s$$

eine Function der Coordinaten s_α, welche der Gleichung $\Delta t = 0$ genügt.

Für den zweiten Differentialparameter hat Herr Beltrami (Math. Ann. Bd. 1, S. 581) den Ausdruck

$$\Delta\varphi = \Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_\alpha^2} - \Sigma r_\alpha r_\beta \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_\alpha \partial s_\beta} - \left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right)\Sigma r_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial s_\alpha}$$

---

der Pfaff'sche Differentialausdruck $\Sigma r_\alpha dx_\alpha$ die Klasse 1, wenn die drei Größen $r_{\alpha\beta} - r_{\beta\alpha}$ verschwinden, die Klasse 2, wenn dies nicht der Fall ist, aber die Größe $c = r_1(r_{23}-r_{32}) + r_2(r_{31}-r_{13}) + r_3(r_{12}-r_{21}) = 0$ ist, und die Klasse 3, wenn c von Null verschieden ist. Der Gleichung (17) zufolge hat der oben untersuchte Ausdruck niemals die Klasse 2.

angegeben. Benutzt man die drei linearen Differentialparameter

$$(2) \qquad \Delta_\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} - r_\alpha \sum_\beta r_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta},$$

so kann man diese Gleichung auf die elegante Form

$$(3) \qquad \Delta \varphi = \Sigma \Delta_\alpha^2 \varphi$$

bringen, wie ich nächstens in einer ausführlicheren Arbeit darlegen werde. Das Zeichen $\Delta_\alpha^2 \varphi$ bedeutet hier $\Delta_\alpha(\Delta_\alpha \varphi)$, d. h. die Operation Δ_α soll auf den Ausdruck $\Delta_\alpha \varphi$ angewendet werden. Der Beweis des oben ausgesprochenen Satzes beruht auf der folgenden identischen Gleichung (vgl. Borchardt, Crelle's Journ. Bd. 30, Seite 44, (9)):

Ist $|\lambda e_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}| = \lambda^3 - a\lambda^2 + a'\lambda - a''$ die charakteristische Determinante der bilinearen Form $f = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$, und ist $f^0 = \Sigma u_\lambda v_\lambda$, $f' = \Sigma \frac{\partial f}{\partial v_\lambda} \frac{\partial f}{\partial u_\lambda}$, so ist die adjungirte Form von f

$$(4) \qquad - \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ v_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ v_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = f' - af + a'f^0.$$

Wendet man diesen Satz auf die quadratische Form $\Sigma s_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$ an, deren adjungirte Form $\Sigma S_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = b'(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2$ ist, und setzt man

$$(5) \qquad s'_{\alpha\beta} = \sum_\lambda s_{\alpha\lambda} s_{\beta\lambda},$$

so erhält man

$$(6) \qquad \Sigma s'_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = \sum_\alpha (\sum_\beta s_{\alpha\beta} u_\beta)^2 = b \Sigma s_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta - b' \Sigma u_\alpha^2 + b'(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2,$$

oder wenn man u_α durch dx_α ersetzt,

$$(7) \qquad \Sigma ds_\alpha^2 = b \Sigma ds_\alpha dx_\alpha - b' \Sigma dx_\alpha^2 + b'(\Sigma r_\alpha dx_\alpha)^2.$$

Setzt man nun $\frac{\partial t}{\partial s_\alpha} = t_\alpha$, so folgt aus $dt = \Sigma x_\alpha ds_\alpha = \Sigma t_\alpha ds_\alpha$ und $\Sigma r_\alpha ds_\alpha = 0$, daß $x_\alpha - t_\alpha = p r_\alpha$ ist, wo p ein Proportionalitätsfactor ist. Daher ist

$$\Delta_\alpha t = t_\alpha - r_\alpha \Sigma r_\beta t_\beta = x_\alpha - p r_\alpha - r_\alpha \Sigma r_\beta (x_\beta - p r_\beta),$$

also

$$(8) \qquad \Delta_\alpha t = x_\alpha - r_\alpha \sum_\beta r_\beta x_\beta.$$

Zu demselben Resultat gelangt man mittelst der Formel

(9) $$b' \Delta_\alpha \varphi = b \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \sum_\beta s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta},$$

die sich aus der Gleichung (6) und den Relationen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}, \quad \sum_\beta s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} = \sum_\beta s'_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}$$

ergiebt.

Setzt man $\Sigma r_\beta x_\beta = r$, so ist, wie oben bemerkt $Dr = \Sigma r_\alpha \dfrac{\partial r}{\partial x_\alpha} = 1$. Da ferner $\sum_\alpha r_\alpha s_{\alpha\beta} = 0$ ist, so ist

$$b' \Delta t = \Sigma b' \Delta_\alpha (\Delta_\alpha t) = b \sum_\alpha \frac{\partial (x_\alpha - r r_\alpha)}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta} \frac{\partial (x_\alpha - r r_\alpha)}{\partial x_\beta} =$$

$$3b - b - br \Sigma r_{\alpha\alpha} - \Sigma s_{\alpha\alpha} + r \Sigma s_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta},$$

also nach (5) und (6) § 1

(10) $$b' \Delta t = b - c' (\Sigma r_\alpha x_\alpha), \quad - \frac{b' \Delta t}{r^2} = \Sigma \frac{\partial \left(\frac{b r_\alpha}{r} \right)}{\partial x_\alpha}.$$

Ist also $b = 0$ und demnach auch $c' = 0$, so ist auch $\Delta t = 0$.

Nunmehr lassen sich die Sätze des Herrn Weingarten umkehren. Seien s_1, s_2, s_3 rechtwinklige Coordinaten, sei $\Phi(s_1, s_2, s_3) = 0$ die Gleichung einer Fläche und t eine beliebige Function der Coordinaten s_α. Berechnet man dann aus den vier Gleichungen $t_\alpha + p r_\alpha = x_\alpha$ und $\Phi = 0$ die vier Größen s_α und p, und setzt man die erhaltenen Werthe in den Ausdruck $s = \Sigma s_\alpha x_\alpha - t$ ein, so wird s eine Function der Variabeln x_α, deren partielle Ableitungen $\dfrac{\partial s}{\partial x_\alpha} = s_\alpha$ sind, und der Gleichung $\Phi = 0$ zufolge verschwindet die Determinante $| s_{\alpha\beta} |$. Stellt nun die Gleichung $\Phi = 0$ eine Minimalfläche dar, so ist $c' = 0$, und genügt ferner t der Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$, so ist nach Formel (10) auch $b = 0$, also ist s eine Potentialfunction.

Will man allgemein die Transformation des zweiten Differentialparameters durchführen, so ergiebt sich aus der Formel (9)

$$b' \Delta(\varphi) = \sum_\alpha b \frac{\partial \Delta_\alpha(\varphi)}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta_\beta(\varphi)}{\partial x_\beta}$$

$$= \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(b \Delta_\alpha \varphi - \sum_\beta s_{\alpha\beta} \Delta_\beta(\varphi) \right),$$

weil

$$\sum_\alpha \frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \Sigma s_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial b}{\partial x_\beta}$$

st. Nun ist aber

$$bb'\Delta_\alpha\varphi - b'\sum_\beta s_{\alpha\beta}\Delta_\beta(\varphi) = b^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} - 2b\sum_\beta s_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} + \sum_\beta s'_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta},$$

also nach Formel (6) gleich

$$(b^2 - b')\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} - b\sum_\beta s_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}.$$

Denn weil φ eine Function der Coordinaten s_α ist, so ist

$$\Sigma r_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Demnach ergiebt sich

$$(11)\qquad \Delta(\varphi) = \frac{1}{b'}\Sigma\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{b'}\Big((b^2 - b')\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} - b\,\Sigma s_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\Big).$$

§ 3.

Die Transformation des zweiten Differentialparameters läßt sich auch durch einen besonderen Kunstgriff auf den bekannten Satz von Jacobi (Gesammelte Werke, Bd. 2, Seite 196) zurückführen:

Ist $\Sigma a_{\alpha\beta}\,dx_\alpha dx_\beta$ ein quadratischer Differentialausdruck, dessen Determinante $A = |a_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist, und ist $A_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ in dieser Determinante, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big[\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_\beta A_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\Big]$$

eine dem Ausdruck zugeordnete Form, welche bei jeder Transformation desselben invariant bleibt.

Da die Coordinaten s_α der Gleichung $\Phi = 0$ genügen, so lassen sie sich durch zwei unabhängige Variabeln p_1 und p_2 ausdrücken, welche Functionen der Größen x_β sind. Sei p_3 eine dritte von jenen unabhängige Function dieser Größen und

$$(1)\qquad \Sigma r_\alpha dx_\alpha = \Sigma q_\alpha dp_\alpha.$$

Dann ist, weil p_1 und p_2 Functionen der Coordinaten s_α sind,

$$\Sigma\frac{\partial p_1}{\partial x_\alpha}r_\alpha = 0,\quad \Sigma\frac{\partial p_2}{\partial x_\alpha}r_\alpha = 0,\quad \Sigma r_\alpha r_\alpha = 1,$$

$$\Sigma\frac{\partial p_1}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = 0,\quad \Sigma\frac{\partial p_2}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = 0,\quad \Sigma r_\alpha\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = q_3$$

und mithin

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = q_3 r_\alpha. \tag{2}$$

Daher ist, weil r_α von p_3 unabhängig ist,

$$\frac{\partial q_3}{\partial p_1} - \frac{\partial q_1}{\partial p_3} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\Sigma r_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3}\right) - \frac{\partial}{\partial p_3}\left(\Sigma r_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial p_1}\right) =$$

$$\Sigma \frac{\partial r_\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = q_3 \Sigma r_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial p_1} = 0,$$

also

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_3} = \frac{\partial q_3}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_3} = \frac{\partial q_3}{\partial p_2}, \tag{3}$$

$\left(\text{aber nicht nothwendig } \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right)$. Um aber die Darstellung noch mehr zu vereinfachen, wähle ich p_3 so, daß $Dp_3 = 1$ ist[1], setze also z. B. $p_3 = \frac{a}{2a'}$ (vgl. (19) § 1). Dann wird

$$q_3 = q_3 \Sigma r_\alpha \frac{\partial p_3}{\partial x_\alpha} = \Sigma \frac{\partial p_3}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = \frac{\partial p_3}{\partial p_3} = 1,$$

und mithin sind den Gleichungen (3) zufolge q_1 und q_2 von p_3 unabhängig[2]).

Ist nun $\Sigma ds_\alpha^2 = a_{11} dp_1^2 + 2a_{12} dp_1 dp_2 + a_{22} dp_2^2$, so geht der ternäre quadratische Differentialausdruck

$$a_{11} dp_1^2 + 2a_{12} dp_1 dp_2 + a_{22} dp_2^2 + (\Sigma q_\alpha dp_\alpha)^2 \tag{4}$$

durch Einführung der Variabeln x_β in

$$\Sigma s'_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta + (\Sigma r_\alpha dx_\alpha)^2 \tag{5}$$

über. Die Determinante des Ausdrucks (4) ist

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} + q_1^2 & a_{12} + q_1 q_2 & q_1 \\ a_{21} + q_2 q_1 & a_{22} + q_2^2 & q_2 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2,$$

ihre Unterdeterminanten sind

---

1) Die Größe p_3 ist von Herrn Weingarten mit r, von mir im vorigen § mit p bezeichnet worden. Durch die Annahme $p_3 = \frac{a}{2a'}$ wird die von Herrn Weingarten, S. 322, aufgestellte Bedingung (16) erfüllt.

2) Die Klasse des Differentialausdrucks $\Sigma r_\alpha dx_\alpha$ ist also gleich 1 oder 3, je nachdem $q_1 dp_1 + q_2 dp_2$ ein vollständiges Differential ist, oder nicht, und kann folglich nie gleich 2 sein.

$$A_{11} = a_{22}, \quad A_{12} = -a_{12}, \quad A_{22} = a_{11}$$
$$A_{13} = a_{12}q_2 - a_{22}q_1, \quad A_{23} = a_{12}q_1 - a_{11}q_2.$$

Demnach sind A, A_{13} und A_{23} von p_3 unabhängig. Setzt man nun

$$(6) \quad \sqrt{A}\,\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial p_1}\frac{1}{\sqrt{A}}\left[a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} - a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\right] + \frac{\partial}{\partial p_2}\frac{1}{\sqrt{A}}\left[-a_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\right],$$

so ist die dem Ausdruck (4) zugeordnete Form gleich

$$\Delta\varphi + \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{A_{13}}{\sqrt{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\right) + \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{A_{23}}{\sqrt{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\right) + \frac{\partial}{\partial p_3}\left(\frac{A_{33}}{\sqrt{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{A}\left[A_{31}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_1\,\partial p_3} + A_{32}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2\,\partial p_3}\right],$$

also wenn φ von p_3 unabhängig ist, gleich $\Delta\varphi$.

Um die Determinante und die adjungirte Form des Ausdrucks (5) zu berechnen, bemerke ich, daß

$$|\,\lambda u_\alpha,\ r_\alpha,\ s_{\alpha 1},\ s_{\alpha 2},\ s_{\alpha 3}\,|^2 = |\,s'_{\alpha\beta} + r_\alpha r_\beta + \lambda^2 u_\alpha u_\beta\,|$$
$$= -\begin{vmatrix} -1 & \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \\ \lambda u_1 & s'_{11} + r_1^2 & s'_{12} + r_1 r_2 & s'_{13} + r_1 r_3 \\ \lambda u_2 & s'_{21} + r_2 r_1 & s'_{22} + r_2^2 & s'_{23} + r_2 r_3 \\ \lambda u_3 & s'_{31} + r_3 r_1 & s'_{32} + r_3 r_2 & s'_{33} + r_3^2 \end{vmatrix}.$$

Daher ist die gesuchte Determinante das constante Glied und die adjungirte Form der Coefficient von λ^2 in diesem Ausdruck. Die Determinante ist folglich die Summe der Quadrate von 4 Determinanten, von denen eine $|\,s_{\alpha\beta}\,| = 0$ ist. Eine der drei andern ist

$$|\,r_\alpha,\ s_{\alpha 1},\ s_{\alpha 2}\,| = \Sigma S_{\alpha 3} r_\alpha = b' r_3 \Sigma r_\alpha^2$$

und die Summe ihrer Quadrate ist b'^2.

Die adjungirte Form aber ist die Summe der Quadrate von 6 Determinanten. Drei derselben haben die Form

$$|\,u_\alpha,\ s_{\alpha 1},\ s_{\alpha 2}\,| = \Sigma S_{\alpha 3} u_\alpha = b' r_3 \Sigma r_\alpha u_\alpha,$$

die Summe ihrer Quadrate ist $b'^2(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2$. Das Quadrat einer der drei übrigen Determinanten ist

$$\begin{vmatrix} u_1 & r_1 & s_{11} \\ u_2 & r_2 & s_{21} \\ u_3 & r_3 & s_{31} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma u_\alpha^2 & \Sigma u_\alpha r_\alpha & \Sigma u_\alpha s_{\alpha 1} \\ \Sigma u_\alpha r_\alpha & 1 & 0 \\ \Sigma u_\alpha s_{\alpha 1} & 0 & \Sigma s_{\alpha 1}^2 \end{vmatrix}$$

und ihre Summe ist nach (10) § 1

$$(b^2 - 2b')\left[\Sigma u_\alpha^2 - (\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2\right] - \sum_\beta\left(\sum_\alpha s_{\alpha\beta} u_\alpha\right)^2,$$

also nach Formel (6) § 2 gleich

$$(b^2 - b')[\Sigma u_\alpha^2 - (\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2] - b\,\Sigma s_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta.$$

Mithin ist die Determinante des Ausdrucks (5) gleich b'^2 und ihre Unterdeterminanten sind die Coefficienten der Form

$$(7) \qquad (b^2 - b')\,\Sigma u_\alpha^2 - b\,\Sigma s_{\alpha\beta}\, u_\alpha u_\beta + (b'^2 + b' - b^2)(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2.$$

Ist nun φ von p_3 unabhängig, so ist $\Sigma r_\alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = 0$, und mithin ist die Form (11) § 2 die dem Ausdruck (5) zugehörige Form.

§ 4.

Die vorangehenden Entwicklungen hängen, wie schon die Gleichung (4) § 2 zeigt, auf's engste mit der Theorie der Matricen zusammen oder der Formen, wie ich sie in meiner Arbeit Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen (Crelle's Journal Bd. 84) genannt habe. Ist

$$|\,\lambda E - A\,| = \lambda^3 - a\lambda^2 + a'\lambda - a'' = \varphi(\lambda)$$

die charakteristische Function einer ternären Form $A = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$, so genügt A der Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(A) = 0, \quad A^3 - aA^2 + a'A - a''E = 0.$$

Den Coefficienten a, den ich im Folgenden oft gebrauche, will ich nach dem Vorgange des Herrn Dedekind die Spur der Form A nennen. Da a'' die Determinante der Form A ist, so ist $a''A^{-1}$ ihre adjungirte Form, die ich mit $\bar{A}$ bezeichnen will. Aus der Gleichung (1) ergiebt sich dann, wenn a'' von Null verschieden ist,

$$(2) \qquad \bar{A} = A^2 - aA + a'E.$$

Da aber beide Seiten dieser Gleichung, welche mit der Formel (4) § 2 übereinstimmt, ganze Functionen der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ sind, so gilt sie auch, wenn $a'' = 0$ ist.

Im Folgenden handelt es sich nun um die Beziehungen zwischen den drei Formen

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und denen, welche durch Zusammensetzung aus ihnen entstehen. Von diesen Formen ist S symmetrisch und T alternirend. Bezeichnet man die conjugirte Form von R mit R', so ist nach (17) § 1

$$(3)\qquad R - R' = cT.$$

Nach Satz (1) genügen diese Formen den Gleichungen

$$(4)\qquad R^3 - aR^2 + a'R = 0,\quad S^3 - bS^2 + b'S = 0,\quad T^3 + T = 0.$$

Die adjungirte Form von T ist

$$(5)\qquad E + T^2 = \begin{vmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_2 r_1 & r_2^2 & r_2 r_3 \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2 \end{vmatrix}.$$

Nach den Formeln (7), (12) und (16) § 1 verschwinden die Producte $R(E+T^2)$, $(E+T^2)R$, $S(E+T^2)$ und $(E+T^2)S$. Demnach ist

$$(6)\qquad RT^2 = T^2R = -R,\quad ST^2 = T^2S = -S.$$

Denselben Gleichungen zufolge können sich die Unterdeterminanten der Form R von den Elementen (5) nur um einen gemeinsamen Factor k unterscheiden, und mithin ist die adjungirte Form von R

$$\bar{R} = R^2 - aR + a'E = k(E + T^2).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $E + T^2$, so erhält man nach (4) und (6) $a' = k$. Auf diesem Wege findet man die Gleichungen

$$(7)\qquad R^2 = aR + a'T^2,\quad S^2 = bS + b'T^2.$$

Die nämliche Methode kann man auch auf die Form

$$(8)\qquad X = \varrho R + \sigma S + \tau T + \vartheta T^2$$

anwenden, wo ϱ, σ, τ, ϑ willkürliche Constanten sind. Ihre Spur ist

$$(9)\qquad f = \varrho a + \sigma b - 2\vartheta.$$

Mithin ist

$$(10)\qquad X^2 = fX + gT^2,$$

und ich werde zeigen, daß

$$(11)\quad g(\varrho, \sigma, \tau, \vartheta) = a'\varrho^2 + b'\sigma^2 + \tau^2 + \vartheta^2 + c'\varrho\sigma + c\varrho\tau - a\varrho\vartheta - b\sigma\vartheta$$

ist. Daß in dieser quadratischen Form die Coefficienten von ϱ^2, σ^2, τ^2, ϑ^2, $\varrho\vartheta$, $\sigma\vartheta$, $\tau\vartheta$ richtig bestimmt sind, ergiebt sich aus den Gleichungen (6) und (7). Es ist also nur noch nachzuweisen, daß in den Gleichungen

$$(12)\qquad \begin{aligned} RS + SR &= aS + bR + c'T^2 \\ RT + TR &= aT + cT^2 \\ ST + ST &= bT \end{aligned}$$

die Coefficienten von T^2 die angegebenen Werthe haben. Dies folgt für die letzte daraus, daß $ST + TS$ eine alternirende Form ist, weil die conjugirte Form von AB gleich $B'A'$ ist, und für die vorletzte daraus, daß nach (3) $RT + TR' = RT + TR - cT^2$ eine alternirende Form ist. Um endlich die erste Gleichung darzuthun, genügt die Bemerkung, daß die Spur[1]) von RS und von SR nach (6) § 1 gleich $\Sigma r_{\alpha\beta} s_{\beta\alpha} = ab - c'$ und die von T^2 nach (5) gleich -2 ist. Ein specieller Fall der Formel (10) ist die Gleichung

$$(\varrho R - S)^2 = (a\varrho - b)(\varrho R - S) + (a'\varrho^2 - c'\varrho + b')T^2,$$

welche die Grundlage des in § 1 geführten Beweises bildet.

Nach Gleichung (10) haben sämmtliche Formen der Schaar $\varrho R + \sigma S + \tau T + \vartheta T^2$ (von einem scalaren Factor abgesehen) dieselbe adjungirte Form $E + T^2$, und eine leichte Abzählung zeigt, daß umgekehrt alle Formen, die den Bedingungen $X(E + T^2) = (E + T^2)X = 0$ genügen, in dieser Schaar enthalten sind. Die Unterdeterminanten der Derminante dieser Formenschaar sind alle durch die quadratische Form $g(\varrho, \sigma, \tau, \vartheta)$ theilbar, und unterscheiden sich von einander nur durch Factoren, die von $\varrho, \sigma, \tau, \vartheta$ unabhängig sind. Da aber ein Product von beliebig vielen der Formen R, S, T den nämlichen Bedingungen genügt, so lassen sich alle diese Producte aus vier unter ihnen linear zusammensetzen. Die dazu nöthigen Formeln kann man so erhalten.

Differentiirt man die Gleichung $\sum\limits_{\lambda} s_{\alpha\lambda} r_{\lambda} = 0$ nach x_{β}, so erhält man $\sum\limits_{\lambda} s_{\alpha\lambda} r_{\lambda\beta} = -\sum\limits_{\lambda} s_{\alpha\beta\lambda} r_{\lambda}$. Mithin ist die Form SR symmetrisch

$$SR = R'S \tag{13}$$

Ebenso ist $ST - TS$ symmetrisch und auch $RT - TR$, weil nach (3) $RT - TR = -TR' + R'T$ ist. Nach (12) ist

$$(ST - TS)^2 = (2ST - bT)(-2TS + bT) = 4(S^2 - bS) - b^2 T^2,$$

und auf diesem Wege findet man die Gleichungen

$$(ST - TS)^2 = -(b^2 - 4b')T^2, \quad (RT - TR)^2 = -(a^2 + c^2 - 4a')T^2. \tag{14}$$

1) Die Formen AB und BA haben immer dieselbe Spur. Sind nämlich zunächst die Coefficienten von B willkürliche Größen, so sind die Formen BA und $AB = B^{-1}(BA)B$ ähnlich, haben also beide dieselbe charakteristische Function. Da aber deren Coefficienten ganze Functionen der Coefficienten von B sind, so haben AB und BA auch dann dieselbe charakteristische Function, wenn die Determinante von B verschwindet.

Da die Wurzeln der Gleichungen

$$|s_{\alpha\beta} - \lambda e_{\alpha\beta}| = 0 \quad \text{und} \quad |r_{\alpha\beta} + r_{\beta\alpha} - \lambda e_{\alpha\beta}| = 0$$

reell sind, so sind $b^2 - 4b'$ und $a^2 + c^2 - 4a'$ positiv. Ferner ergiebt sich mittelst der Formeln (12) und (13)

$$(RT-TR)(ST-TS) = (2RT-aT-cT^2)(-2TS+bT) =$$
$$2(2R-cT)S-2(aS+bR)+bcT-abT^2$$
$$= 2(R+R')S-2(RS+SR-c'T^2)+bcT-abT^2 = bcT-(ab-2c')T^2$$

und mithin, indem man auch zu den conjugirten Formen übergeht,

$$\text{(15)} \quad \begin{aligned} (RT-TR)(ST-TS) &= bcT-(ab-2c')T^2 \\ (ST-TS)(RT-TR) &= -bcT-(ab-2c')T^2. \end{aligned}$$

Endlich ist

$$T(ST-TS) = T(-2TS+bT) = 2S+bT^2,$$

und indem man auch zu den conjugirten Formen übergeht, erhält man die Relationen

$$\text{(16)} \quad \begin{aligned} T(ST-TS) &= -(ST-TS)T = 2S+bT^2 \\ T(RT-TR) &= -(RT-TR)T = 2R-cT+aT^2. \end{aligned}$$

Multiplicirt man also die erste der Gleichungen (15) links mit T und rechts mit $ST-TS$, so findet man

$$\text{(17)} \quad bc(ST-TS) = -(b^2-4b')(2R-cT+aT^2)+(ab-2c')(2S+bT^2).$$

Multiplicirt man die zweite jener Gleichungen links mit T und rechts mit $RT-TR$, so findet man

$$\text{(18)} \quad bc(RT-TR) = -(ab-2c')(2R-cT+aT^2)+(a^2+c^2-4a')(2S+bT^2).$$

Ferner ist

$$2SR = SR+R'S = (SR+RS)-cTS$$

und mithin nach (12) und (17)

$$\text{(19)} \quad bSR = b'(2R-cT+aT^2)+(ab-c')S.$$

Endlich ist $R'R = R^2-cTR$ und folglich nach (7), (12) und (18)

$$\text{(20)} \quad bR'R = c'(2R-cT+aT^2)+(a^2+c^2-4a')S-ba'T^2.$$

Aus der identischen Gleichung

$$(S^2-bS)R'R+S^2(R^2-aR) = S(SR'+SR-aS-bR')R$$

ergiebt sich mittelst der Formeln (3), (7), (12) und (13) die Relation

$$\text{(21)} \quad b'R'R-c'SR+a'S^2 = 0.$$

Da die Spur von TR nach (12) gleich $-c$ ist, so ist die von

$$R'R = R^2 - cTR = aR + a'T^2 - cTR \text{ gleich } a^2 + c^2 - 2a'.$$

Die Spur von $S^2 = bS + b'T^2$ ist $b^2 - 2b'$, und die von SR, wie schon oben erwähnt, gleich $ab - c'$. Daher ergiebt sich aus der letzten Formel die merkwürdige Relation

$$(22) \qquad \begin{aligned} c'^2 - 4a'b' + b^2a' - bac' + (a^2 + c^2)b' &= 0, \\ (b^2 - 4b')(a^2 + c^2 - 4a') - (ab - 2c')^2 &= b^2c^2. \end{aligned}$$

Betrachtet man die symmetrischen Formen als quadratische Formen mit den Variabeln dx_α, so erkennt man in der symbolischen Beziehung (21) die für die Theorie der Flächen wichtige Gleichung (vgl. Weingarten, Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1886, S. 83)

$$(23) \qquad b' \Sigma dr_\alpha^2 - c' \Sigma dr_\alpha ds_\alpha + a' \Sigma ds_\alpha^2,$$

in welcher die Coefficienten dieselben sind, wie in der Gleichung (4) § 1.

Mit Hülfe der entwickelten Formeln lassen sich nun die Formen R, S, T und die Producte von beliebig vielen derselben alle durch vier unter ihnen linear ausdrücken. Setzt man

$$(24) \qquad U = 2S + bT^2, \quad V = ST - TS, \quad k = b^2 - 4b',$$

so erhält man für jene Beziehungen die besonders einfachen Formeln

$$(25) \qquad \begin{aligned} U^2 = V^2 &= -kT^2, & UV = -VU &= kT, \\ TV = -VT &= U, & UT = -TU &= V, \end{aligned}$$

oder es bestehen zwischen den vier Formen

$$J_0 = -T^2, \quad J_1 = T, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{-k}} U, \quad J_3 = \frac{1}{\sqrt{-k}} V$$

dieselben Relationen, wie zwischen den Einheiten der Quaternionen. Da

$$(26) \qquad 2S = U - bT^2, \quad 2kR = k(cT - aT^2) + (ab - 2c')U - bcV$$

ist, so läßt sich die quadratische Form (11) durch eine reelle Substitution in eine Summe von 2 positiven und 2 negativen Quadraten transformiren

$$(27)\quad 4g(\varrho,\sigma,\tau,\vartheta)=[a\varrho+b\sigma-2\vartheta]^2+[c\varrho+2\tau]^2-\frac{1}{k}[(ab-2c')\varrho+k\sigma]^2-\frac{1}{k}b^2c^2\varrho^2,$$

oder sie hat den Trägheitsindex 2 (während die analoge quadratische Form in der Theorie der Quaternionen eine Summe von 4 Quadraten ist). Die nämlichen Formeln (25) erhält man, wenn man

$$(28)\quad U=2R-cT+aT^2,\quad V=RT-TR,\quad k=a^2+c^2-4a'$$

setzt. Daß die 4 Formen T, T^2, U, V linear unabhängig sind, ist leicht zu sehen. Denn ist $\alpha T+\beta T^2+\gamma U+\delta V=0$, so muß, weil T alternirend, T^2, U und V symmetrisch sind, $\alpha=0$ sein. Multiplicirt man nun die Gleichung mit T, V oder U, so erkennt man durch denselben Schluß, daß auch β, γ und δ verschwinden.

Der Relation (10) zufolge genügt die Form X der Gleichung

$$(29)\quad X^3-fX^2+gX=0$$

und hat demnach die charakteristische Function

$$(30)\quad |\varrho R+\sigma S+\tau T+\vartheta T^2+\lambda E|=\lambda^3+f\lambda^2+g\lambda=\lambda g(\varrho,\sigma,\tau,\vartheta-\lambda).$$

Bildet man daraus die Gleichung, der die Form $X+\lambda E$ genügt, so findet man nach (2) für ihre adjungirte Form den Ausdruck

$$(31)\quad \overline{X+\lambda E}=g(E+T^2)-\lambda(X-fE)+\lambda^2E.$$

Z. B. hat die Form

$$S^2+E+T^2=bS+(b'+1)T^2+E$$

die Determinante b'^2 und die adjungirte Form

$$(b'^2+b'-b^2)T^2-bS+b'^2E,$$

wie in § 3 direct durch Rechnung gezeigt worden ist.

Bemerkung zu Hilbert's Theorie der algebraischen Formen.

Von

A. Schönflies.

(Vorgelegt von F. Klein).

Die folgende Note bezieht sich auf die unlängst von Herrn Hilbert aufgestellten fundamentalen Theoreme über Systeme algebraischer Formen [1]). Wie Herr Hilbert nachgewiesen hat, führt die Aufgabe, alle linear von einander unabhängigen Formen einer bestimmten Ordnung zu finden, welche in Bezug auf einen gegebenen Modul $(F_1, F_2 \ldots F_m)$ der Null congruent sind, d. h. also der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = 0$$

genügen, auf eine stets endliche Kette von ähnlich gebildeten Gleichungssystemen, deren Zahl höchstens gleich der Zahl der in den homogenen Formen $F_1, F_2 \ldots F_m$ auftretenden Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ ist. Die Gesammtheit der von einander linear unabhängigen Lösungen eines solchen Gleichungssystems, durch welche sich jede andere Lösung linear so ausdrücken läßt, daß die Coefficienten beliebige Formen von $x_1 \ldots x_n$ sind, heißt ein volles Lösungssystem. Zur Kennzeichnung dieses Satzes behandelt Herr Hilbert im besondern den einfachen Modul $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ und beweist für ihn den folgenden Satz:

Wird für die Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_n X_n = 0$$

die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme aufgestellt, so besteht allgemein das $s$te Gleichungssystem dieser Kette aus $\binom{n}{s-1}$ Gleichungen, während für dasselbe die Zahl der zu bestimmenden Formen gleich $\binom{n}{s}$ und die Zahl der Lösungen des vollen Lösungssystems gleich $\binom{n}{s+1}$ ist. Die Coefficienten der abgeleiteten Gleichungen sind sämmtlich lineare Formen.

Der Beweis dieses Satzes wird in der Hilbertschen Arbeit unter Benutzung desselben Gedankens geführt, welcher für den

1) Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen, Bd. 36, S. 473.

Beweis des grundlegenden Theorems III, das sich auf einen beliebigen Modul bezieht, benutzt worden ist, nämlich durch den Schluß von $n-1$ auf n. Es scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, daß sich in diesem Fall die gesammte Kette der abgeleiteten Gleichungen in expliciter Form direct angeben läßt. Da dieses Beispiel eine gewisse principielle Bedeutung besitzt, so erscheint es ganz erwünscht, die volle Kette der zugehörigen abgeleiteten Gleichungssysteme unmittelbar übersehen zu können; dieselbe möge daher hier mitgetheilt werden. Uebrigens unterscheiden sich diese Gleichungssysteme auch insofern von denjenigen, welche im Hilbertschen Beweis auftreten, als die in der Aufgabe liegende Symmetrie nach den Variabeln $x_1, x_2 \dots x_n$ den abgeleiteten Gleichungssystemen ausnahmslos erhalten bleibt. Die Coefficienten dieser Gleichungssysteme, welche nach obigem Satz immer lineare Formen sind, reduciren sich dabei auf die Variabeln $x_1, x_2 \dots x_n$ selber, wie dies auch in dem von Herrn Hilbert behandelten Beispiel $n = 4$ der Fall ist.

Sind λ und μ irgend zwei der Zahlen $1, 2 \dots n$ und ist $\lambda < \mu$, so können die sämmtlichen $\binom{n}{2}$ linear unabhängigen Lösungen, welche das volle Lösungssystem von

$$1)\qquad x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_n X_n = 0$$

bilden, durch Gleichungen von der Form

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \dots\ X_\lambda = x_\mu,\ \dots\ X_\mu = -x_\lambda,\ \dots\ X_n = 0$$

dargestellt werden. Daraus folgt, daß sich jede Lösung der Gleichung 1) in die Gestalt

$$2)\qquad \begin{aligned} X_1 &= 0 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ X_2 &= a_{21} x_1 + 0 + \cdots + a_{2n} x_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ X_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + 0 \end{aligned}$$

bringen läßt, mit der Maßgabe, daß die Coefficienten a_{ik} homogene ganze Functionen von $x_1, x_2 \dots x_n$ von gleicher Dimension sind und daß

$$a_{ik} + a_{ki} = 0$$

ist. Jede Lösung ist nämlich aus obigen $\binom{n}{2}$ Lösungen mittelst der gleichen $\binom{n}{2}$ Coefficienten zu bilden. Nun leuchtet ein, daß von Null verschiedene Beiträge in jede Form X_l nur aus solchen Lösungen eingehen, in denen X_l nicht Null ist; es können daher in ihr auch nur diejenigen Coefficienten a_{ik} auftreten, die einen Index l enthalten.

Das abgeleitete Gleichungssystem nimmt daher, wenn wir außer den in dasselbe eingehenden $\binom{n}{2}$ Formen $X_{\lambda\mu}$ $(\lambda < \mu)$ im Interesse der Symmetrie auch die Formen

$$X_{\mu\lambda} = -X_{\lambda\mu}$$

in die Gleichungen aufnehmen, folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{lc} & 0 \quad + x_2 X_{12} + \cdots + x_n X_{1n} = 0 \\ 3) & x_1 X_{21} + \quad 0 \quad + \cdots + x_n X_{2n} = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & x_1 X_{n1} + x_2 X_{n2} + \cdots + \quad 0 \quad = 0. \end{array}$$

Diesem Gleichungssystem genügt man nun in allgemeinster Weise durch folgende $\binom{n}{2}$ Gleichungen

$$4) \qquad X_{ik} = a_{ik1} x_1 + a_{ik2} x_2 + \cdots + a_{ikn} x_n$$

mit der Maßgabe, daß die Coefficienten von x_i und x_k Null sind, und daß alle Coefficienten a_{ikl}, welche in den Indices übereinstimmen, dem absoluten Werthe nach einander gleich sind, während das Vorzeichen in bekannter Weise davon abhängt, ob die bezügliche Permutation der Indices eine gerade oder eine ungerade ist. Um dies einzusehen, betrachte man die l te der Gleichungen 3), also

$$x_1 X_{l1} + x_2 X_{l2} + \cdots + x_{l-1} X_{l,l-1} + x_{l+1} X_{l,l+1} + \cdots + x_n X_{ln} = 0,$$

denke sich die Werthe 4) eingesetzt, und betrachte diejenigen Glieder, welche explicite den Factor $x_i x_k$ enthalten, deren Coefficienten also, absolut genommen, gleich a_{ikl} sind. Diese Glieder stammen nur aus X_{li} und X_{lk}, und zwar ist

$$\begin{aligned} X_{li} &= a_{li1} x_1 + a_{li2} x_2 + \cdots + a_{lik} x_k + \cdots + a_{lin} x_n \\ X_{lk} &= a_{lk1} x_1 + a_{lk2} x_2 + \cdots + a_{lki} x_i + \cdots + a_{lkn} x_n. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun, daß in dem Ausdruck

$$x_k X_{li} + x_i X_{lk}$$

ein Glied mit $x_i x_k$ nicht auftreten kann. Denn welches auch immer die natürliche Reihenfolge der Indices i, k, l ist, so haben die Permutationen $l\,i\,k$ und $l\,k\,i$ stets verschiedenes Vorzeichen. Damit ist die obige Behauptung erwiesen.

Die Gleichungen 4) geben diejenige Form an, in welche sich jede Lösung des Gleichungssystems 3) bringen läßt. Diese Lösung läßt sich nämlich, wie leicht ersichtlich, aus $\binom{n}{3}$ einfachen Lösungen zusammensetzen, von denen diejenige, welcher man das Symbol $(\lambda\,\mu\,\nu)$ ertheilen kann, durch

$$5)\qquad X_{\mu\nu} = \pm x_\lambda,\quad X_{\nu\lambda} = \pm x_\mu,\quad X_{\lambda\mu} = \pm x_\nu$$

characterisirt ist, während alle übrigen Größen X_α den Werth Null haben, und zwar ist das Vorzeichen wiederum positiv oder negativ, je nachdem die in der bezüglichen Lösung enthaltene Reihenfolge der Indices einer geraden oder ungeraden Permutation entspricht. In der That können ja in dem Ausdruck einer jeden Lösung X_α von Null verschiedene Beiträge nur aus solchen Lösungen 5) stammen, in denen X_α nicht selbst Null ist, es können daher in ihm auch nur diejenigen Coefficienten $a_{\lambda\mu\nu}$ auftreten, welche die Indices ik enthalten. Was endlich das Vorzeichen dieser Coefficienten betrifft, so muß es infolge der vorstehenden Bestimmungen genau dasjenige sein, welches den oben getroffenen Festsetzungen entspricht.

In dieser Weise können die weiteren Gleichungs- und Lösungssysteme ebenfalls direct angegeben werden. Das nächste Gleichungssystem ist durch die $\binom{n}{3}$ Gleichungen von der Form

$$6)\qquad x_1 X_{\alpha 1} + x_2 X_{\alpha 2} + \cdots + x_n X_{\alpha n} = 0$$

in denen x_i und x_k fehlen, dargestellt, und man genügt ihm durch Lösungen, welche sich in analoger Weise, wie oben, aus $\binom{n}{4}$ Lösungen

$$X_{\mu\nu\varrho} = \pm x_\lambda,\quad X_{\nu\varrho\lambda} = \pm x_\mu,\quad X_{\varrho\lambda\mu} = \pm x_\nu,\quad X_{\lambda\mu\nu} = \pm x_\varrho$$

zusammensetzen, wo die Vorzeicheu wieder von der Art der bezüglichen Indicespermutation abhängen u. s. w. Das vorletzte Gleichungssystem ist, wenn wir zur Abkürzung alle Formen, welche aus $X_{12\ldots i-1, i+1\ldots n}$ durch Permutation der Indices entstehen, durch X_i' bezeichnen, von der Form

$$x_i X_k' + x_k X_i' = 0$$

und zwar ist jedes X_i' wiederum als positiv oder negativ zu wählen, je nachdem die bezügliche Permutation der Indices gerade oder ungerade ist. Das Gleichungssystem besteht aus $\binom{n}{2}$ Gleichungen, enthält n Formen, und läßt nur noch eine einzige Hauptlösung zu, nämlich

$$X_1' = x_1,\quad X_2' = x_2\ \ldots\ X_n' = x_n$$

so daß jede Lösung derselben in die Form

$$X_1' = Ax_1,\quad X_2' = Ax_2\ \ldots\ X_n' = Ax_n$$

gebracht werden kann. Das letzte Gleichungssystem ist

$$x_1 X' = 0,\quad x_2 X' = 0\ \ldots\ x_n X' = 0$$

und läßt keine Lösung mehr zu.

Beispielsweise ergiebt sich für $n = 4$ folgende Kette von Gleichungen. Der Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = 0$$

genügen sechs linear unabhängige Lösungen, so daß die allgemeinste Lösung folgende Form hat

$$\begin{aligned} X_1 &= 0 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ X_2 &= a_{21} x_1 + 0 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\ X_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + 0 + a_{34} x_4 \\ X_4 &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + 0. \end{aligned}$$

Diese Lösung führt zu folgendem Gleichungssystem für die sechs Formen $X_{\lambda\mu}$

$$\begin{aligned} 0 + x_2 X_{12} + x_3 X_{13} + x_4 X_{14} &= 0 \\ x_1 X_{21} + 0 + x_3 X_{23} + x_4 X_{24} &= 0 \\ x_1 X_{31} + x_2 X_{32} + 0 + x_4 X_{34} &= 0 \\ x_1 X_{41} + x_2 X_{42} + x_3 X_{43} + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Die allgemeinste Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\begin{aligned} X_{12} &= 0 + 0 + a_{123} x_3 + a_{124} x_4 \\ X_{13} &= 0 + a_{132} x_2 + 0 + a_{134} x_4 \\ X_{14} &= 0 + a_{142} x_2 + a_{143} x_3 + 0 \\ X_{23} &= a_{231} x_1 + 0 + 0 + a_{234} x_4 \\ X_{24} &= a_{241} x_1 + 0 + a_{243} x_3 + 0 \\ X_{34} &= a_{341} x_1 + a_{342} x_2 + 0 + 0 \end{aligned}$$

und demgemäß ergiebt sich für die Formen $X_{\lambda\mu\nu}$ folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_3 X_{123} + x_4 X_{124} &= 0 \qquad & x_1 X_{231} + x_4 X_{234} &= 0 \\ x_2 X_{132} + x_4 X_{134} &= 0 \qquad & x_1 X_{241} + x_3 X_{243} &= 0 \\ x_2 X_{142} + x_3 X_{143} &= 0 \qquad & x_1 X_{341} + x_2 X_{342} &= 0. \end{aligned}$$

Diesem System genügt man nun durch

$$X_{123} = a_{1234} x_4, \quad X_{124} = a_{1243} x_3, \quad X_{134} = a_{1342} x_2, \quad X_{234} = a_{2341} x_1$$

so daß als letztes Gleichungssystem, das keine Lösung mehr zuläßt

$$X_{1234} x_4 = 0, \quad X_{1234} x_3 = 0, \quad X_{1234} x_2 = 0, \quad X_{1234} x_1 = 0$$

resultirt.

Hiermit ist die oben ausgesprochene Behauptung dargethan. Ich bemerke übrigens, daß man auf Grund der vorstehenden Entwickelungen auch den im Eingang dieser Note angegebenen Satz selbst erweisen kann. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß die $\binom{n}{s+1}$ Lösungssysteme des s^{ten} Gleichungssystems in allen Fällen linear unabhängig sind, und daß weitere von einander linear unabhängige Lösungen nicht existiren können. Zu letzterem Behuf könnte man übrigens auch die von Herrn Hilbert für jeden Modul angegebene characteristische Function $\chi(R)$ benutzen. Da nämlich offenbar jede Form der Rten Ordnung nach dem Modul $(x_1 \ldots x_n)$ der Null congruent ist, so ist $\chi(R) = 0$; andererseits kann der allgemeinen Gestalt von $\chi(R)$, deren Beschaffenheit sich auf Grund des allgemeinen Theorems III direct angeben läßt, nur durch diejenigen Coefficienten genügt werden, welche mit den im obigen Satz figurirenden Zahlen identisch sind. Dies ist auch dann noch der Fall, wenn der Grad R der bezüglichen Formen kleiner als n ist; in diesem Fall bricht zwar die Kette der abgeleiteten Gleichungen vor dem $n$ten Gleichungssystem ab, die auf dasselbe bezüglichen Schlüsse werden aber dadurch in keiner Weise tangirt.

Bemerkung über die Auflösung quadratischer Congruenzen.

Von

Alberto Tonelli in Rom.

(Vorgelegt von Ernst Schering am 7. November.)

Auszug aus Briefen vom 18. April und 15. Juni 1891.

Das bekannte Verfahren zur allgemeinen Auflösung einer quadratischen Congruenz für einen Modul, welcher eine von der Form $4h+1$ verschiedene Primzahl ist, habe ich in der Weise verallgemeinert, daß es auch auf Primzahlen dieser letzteren Form anwendbar wird.

Wenn die Congruenz

$$xx \equiv c \pmod{p}$$

zur Auflösung vorgegeben ist und noch ein beliebiger quadratischer Nichtrest $g \pmod{p}$ bekannt ist, so besteht dies Verfahren im Folgenden.

Es sei $p = \alpha 2^s + 1$, worin α ungerade $s \geqq 1$ ist, dann wird nach dem Eulerschen Satze

$$c^{\alpha 2^{s-1}} \equiv +1, \quad g^{\alpha 2^{s-1}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Wenn noch $s \geqq 2$ ist, folgt aus der ersteren dieser beiden Congruenzen die neue

$$c^{\alpha 2^{s-2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Es sei nun $\varepsilon_0 = 0$ wenn das obere (+)Zeichen, $\varepsilon_1 = 1$ wenn das untere (—)Zeichen stattfindet, so daß immer .

$$g^{\varepsilon_0 \alpha 2^{s-1}} c^{\alpha 2^{s-2}} \equiv +1 \pmod{p}$$

wird. Wenn nun noch $s \geqq 3$ ist, so folgt hieraus

$$g^{\varepsilon_0 \alpha 2^{s-2}} c^{\alpha 2^{s-3}} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Gilt hier das obere (+)Zeichen, so setze ich $\varepsilon_1 = 0$, gilt das unter (—)Zeichen, so setze ich $\varepsilon_1 = 1$, so daß immer

$$g^{\varepsilon_1 \alpha 2^{s-1}} g^{\varepsilon_0 \alpha 2^{s-2}} c^{\alpha 2^{s-3}} \equiv +1 \pmod{p}$$

wird. Auf diese Weise erhält man die Congruenz

$$g^{\alpha 2^{s-k}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \ldots + \varepsilon_{k-1} 2^{k-1})} c^{\alpha 2^{s-k-1}} \equiv 1 \pmod{p}$$

so lange noch $k < s$ ist; also für $k = s - 1$ wird

$$g^{\alpha 2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \ldots + \varepsilon_{s-2} 2^{s-2})} c^{\alpha} \equiv 1 \pmod{p}$$

und demnach

$$x \equiv \pm g^{\alpha(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \ldots + \varepsilon_{s-2} 2^{s-2})} c^{\frac{\alpha+1}{2}} \pmod{p}$$

gesetzt, gibt die Wurzeln der Congruenz

$$xx \equiv c \pmod{p}.$$

Aus dieser Lösung erhält man durch

$$x_1 \equiv x^{p^{\lambda-1}} c^{\frac{p^\lambda - 2p^{\lambda-1} + 1}{2}} \pmod{p^\lambda}$$

eine allgemeine Auflösung der Congruenz

$$x_1 x_1 \equiv c \pmod{p^\lambda},$$

wie man sich leicht mit Anwendung des verallgemeinerten Fermatschen Satzes und des Satzes überzeugt, daß wenn

$a \equiv b \pmod{p}$ ist, auch $a^{p^{\lambda-1}} \equiv b^{p^{\lambda-1}} \pmod{p^\lambda}$

wird.

Diese Formeln für die Wurzeln sind nicht nur theoretisch bemerkenswerth, sondern sie können auch in Fällen, wo andere besondere Methoden ihren Dienst versagen, von praktischer Bedeutung zur Berechnung der Wurzel der quadratischen Congruenzen sein.

Ueber die Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen.

Von

P. Drude und **W. Nernst.**

Es bietet ein erhebliches Interesse, die bekannten Untersuchungen Hrn. Wiener's[1]) über die photographische Wirksamkeit stehender Lichtwellen auch auf andere Erscheinungen, durch welche Lichtbewegung objektiv zur Darstellung gebracht werden kann, auszudehnen, und für möglichst verschiedene Arten derselben folgende beiden Fragen zu beantworten:

1) Giebt es bei stehenden Lichtwellen Maxima und Minima der Wirkungsweise?

2) Fallen bei ein und derselben stehenden Lichtwelle die Maxima der Wirkung für die verschiedenen, zur Untersuchung gelangten Erscheinungsklassen zusammen?

Wirkungen des Lichtes sind auf vielen, recht verschiedenartigen Gebieten beobachtet; außer der durch Belichtung hervorgebrachten Erwärmung, Fluorescenz, und der Erscheinung der Hauchbilder, wie von Wiener erwähnt ist, möchten wir hier noch die durch Belichtung hervorgerufene Entladung negativ elektrisch geladener Körper, die Widerstandsänderungen des Selen's oder Chlorsilbers[2]), den Einfluß des Lichtes auf elektrische Funkenentladung[3]) und die photoelektrischen (Becquerel'schen[4])) Ströme nennen.

Die Schwierigkeit der Untersuchung stehender Lichtwellen beruht hauptsächlich in zwei Punkten: einmal muß der Körper, durch dessen Verhalten die Wirkung der Bäuche und Knoten der stehenden Lichtwelle untersucht werden soll, dünn sein im Vergleich

---

1) O. Wiener, Wied. Ann. 40, p. 203, 1890.
2) Sr. Arrhenius, Wiener Ber. 96, p. 831. 1887.
3) H. Hertz, Wied. Ann. 31, p. 983, 1887.
4) Ed. Becquerel, La lumière, T. 2, p. 121, Paris 1868.

zur Wellenlänge des angewandten Lichtes, damit bei dem benutzten lichtempfindlichen Körper nicht die Wirkung von Schwingungsbauch und Schwingungsknoten gleichzeitig vorhanden ist; eine andere Schwierigkeit wird durch die Herstellungsart stehender Lichtwellen hervorgebracht. Eine stehende Lichtwelle wird erzeugt durch die Interferenz zweier in entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzender Wellenzüge von gleicher Amplitude. Dies wird mit großer Annäherung durch Reflexion des Lichtes an einem Silberspiegel erreicht, da über 90 % des einfallenden Lichtes am Silber reflectirt werden. Das lichtempfindliche Häutchen, wie kurz der Körper genannt werden möge, an welchem irgend eine Art der Wirkung stehender Lichtwellen untersucht werden soll, muß nun nahezu dem Silberspiegel parallel liegen, damit sich genügend weit räumlich auf dem Häutchen der Wellenbauch von dem Wellenthal trennt und zwar in einem Abstand von dem Spiegel, welcher um so kleiner sein muß, je weniger homogen die zur Wirkung gelangende Lichtsorte ist, damit nicht der Schwingungsbauch und Schwingungsknoten für zwei Lichtstrahlen verschiedener Wellenlänge auf dem lichtempfindlichen Häutchen zusammenfallen und dadurch die Wirkung von Bauch und Knoten gar nicht getrennt werden kann. Man wird daher das einfallende Licht spectral zerlegen müssen, falls man den Abstand des Häutchens vom Spiegel nicht beliebig klein machen kann. Enthält jede Stelle im erzeugten Spectrum Licht von streng einerlei Wellenlänge und Richtung so würde man den Abstand des Häutchens vom Spiegel beliebig groß wählen können. Indeß kann man ein derartiges Spectrum nicht mit genügender Lichtintensität herstellen, vor Allem bei Erscheinungen, welche nicht, wie die photographische Wirkung, durch längere Exposition verstärkt werden können. Denn bei der gewöhnlichen Herstellungsart des Spectrums durch Spalt, Collimatorlinse, Prisma und Sammellinse ist das Spectrum nur für einen sehr schmalen Spalt hinreichend rein. Man wird dem Spalt meist eine gewisse Breite geben, um überhaupt deutliche Lichtwirkung zu bekommen und daher das lichtempfindliche Häutchen in sehr kurzen Abstand vom Silberspiegel bringen müssen. Die große Nähe desselben verursacht experimentelle Schwierigkeiten hauptsächlich für die Beobachtung der elektrischen Lichtwirkungen, während die Herstellung eines genügend dünnen lichtempfindlichen Körpers auch für diese Klasse von Erscheinungen wohl möglich zu sein scheint. — Man könnte ferner stehende Lichtwellen erzeugen durch Reflexion an zwei Spiegeln, (am besten totalreflectirenden Prismen), welche unter 45° gegen einen einfallenden

Wellenzug geneigt sind und sich einander zuwenden. In dem Zwischenraum zwischen beiden Spiegeln würden sich stehende Lichtwellen bilden. Bringt man das lichtempfindliche Häutchen nahezu in die Ebene, zu welcher beide Spiegel symmetrisch liegen, so würden auf ihm Schwingungsbauch und Schwingungknoten genügend weit räumlich getrennt werden können und zwar wäre ihre Lage unabhängig von der Wellenlänge des angewandten Lichtes. Letzteres brauchte daher nicht homogen zu sein, wohl aber sehr streng von einerlei Richtung und daher wird auch diese Methode zunächst auf Schwierigkeiten stoßen. — Eine dritte Untersuchungsmethode der Wirkung stehender Wellen bietet sich in der Totalreflexion, bei der man die Nähe eines Metallspiegels vermeidet; es wird davon weiter unten näher die Rede sein.

Von den erwähnten Lichtwirkungen haben wir zunächst nur bei der Fluorescenz Resultate erhalten, welche für die Beobachtung die bequemste ist und wobei wir uns in allen wesentlichen Punkten an die Wiener'sche Versuchsanordnung anschlossen. Als Lichtquelle diente das elektrische Bogenlicht, welches, namentlich wenn man die Kohlenspitzen in eine größere Distanz (etwa $^1/_2$ cm) von einander bringt, sodaß ein großer Lichtbogen entsteht, die kräftigsten Fluorescenzwirkungen der zu Gebote stehenden Lichtquellen besitzt. Das Bogenlicht wurde durch eine Dynamomaschine geliefert, die Stromstärke auf 15 bis 20 Amp. regulirt, für großen Abstand der Kohlenspitzen war durch Veränderung der Regulirgewichte der Lampe Sorge getragen. Letztere befand sich in einem anderen Zimmer, als der Beobachtungsraum, welcher völlig verdunkelt werden konnte. Das Spaltrohr eines Spektrometers war lichtdicht durch ein Loch in der Thüre des Beobachtungsraumes geschoben, der Spalt empfing die Strahlen der Kohlenspitzen meist direkt, ohne dazwischen geschaltete Linse. Es zeigte sich, daß man so durch Annäherung der Kohlenspitzen an den Spalt eine größere Intensität des Fluorescenzlichtes im Beobachtungsraum erhielt, als wenn das Bogenlicht durch ein Glaslinsensystem auf den Spalt concentrirt wurde.

In dem Spaltrohr befand sich als Collimaterlinse eine Quarzlinse, das durch diese parallel austretende Licht wurde durch ein auf dem Spektrometertischchen im Minimum der Ablenkung aufgestelltes Flintglasprisma von 45° brechenden Winkel spectral zerlegt, und fiel dann auf die ebenfalls aus Quarz bestehende Objektivlinse des Spektrometerfernrohrs, dessen Ocular herausgenommen war. In der Brennebene der Objektivlinse entsteht dann ein Spektrum des Bogenlichtes, und durch einen in der Ebene liegenden

Spalt (Ocularspalt) konnte ein beliebiger Theil des Spektrums ausgeblendet werden. Das zerlegende Flintglasprisma fluorescirte unter der Wirkung des Bogenlichtes und mußte daher die wirksamen Strahlen etwas absorbiren. Indeß erwies sich durch direkte Versuche, indem das Glasprisma durch ein Quarzprisma ersetzt wurde, die Absorption als so gering, daß ersterem wegen des Fehlens der Doppelbrechung der Vorzug vor letzterem gegeben wurde. — Sehr verschiedenartige Substanzen (auch Papier, Holz, Gelatine) fluoresciren mehr oder weniger stark, wenn auf sie das Spektrum des Bogenlichtes geworfen wurde. Für alle lag das Maximum des Fluorescenzlichtes in zwei breiteren violetten Banden, welche ziemlich nahe an der Stelle, wo die H-Linien des Sonnenspektrums auftreten, sich befinden und zwar von diesen aus nach dem brechbareren Ende des Spektrums hin. Besonders die den H-Linien zunächst benachbarte Bande zeichnet sich durch sehr starke Fluorescenzwirkung aus und wurde daher allein bei den schließlichen Versuchen benutzt. Beide Banden liegen noch im sichtbaren Theil des Spectrums, wenn auch das Licht der brechbareren Bande nur noch wenig intensiv ist. Die mittlere Wellenlänge der benutzten Bande ergab sich mit Hülfe eines Glasgitters von 0,0045 mm Strich-Abstand zu 0,000386 mm. Die Messung wurde in der Weise vorgenommen, daß eine Glasplatte, auf welcher eine gelatinöse wässrige Lösung von Fluorescein zu einer etwa 1/100 mm dicken Haut eingetrocknet war, in der Brennebene des Objectivs befestigt wurde. Die beiden wirksamen Banden kennzeichnen sich durch zwei hellglänzende grüne Linien, welche man bei schiefer Durchsicht auf der Glasplatte wahr nimmt. Indem man das Fernrohr des Spektrometers so dreht, daß die der zu untersuchenden ersten Bande angehörige Linie auf eine bestimmte Marke der Glasplatte fällt, erhält man den durch das Gitter erzeugten Ablenkungswinkel der Bande und daher auch ihre Wellenlänge.

Eine nach der beschriebenen Art hergestellte fluorescirende Platte ist für alle Versuche über Fluorescenz sehr bequem, einerseits der Handlichkeit wegen, andrerseits weil wegen der geringen Dicke der fluorescirenden Schicht die wirksamen Banden des Spektrums sich scharf auf der Platte abzeichnen.

Es handelte sich nun um Herstellung einer Haut von der Dicke eines Bruchtheils der Wellenlänge, welche noch deutliche Fluorescenz aufwies. Dazu muß eine Substanz gewählt werden, welche in wässriger Lösung ein starkes Fluorescenzvermögen aufweist und welche eine hinreichend große Löslichkeit in Wasser besitzt, weil die in wässriger Lösung wirksamen Stoffe im krystallisirten

Zustande nicht fluoresciren. — Den genannten Anforderungen genügte in ausreichenden Maße das Natronsalz des Fluoresceins.

Es wurde eine Reihe von verschieden concentrirten wässrigen Lösungen dieser Substanz hergestellt, diesen Lösungen Gelatine im Verhältniß 1 : 600 zugesetzt und Glasplatten mit ihnen benetzt. Nach dem Eintrocknen der Lösung blieb auf ihnen eine Haut zurück, welche ungefähr den 600sten Theil der Dicke der ursprünglichen Wasserhaut besitzt. Man erhält so leicht Häute, welche im reflectirten weißen Lichte die eisengraue Farbe der Newton'schen Skala zeigen und welche eine Dicke von 1/20 bis 1/30 der mittleren Wellenlänge des weißen Lichtes besitzen. Diese Dicke wurde auch direkt gemessen, indem auf der Glasplatte mit der Spitze eines Messers eine schmale Partie der Haut weggeschabt, und dann eine andere Glasplatte fest gegen die erste angedrückt wurde. Die Dicke der Gelatine-Haut bestimmt sich dann leicht durch die Gestalt der Interferenzstreifen, welche bei homogener Beleuchtung an der zwischen beiden Platten befindlichen Luftschicht erzeugt werden und an der geschabten Stelle eine Discontinuität zeigen.

Gleichdicke Stellen der verschiedenen Häute, welche aus den einzelnen Lösungen hergestellt waren, wurden dann auf ihr Fluorescenzvermögen hin geprüft, indem man sie in die wirksame Bande des Bogenlicht-Spektrums brachte. Es erwieß sich eine Lösung, welche das Fluorescein in der Concentration 1 : 500 ursprünglich (vor dem Eintrocknen) enthalten hatte, am günstigsten; mit dieser sind die weiteren Versuche angestellt.

Zum Zweck größerer Lichtintensität wurde der Spalt des Collimatorrohrs etwa 2 mm breit gemacht. Das Fluorescenzlicht erwieß sich dann auf einigen Platten so stark, daß es auch im nicht verdunkelten Beobachtungszimmer deutlich wahrzunehmen war. Die erste wirksame Bande im Spectrum des Bogenlichtes zeichnete sich als fast 3 mm breites grünes Lichtband auf den fluorescirenden Substanzen ab. Es konnte ein Ocularspalt von dieser Breite eingesetzt werden, welcher also das unwirksame Licht abblendete.

Auf einer ungefähr 3 mm dicken planparallel geschliffenen Glasplatte, welche im Bogenlicht nicht merklich fluorescirte, wurde eine fluorescirende Haut auf die beschriebene Weise hergestellt, und diese dann auf eine andere ebengeschliffene chemisch versilberte Glasplatte gelegt, deren Silberbelegung durch einen weichen Lederlappen, auf welchem sich ein wenig Pariser Roth befand, gut polirt war. Die fluorescirende Haut war dem Silberspiegel

zugewandt. Zunächst rief die wirksame Bande des Bogenlichtes nur eine gleichmäßige Fluorescenz in der Haut hervor. Dies war eine Folge der mangelnden Homogenität des Spektrums, welche durch die beträchtliche Breite des Collimatorspaltes verursacht war. Denn als durch Hin- und Herschieben der Glasplatte der Abstand der Haut vom Silberspiegel so verringert wurde, daß im reflectirten weißen Lichte die Newton'schen Farben der höheren Ordnungen sichtbar wurden, erschien das grüne Lichtband des Fluorescenzlichtes deutlich von schwarzen Minimis durchzogen. Die Lage derselben entsprach der Lage der im weißen reflectirten Lichte auftretenden Newton'schen Farben, nur war der Abstand ersterer (entsprechend der kleineren Wellenlänge der wirksamen Bande des Bogenlichtes) kleiner, als der der letzteren. Die Fluorescenz-Minima wanderten auf der Platte, falls man durch Drücken mit dem Finger ihren Abstand vom Silberspiegel änderte, ein Beweis dafür, daß die Streifung nicht durch ungleichmäßige Dicke der fluorescirenden Haut hervorgebracht sein konnte. Die Erscheinung zeigte sich um so mehr in grüner Farbe, unter je schieferem Winkel man die Platte betrachtete. Falls sich die Lage des Auges dem Reflexionswinkel näherte, schlug die Erscheinung mehr in die der wirksamen Bande angehörige violette Farbe um, offenbar, weil das vom Silberspiegel diffus reflectirte violette Licht mit ins Auge gelangte. Daß dieses nicht etwa allein eine Interferenzfigur aufwies, welche scheinbar auch die Interferenzfigur der Fluorescenz hervorgebracht hätte, konnte deutlich durch folgenden Versuch nachgewiesen werden. Die fluorescirende Haut war in einer Breite von 2 mm auf der Glasplatte entfernt. Dieser Streifen war dem Ocularspalt parallel, während die Platte auf den Silberspiegel so angedrückt und festgebunden wurde, daß die Interferenzstreifen senkrecht zu dem Ocularspalt und dem geschabten Streifen verliefen. Sowie nun bei unveränderter Stellung des Auges des Beobachters die Plattenkombination so bewegt wurde, daß der Streifen, auf welchem die fluorescirende Haut weggeschabt war, in den belichteten Theil trat, erschien derselbe in gleichmäßigen violetten Lichte ohne durchziehende schwarze Streifen, während die unmittelbar angrenzenden Stellen, auf welchem sich Fluorescein befand, dieselben deutlich aufwiesen.

Daß schließlich die Erscheinung wirklich lediglich durch die Einwirkung der stehenden Lichtwellen auf die Fluorescenz hervorgebracht wurde, ergab sich auch daraus, daß, wenn man den Ocularspalt entfernte, sodaß ein breiteres Spektrum des Bogen-

lichtes auf die Platten-Kombination fiel, das grüne von schwarzen Streifen durchzogene Lichtband nur an der Stelle der wirksamen Bande des Spektrums auftrat, während an den unmittelbar anliegenden Theilen desselben, welche fluorescirend nicht wirken, Dunkelheit oder gleichmäßig diffuses blaues Licht herrschte. — Zur weiteren Controlle wurde auch eine Plattencombination hergestellt, bei der die hintere Glasplatte nicht mit Silber belegt war. Es traten im reflectirten Lichte sehr scharf Newton'sche Ringe auf, weit deutlicher, als bei der vorigen Plattencombination mit Silberspiegel. Die Lichterscheinung der fluorescirenden dünnen Haut der vorderen Glasplatte war aber kaum merklich von dunkleren Partieen durchzogen, welche fast ganz verschwanden, als die Plattencombination umgekehrt wurde, sodaß die fluorescirende Haut sich auf der hinteren Glasplatte befand. Alles dies erklärt sich vollständig aus der geringen Reflexion des Lichtes am Glase, welche nur in sehr unvollkommender Weise stehende Lichtwellen zu Stande kommen läßt.

Es ist also durch diese Versuche als erwiesen anzusehen, daß stehende Lichtwellen Maxima und Minima der Fluorescenzwirkung haben.

Es handelte sich nun darum, die zweite der oben genannten Fragen zu entscheiden, ob nämlich die Maxima der Fluorescenz mit den Maximis der photographischen Wirkung zusammenfielen. Schon durch Betrachtung der Plattenkombination unter verschiedenen Einfallswinkeln ließ sich diese Frage entscheiden. Denn falls man die Platten so gegen die Fernrohraxe des Spektrometers neigte, daß direkt reflectirte Strahlen ins Auge des Beobachters gelangten, waren, wenn auch nur undeutlich, Newton'sche Interferenzfransen zu sehen. Die Maxima des direkt reflectirten Lichtes fielen zusammen mit den Maximis des Fluorescenzlichtes, wie sie am besten bei recht schiefer Betrachtung der Platten gesehen wurden. Dasselbe Resultat ergiebt sich aus den Wiener'schen Untersuchungen, d. h. die Maxima der Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen fallen mit den Maximis ihrer photographischen Wirkung zusammen.

Um dieses Resultat völlig sicher zu erhalten, wurden Versuche mit rechtwinklig sich schneidenden Wellen gemacht, analog wie sie Wiener für die photographische Wirkung angestellt hat. Abweichend von der Wiener'schen Anordnung war nur, daß erst hinter dem (vertikalen) Ocularspalt ein etwa 3 cm dickes, wasserhelles Kalkspath-Parallelepiped mit horizontal liegendem

Hauptschnitt aufgestellt wurde. Durch eine dahinter befindliche Linse von kurzer Brennweite wurden in einer Distanz von ungefähr 20 cm vom Ocularspalt zwei nebeneinander liegende reelle Bilder desselben erzeugt, deren Polarisationsebene bezw. vertikal und horizontal lagen. Es wurde dann auf die zu den bisherigen Versuchen benutzte Plattencombination ein rechtwinkliges Glasprisma mit seiner Hypothenusenfläche aufgesetzt, dessen eine Kathetenfläche senkrecht gegen die einfallenden Lichtstrahlen gestellt wurde. Behufs Vermeidung von Totalreflexion ließen wir zwischen fluorescirender Haut und Silberspiegel einen Tropfen Benzol einsaugen (welches die Gelatine-Haut nicht auflößt[1])), und etwas Wasser zwischen Prisma und vorderer Glasplatte (Kanadabalsam ist nicht anzuwenden wegen seiner starken Fluorescenz). Von den beiden auf der Gelatinehaut hervorgerufenen Streifen Fluorescenzlichtes erschien nur der eine von schwarzen Minimis durchzogen, während der andere gleichförmig hell war. Dabei wechselten die beiden vom Ocularspalt entworfenen reellen Bilder ihre Rollen, wenn einmal die Einfallsebene der Gelatinehaut horizontal, und wenn sie ein zweites Mal vertikal lag, und zwar rief immer dasjenige Bild Streifung im Fluorescenzlicht hervor, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammmenfiel. Diese Erscheinung ist am besten zu sehen bei Betrachtung der Plattencombination durch die dem einfallenden Lichte zugekehrte Kathetenfläche des rechtwinkligen Prismas, da dadurch alle Spuren diffus vom Silber reflectirten violetten Lichtes vermieden werden. Die Betrachtung der Platten in beiden Lagen (mit horizontaler und vertikaler Einfallsebene) geschah deshalb, um dadurch den Einwand gegen die Beweiskraft der Versuche zu vermeiden, daß die beiden reellen Bilder des Ocularspaltes infolge der durch Brechung im zerlegenden Prisma hervorgerufenen Polarisation des Bogenlichtes nicht völlig gleiche Intensität besitzen.

Da die Fluorescenz im angewandten rechtwinkligen Glasprisma die Deutlichkeit der Erscheinung beeinflußte, haben wir auf einer Seite eines gleichzeitigen Quarzprismas, dessen brechende Kanten der optischen Axe parallel lag, eine etwa 1/15 Wellenlänge dicke fluorescirende Haut hergestellt, und diese dicht gegen einen Silberspiegel gedrückt, sodaß im reflectirten weißen Lichte

1) Um sicher zu sein, daß dies Vorhandensein des Benzols die Fluorescenz nicht modificirte, wurde auch die Plattencombination ohne rechtwinkliges Glasprisma mit eingesogenem Benzol bei senkrechter Incidenz des einfallenden Lichtes untersucht. Es traten ebenfalls deutliche schwarze Minima im Streifen des Fluorescenzlichtes auf.

Newton'sche Farben der höheren Ordnungen auftraten. Die Fluorescenz dieser Haut ist so stark, daß sie schon im diffusen Tageslichte als grüner Schimmer wahrnehmbar ist. Läßt man zwischen Silberspiegel und Quarzprisma einen Tropfen Benzol einsaugen und bringt eine Fläche des Quarzprismas in eine solche Lage gegen das einfallende Licht, daß es ungefähr unter 45° gegen die Hinterfläche des Prismas gebrochen wird, so traten die beschriebenen Erscheinungen sehr deutlich auf und sind auch im nicht verdunkelten Zimmer gut zu beobachten[1]).

Diese Versuche beweisen vollständig, daß die Maxima der Fluorescenz mit den Maximis der photographischen Wirkung zusammenfallen, da für letztere Wiener ganz analoge Resultate erhalten hat.

Mit den gewonnenen Resultaten steht ein anderer, einfacher Versuch im Einklang: Eine Quarzplatte wurde zum Theil versilbert und dann mit einer fluorescirenden Haut überzogen, welche in Richtungen, die senkrecht zur Trennungslinie des versilberten vom unversilberten Theil lagen, nahezu gleiche Dicke besaß. Es konnte dies erreicht werden, indem beim Eintrocknen der auf die Quarzplatte gebrachten fluorescirenden Lösung erstere schräg gestellt wurde, sodaß obige Trennungslinie am stärksten gegen den Horizont geneigt war. Es wurde die so präparirte Quarzplatte in die wirksame Bande des Spektrums des Bogenlichtes senkrecht zu den Lichtstrahlen gebracht, und zwar derart, daß die Trennungslinie des versilberten Theiles der Quarzplatte von dem unversilberten Theil senkrecht zum Ocularspalt verlief, sodaß gleiche dicke Stellen der fluorescirenden Haut dem Lichte ausgesetzt wurden, welche theils auf Silber, theils auf Quarz lagen; unter diesen Bedingungen fluorescirten letztere Stellen deutlicher als erstere, solange die Haut dünn (kleiner als die halbe Wellenlänge) war. An Stellen der Haut, welche dicker als eine halbe Wellenlänge des einfallenden Lichtes waren, kehrte sich die Erscheinung um, indem die Stellen auf der Silberbelegung stärker fluorescirten, als die auf der Quarzfläche. Dies Phänomen erklärt sich vollständig dadurch, daß die Fluorescenz einer dünnen auf

---

1) Diese Fluorescenzerscheinung bietet so ein bequemeres Mittel zur Demonstration der Wirkung stehender Wellen, als die Photographie, da die Plattencombination für alle Zeit brauchbar bleibt. Vielleicht kann sie daher zum Vorlesungsexperiment verwandt werden. Bei geringer Dicke der zwischenlagernden Luftschicht sind die Erscheinungen auch bei Beleuchtung mit nicht spektral zerlegten Bogenlicht wahrnehmbar. — Auch im violetten Theil des Sonnenspectrums war eine allerdings undeutliche Streifung des Fluorescenzlichtes wahrzunehmen.

Silber liegenden Haut durch die Wirkung der in ihr zu Stande kommenden stehenden Lichtwelle zerstört wird, da nach den Versuchen am Spiegel selbst ein Minimum der Wirkung liegt.

Belegt man die eine Fläche eines Prismas einer durchsichtigen Substanz (Glas, oder Quarz) mit einer fluorescirenden Haut, welche dünn im Vergleich zur Wellenlänge ist, und dreht man das Prisma, indem die Seite mit der überziehenden Haut den einfallenden Lichtstrahlen abgewandt ist, so daß man allmählig von partieller Reflexion derselben an der Hinterfläche des Prismas zur Totalreflexion gelangt, so tritt bei letzteren eine bedeutende Verstärkung der Fluorescenz der Haut gegenüber der bei partieller Reflexion der einfallenden Lichtstrahlen hervorgerufenen ein[1]).

Läßt man auf die Vorderfläche des Prismas die beiden senkrecht zu einander polarisirten Bilder fallen, welche man nach der beschriebenen Anordnung mit Hülfe des Doppelspaths erhält, und wählt die Einfallsebene der Hinterfläche des Prismas mit der einen der Polarisationsebenen der beiden Bilder zusammenfallend, so läßt sich aus dem Verhältniß der Intensität, mit welcher in beiden Bildern bei der Totalreflexion Fluorescenz erregt wird, auf die Wirkungsweise der stehenden Wellen schließen, und zwar nach folgender Ueberlegung:

Nehmen wir der Einfachheit halber an, das Licht fiele im Innern des Prismas unter 45° auf seine Hinterfläche und es wäre der Brechungsexponent der dünnen Gelatinehaut dem des Prismas gleich, sodaß auch in dieser durch Reflexion zwei senkrecht sich kreuzende Wellenzüge für jeden der beiden vom Ocularspalt gebildeten Lichtstreifen sich fortpflanzen. Setzt man voraus, daß ein Maximum von Fluorescenzwirkung eintritt im Schwingungsbauche einer gewissen Vectorgröße, die infolge der Lichtbewegung periodische Aenderungen erleidet, so wird die Intensität der Fluorescenz in demjenigen Lichtstreifen, in welchem jener Vector parallel zur Einfallsebene gerichtet ist, proportional der doppelten Summe des Quadrates der Amplitude des betreffenden Lichtvectors sein: in demjenigen Lichtstreifen indessen, in welchem der Vector senkrecht zur Einfallsebene schwingt, ist die Intensität der

1) Diese Thatsache, welche auch bei dickeren Häutchen vorhanden ist, kann daher zur Konstruktion eines fluorescirenden Oculars benutzt werden, wenn man mit Hülfe desselben die Fluorescenzwirkungen verschiedener Spektralbereiche bei direkter Durchsicht studiren will. Abgesehen von der Verstärkung der Fluorescenz durch Totalreflexion ist die letztere noch deshalb nützlich, weil sie alles Licht, welches nicht Fluorescenz hervorruft, völlig vom Auge des Beobachters abschneidet.

Fluorescens proportional der vierfachen Amplitude des Vectors oder gleich Null, je nachdem für denselben bei der Totalreflexion an der reflectirenden Fläche ein Schwingungsbauch oder Schwingungsknoten liegt. Dabei ist abgesehen von Phasenänderungen, welche durch Totalreflexion im Allgemeinen herbeigeführt werden, welche aber beliebig klein gemacht werden können, wenn man den Einfallswinkel des Lichtes im Prisma genügend nahe am Grenzwinkel der Totalreflexion wählt.

Nun liegt aber für den zuletzt genannten Lichtvector an der totalreflectirenden Fläche selbst ein Schwingungsbauch, wie dies sowohl die Reflexionsformeln der Fresnel'schen als auch der Neumann'schen Theorie zeigen, und um einen der in jenen Formeln auftretenden Lichtvectoren muß es sich hier handeln. — Es folgt daher, daß wenn der Einfallswinkel 45° genügend nahe am Grenzwinkel der Totalreflexion liegt, einer der beiden Fluorescenzstreifen auf der Hypothenusenfläche des Prismas die doppelte Helligkeit haben muß, als der andere, und zwar derjenige, dessen Lichtvector (im obigen Sinne) senkrecht zur Einfallsebene schwingt.

Dies Resultat haben wir durch die Beobachtung bestätigen können. Wenn man ein Glasprisma, welches einen niederen Brechungsexponenten besaß, sodaß der Grenzwinkel der Totalreflexion nicht sehr von 45° verschieden war, gegen das einfallende Licht allmählich so drehte, daß an der Hypothenusenfläche des Prismas, welches mit einer dünnen fluorescirenden Haut überzogen war, zunächst keine Totalreflexion und dann solche eintrat, so war für letztere Stellungen des Prismas die Fluorescenz in demjenigen der beiden Lichtstreifen die hellere, für welchen die Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfiel. Dies Resultat wurde erhalten, sowohl wenn die Einfallsebene der Hypothenusenfläche horizontal, wie wenn sie vertikal stand. — Vom quantitativen Messungen der Helligkeit der Fluorescenz konnte bei der beschriebenen Anordnung nicht die Rede sein. Denn das einfallende Licht war nicht genügend parallel, da es zuletzt eine Linse von kurzer Brennweite passirt hatte und die absoluten Phasenänderungen durch Totalreflexion variiren sehr schnell mit dem Einfallswinkel. Auch hätte, weil der Einfallswinkel nicht genau 45° war, eine kleine Korrektion an dem Helligkeitsverhältniß der beiden Fluorescenzbilder angebracht werden müssen.

Jedenfalls stand aber diese Beobachtung qualitativ im Einklang mit den bisherigen, daß nämlich der Lichtvector, in dessem Schwingungsbauche das Maximum der Fluorescenz liegt, senkrecht zur Polarisationsebene

schwingt. Außerdem bietet letztere Beobachtung einen Fingerzeig, wie man vielleicht die Wirkungsweise stehender Wellen bei anderen lichtempfindlichen Phänomenen, wie z. B. beim Elektricitätsverlust durch Bestrahlung, oder bei den Becquerel'schen Strömen untersuchen kann.

Was übrigens die eingangs erwähnten anderen zur Untersuchung der Wirkung stehender Wellen geeigneten Phänomene anlangt, so haben wir bisher betreffs der Becquerel'schen Ströme nur vorläufige Messungen gemacht, welche uns bewiesen, daß diese Beobachtungen mit Schwierigkeiten verknüpft sein werden, wenn man zu zuverlässigen Resultaten gelangen will. Dieselben liegen einerseits daran, daß die kleinste Erschütterung schon merklich die elektromotorische Kraft einer lichtempfindlichen Zelle verändert, und andererseits daran, daß das Licht in gewissen Bereichen des Spektrums, welche je nach der Beschaffenheit der angewandten lichtempfindlichen Elektroden (Silber, Jodsilber, Chlorsilber, Bromsilber, auch je nachdem sie einmal auf hohe Temperatur gebracht sind, oder nicht) verschieden sind, sensibilatorisch wirken für ein gewisses anderes Spektralbereich, daß aber nach einmaligen Belichten der Elektrode mit letzterem seine Lichtempfindlichkeit wieder verloren geht, sie aber durch Bestrahlung mit dem sensibilatorischem Theile des Spektrums wieder gewonnen werden kann.

Bei Vorversuchen, welche wir behufs bolometrischer Prüfung der Wärmewirkungen stehender Lichtwellen anstellten, stießen wir insofern auf Schwierigkeiten, als dünnes auf Glas niedergeschlagenes Silber oder auf Glas aufgeklebtes Blattgold ein mit der Temperatur sehr wenig und dabei unregelmäßig variirendes Leitungsvermögen aufwiesen; Gelatinhäute von der erforderlichen Dünne leiteten auch bei reichlichem Zusatz guter Elektrolyte überhaupt nicht nachweisbar, sobald sie eingetrocknet waren, während sie nach schwachem Anhauchen infolge rascher Verdunstung eine sehr inkonstante Leitfähigkeit besaßen. Wegen des unvergleichlich viel größeren Temperaturkoefficienten würden sich natürlich Leiter zweiter Klasse besonders empfehlen. — Es ist in gewisser Weise plausibel, daß die Wärmewirkung stehender Wellen an denselben Stellen liegt, wie ihre Fluorescenzwirkung. Denn man kann die Erwärmung eines Körpers durch Lichtstrahlen als eine Art Fluorescenz auffassen, indem die Lichtstrahlen absorbirt werden und der Körper Strahlen größerer Wellenlänge wieder aussendet. Bei der wirklichen Fluorescenz fallen diese in den sichtbaren Theil des Spektrums, bei der Erwärmung in den

unsichtbaren, ultrarothen. Aus dem angeführten Grunde halten wir es für wahrscheinlich, daß die Wärmewirkungen stehender Lichtwellen mit den Fluoreswirkungen (und den photographischen) zusammenfallen.

Wir versuchten auch, die Erscheinung der Diffusion des Lichtes an unregelmäßigen Partikelchen zum Studium stehender Wellen zu verwerthen. Es scheinen aber bei diesem Phänomen nicht gegeneinander gerichtete Wellenzüge in gegenseitigen Einfluß gesetzt zu werden, sondern sie scheinen durch das alleinige Verhalten eines in einer Richtung (und zwar ins Auge des Beobachters) sich fortpflanzenden Wellenzuges bestimmt zu sein, gerade wie z. B. die Newton'schen Ringe im reflectirten Licht. — Man kann eine Fläche, welche das Licht diffundirt, durch Behauchen einer kalten Glasplatte herstellen. Legt man eine solche, sehr dünn behauchte, auf eine warme, so setzen sich die im direkten Licht gebildeten Newton'schen Interferenzstreifen (bei homogener Beleuchtung) weit fort in den Theil, von welchem direktes Licht nicht mehr ins Auge reflectirt wird. Dreht man die Plattencombination um, sodaß nur die Hinterfläche behaucht ist, so sind Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht wahrnehmbar, sondern nur eine gleichmäßige Helligkeit[1]). — Ersetzt man die hintere (unbehauchte) Glasplatte durch einen angewärmten Silberspiegel, so werden die Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht deutlicher, sondern undeutlicher als vordem; dies zeigt zur Genüge, daß nicht das Verhalten stehender Wellen bei dieser Erscheinung maßgebend ist und daß die Lage der Interferenzstreifen denselben Gesetzen unterworfen ist, wie die Lage der im direkt reflectirten Lichte sichtbaren Newton'schen Streifen. Aus letzterem kann man ja aber bekanntlich nicht eine Entscheidung dafür treffen, welcher Lichtvector für sie maßgebend ist, wenn man unter dem Worte „maßgebend" versteht, daß bei stehender Wellenbewegung der betreffende Lichtvector im Schwingungshauche ein Maximum der Wirkung besitzen soll.

1) Diese Erscheinungen zeigen sich nur bald nach dem Aufeinanderlegen der Platten, da nach längerer Zeit sich ihre Temperaturen ausgleichen und Wassertröpfchen auf beiden Flächen haften.

Bericht des Beständigen Sekretärs der Königl. Ges. d. Wiss. über das Jahr 1891.

Zur Geschichte unserer Gesellschaft geben wir zunächst die wissenschaftlichen Mittheilungen an, welche in den 8 Sitzungen gemacht worden sind.

Am 7. Februar 1891. Riecke legte eine Abhandlung des Privatdocenten Dr. Nernst vor: „Ueber das Henrysche Gesetz“.

Voigt legt „Beiträge zur Hydrodynamik“ vor.

Klein legt die Abhandlung des Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen“. 4. Mittheilung.

de Lagarde spricht über Inhalt und Bedeutung seiner Septuagintastudien II und III, die im 38. Band der Abhandlungen erscheinen werden.

Frensdorff legt einen Aufsatz vor: „Eine Krisis in der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften.

Am 7. März: Voigt legt: „Beiträge zur Hydrodynamik. 2. Theil.“ vor.

Klein legt vor: Abhandlung des Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal: „Realitäteneigenschaften von Raumcurven“.

Schering legt von Dr. Heun in Berlin vor: „Die Schwingungsdauer des Gaussschen Bifilarpendels“.

Am 2. Mai: Schwarz legt einen Aufsatz des Herrn Julius Petersen in Kopenhagen vor: „Ueber Normalformen mehrfach zusammenhängender Flächen“.

Voigt legt einen Aufsatz des Herrn Dr. O. Venske vor: „Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der innern Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Maasse.

de Lagarde kündigt schriftlich für die Nachrichten an:

a. Thevenots Kaffarre.

b. Ueber das aramäische Evangeliar des Vatikans.

c. Neue Ausgabe der διατάξεις τῶν ἀποστόλων und der drei Gestalten der Clementinen.

und für die Abhandlungen (Bd. 38): Septuagintastudien, 4. Stück.

Am 6. Juni: Klein legt eine Arbeit von Dr. Fr. Schilling vor: „Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente“.

Riecke legt a. eine eigne Arbeit vor: „Zur Theorie der piëzoëlectrischen und pyroëlectrischen Erscheinungen.

b. eine Arbeit des Herrn Dr. Tammann: „Ueber die Permeabilität von Niederschlags-Membranen.

c. eine Arbeit des Herrn Dr. Tammann und des Privatdocenten Dr. Nernst: „Ueber die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird".

Kielhorn legt vor:

a. die Vikrama-Aera.

b. dic Nîtimanjarî des Dyâ Dviveda.

de Lagarde: 1. Arabes mitrati. 2. Samech. 3. Ueber den Inhalt des 4. Stücks der Septuagintastudien, die er in der Sitzung vom 2. Mai angekündigt hatte.

Weiland legt für die Abhandlungen durch den beständigen Sekretär vor: „Die Wiener Handschrift der Chronik des Matthias von Neuenburg". (Gedruckt im 37. Band der Abhandlungen.)

Am 4. Juli. Schering legt eine neue Lösung der Kepplerschen Gleichung vor.

Schwarz macht eine Mittheilung über ein nächstens zu veröffentlichendes Verzeichniß aller (oder wenigstens der Mehrzahl) derjenigen Schriften, welche seit dem J. 1761 veröffentlicht sind und mit der Theorie der Flächen kleinsten Flächeninhalts sich beschäftigen.

Riecke legt eine Abhandlung vor: „Ueber eine mit den elektrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche 4. Ordnung".

Klein legt eine Arbeit des Herrn Dr. Hilbert in Königsberg vor: „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten".

Wüstenfeld legt eine Abhandlung vor: „Die gelehrten Schâfi'íten des V. Jahrhunderts der H. (Gedruckt im 37. B. der Abhandlungen.)

de Lagarde legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Rahlfs vor: „Ueber Lehrer und Schüler bei Junilius Africanus".

Am 1. August. Riecke kündigt eine Arbeit von sich und Voigt an: „Bestimmung der elektrischen Konstanten des Turmalins und Quarzes".

Voigt kündigt eine Abhandlung an: „Bestimmung der Konstanten der innern Reibung für einige Krystalle".

Kielhorn kündigt „Tafeln aus indischen Inschriften und Handschriften" an.

Am 7. November. de Lagarde zeigte schriftlich Mittheilungen an: 1. Worterklärungen: Cicisbeo, Caparra, Σατράπης.
2. über den dritten Brief des Paulus an die Korinther.

Schering theilt eine Notiz von Alberto Tonelli mit: „Ueber die Auflösung quadratischer Congruenzen“.

Klein legt einen Aufsatz von Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen“.

Ehlers legt einen Aufsatz des Herrn Privatdocenten Dr. Bürger vor: „Vorläufige Mittheilungen über Untersuchung an Nemertinen von Neapel“.

Wallach legt eine Abhandlung vor: „Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome“.

Alle diese Arbeiten sind oder werden, wenn nicht Anderes ausdrücklich angegeben ist, in den Nachrichten gedruckt. Von diesen sind, soweit sie bis zum 15. November gedruckt werden konnten, 7 Nummern erschienen, mit 246 Seiten.

Außer den Nachrichten und Abhandlungen haben auch die Gelehrten Anzeigen in gewohnter Weise ihre Fortsetzung gefunden.

Auch dies Jahr hat das Kön. Staatsministerium der Geistlichen, Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten die geringen Mittel, über die wir zur Förderung wissenschaftlicher Zwecke verfügen können, durch eine außerordentliche Bewilligung von 3000 Mk. (Reskr. vom 1. April) vermehrt und uns dadurch zum lebhaftesten Dank verpflichtet.

Von dem, was sonst in den Sitzungen verhandelt worden ist, möge ferner erwähnt werden:

Die Gesellschaft fühlte sich verpflichtet, die Aufzeichnungen ihres früh verstorbenen ordentlichen Mitgliedes, Karl von Seebach, Professors der Palaeontologie, über seine wissenschaftliche Reise in Mittelamerika zum Druck zu bringen und beschloß deshalb am 7. Februar sie im 38. Band der Abhandlungen herauszugeben.

Sie betrachtet es ferner als eine ehrenvolle Pflicht, für eine vollständige, mit größter Sorgfalt vorbereitete, äußerlich würdig ausgestattete Ausgabe der Werke ihres großen Genossen, Wilhelm Weber, zu sorgen. Dieselbe wird in fünf Bänden unter der Aufsicht des Herrn Professor Heinrich Weber in Braunschweig und Geheimen Raths Braune in Leipzig erscheinen. Dies aber auszuführen, würde uns nicht möglich gewesen sein, wenn nicht die Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig auf unser Ersuchen sich auch bereit erklärt hätte, uns die in ihren Veröffentlichungen erschienenen Abhandlungen Webers zum

Abdruck in den Werken zu überlassen. Wir sind überzeugt, daß alle Freunde der Wissenschaft im aufrichtigsten Dank für dies Zugeständniß mit uns übereinstimmen. In Folge unseres Beschlusses vom 7. März ist über den Verlag der Ausgabe ein Kontrakt mit der Springerschen Buchhandlung in Berlin abgeschlossen worden.

Auf den Wunsch des Herrn Professor Dr. Schur hat die Gesellschaft am 7. November beschlossen, daß der 2. Theil der astronomischen Mittheilungen der Kön. Sternwarte zu Göttingen „Sternkatalog enthaltend 6900 Sternörter für 1860.0. Nach den von Professor Klinkerfues in den Jahren 1858 bis 1863 angestellten Zonen-Beobachtungen abgeleitet von Professor Dr. Schur" auf ihre Kosten gedruckt werden soll. Die Kosten sind von der Druckerei auf 808 Mark angeschlagen worden.

Die Gesellschaft beschließt am 7. März dem Wunsch der K. Akad. der Wiss. in Berlin und der Académie des Sciences zu Paris zu entsprechen und ihnen einige Briefe von Jacobi und Lagrange an Gauss wissenschaftlichen Inhaltes aus den Gaussschen Sammlungen zum Abdruck in den bezüglichen Gesammtausgaben der genannten Mathematiker mitzutheilen.

Die Gesellschaft beschließt am 4. Juli gegen die von Herrn Dr. Rud. Wackernagel in Basel in Nr. 9 der G. G. Anz. d. J erschienene Anzeige des züricher Urkundenbuches eine Erklärung zu veröffentlichen, die in Nr. 15 der G. G. Anz. gedruckt ist.

In den Tauschverein ist die Gesellschaft den gegen sie ausgesprochenen Wünschen zufolge eingetreten

1) mit der mathematischen Gesellschaft in Moskau (10. Februar),

2) mit der Universität Cincinnati, U. St. A., Journal of comparative Neurologie (4. Juli).

3) mit dem naturwissenschaftlichen Verein für Schleswig-Holstein (1. August).

4) mit der Rassegna delle scienze geologiche in Rom (7. Novbr.).

Am 2. Mai beschloß die Gesellschaft, daß der beständige Sekretär Herrn GRR. Hanssen am 13. Mai zu seinem sechzigjährigen Doctorjubiläum ihre herzlichen Glückwünsche darbringen solle.

Am 9. August feierte Herr GRR. A. von Hofmann in Berlin, auswärtiges Mitglied in der Physikalischen Klasse, sein fünfzigjähriges Professorenjubiläum. Die Gesellschaft beschloß ihm ihre freudige Theilnahme und lebhaften Glückwünsche in einer deutschen Zuschrift auszusprechen. Herr Wallach übernahm die Abfassung.

Se. Excellenz Herr Hermann von Helmholtz wurde am 31. September 70 Jahr alt, aber die Feier war auf den 2. November verlegt worden. Auch unsere Gesellschaft beschloß am 4. Juli sich durch eine deutsche Zuschrift an dieser Feier zu betheiligen und ihre tiefe Verehrung und herzlichen Glückwünsche auszusprechen. Herr Prof. Riecke übernahm die Abfassung und überreichte sie dem Jubilar selbst.

An Stelle des Herrn GRR. Schering trat am 1. Oktober der Senior der Historisch-philologischen Klasse, Herr Wüstenfeld, und wurde durch das Kuratorialreskript vom 7. Oktober bestätigt.

Für dies Jahr hatte die Mathematische Klasse die Preisaufgabe gestellt:

Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungsmaß überall den constanten Werth k besitzt, hängt zusammen mit der Aufgabe, die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k \cdot e^u$$

vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäß zu integriren.

Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.

Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angegebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integriren, vorausgesetzt, daß der Constanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beantwortet zu sehen.

Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchem der betrachtete ebene Bereich eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkeiten annehmen soll.

Zur Bewerbung um den Preis der Mathematischen Klasse für das J. 1891 war am 28. September eine Arbeit mit dem Spruche bezeichnet: „Der schönste Lohn der Arbeit ist die Arbeit selbst“ eingegangen. Nach dem Urtheil der mathematischen Klasse genügt die

eingereichte Abhandlung weder hinsichtlich ihrer Form, noch hinsichtlich ihres Inhalts den an eine Preisbewerbungsschrift zu stellenden Anforderungen, enthält auch überbaupt keine Lösung der gestellten Preisaufgabe. Die Gesellschaft kann also der Abhandlung den Preis nicht zuerkennen.

Die Aufgabe der Historisch-philologischen Klasse für 1892 ist folgende:

Für die älteste Geschichte Athens ist es von außerordentlicher Bedeutung zu wissen, an welchen Orten sich Heiligthümer der verschiedenen Götter und Heroen fanden, sowol in Athen selbst, als in der gesammten Landschaft, soweit es nach dem jetzigen Stande der topographischen, epigraphischen, genealogischen Forschungen möglich ist. Die Historisch-philologische Klasse stellt daher für 1892 die Aufgabe, daß eine sorgfältige Uebersicht der Kultstätten in Attika nach den Oertlichkeiten, in denen sie sich fanden, gegeben und, was sich daraus für die älteste Geschichte Attikas folgern lasse, dargestellt werde.

Für das Jahr 1893 stellte die Gesellschaft nach dem Vorschlag der Physikalischen Klasse die Aufgabe:

Aus den Untersuchungen von W. C. Röntgen und A. Kundt über die Aenderungen der optischen Eigenschaften des Quarzes im elektrischen Felde ergiebt sich ein enger Zusammenhang zwischen den elektrooptischen Erscheinungen und den elastischen Deformationen, welche jene piëzoelektrische Substanz unter der Einwirkung elektrostatischer Kräfte erfährt. Eine Ausdehnung dieser Forschungen auf eine größere Reihe piëzoelektrischer Krystalle von verschiedenen Symmetrieeigenschaften erscheint in hohem Grade erwünscht. Gleichzeitig würde die Untersuchung darauf zu richten sein, ob die elektrooptischen Erscheinungen in piëzoelektrischen Krystallen ausschließlich durch die im elektrischen Felde eintretenden Deformationen oder außerdem durch eine direkte Einwirkung der elektrostatischen Kräfte auf die Lichtbewegung hervorgerufen werden.

Für das Jahr 1894 stellt die Mathematische Klasse folgende neue Aufgabe:

„Zwischen dem Zustand eines harten elastischen Körpers und dem einer Flüssigkeit liegt eine Reihe von Zwischenzuständen; durch geeignete Mischung von festen Körpern mit flüssigen kann man alle möglichen Grade von Weichheit oder Zähflüssigkeit, einen ganz allmähligen Uebergang von einem festen Körper zu einem flüssigen erzeugen. Unsere Kenntnisse von den Eigenschaften jenes Zwischenzustandes sind aber noch sehr unvollständig und es wird

daher verlangt, dieselben durch erneute Experimentaluntersuchungen zu fördern. Insbesondere soll ermittelt werden, wie sich bei zähflüssigen Körpern die Gesetze solcher Bewegungen verändern, welche bei Flüssigkeiten von geringer Viscosität zur Bestimmung der innern Reibung verwandt werden können."

Die zur Bewerbung um einen der Preise bestimmten Arbeiten müssen, mit einem Spruch versehen, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Kön. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit bezeichnet und innen Namen und Wohnort des Verfassers angiebt.

Der Preis für jede Aufgabe beträgt 500 Mk.

Die von der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte zur Lösung im fünften Verwaltungszeitraum, der am 14. März 1886 begonnen hat, gestellten Aufgaben sind in den Nachrichten 1887 S. 69 f. bekannt gemacht, dann 1888 S. 134 ff., 1889 S. 403 ff., 1890 S. 217 ff., 1891 S. 127 ff. wiederholt worden. Gern erwähnen wir, daß der Verein für hansische Geschichte in dem Vorwort zum Band VI der Hansischen Geschichtsquellen (Hansaakten aus England 1275 bis 1412) Halle 1891 und der Historische Verein für Niedersachsen im Vorwort seiner Ausgabe der ebstorfer Weltkarte, die von Ernst Sommerbrodt besorgt ist (Hannover 1891), der Unterstützung erwähnen, durch welche unsere Gesellschaft ihre trefflichen Bemühungen zu fördern im Stande gewesen ist. — Die Arbeiten für die Herausgabe der Kornerschen Chronik sind regelmäßig fortgesetzt worden und sehen baldiger Vollendung entgegen.

Durch den Tod wurde der Gesellschaft im Laufe des Jahres am 23. Juni der Mann entrissen, der fast zwei Menschenalter ihr Stolz und ihre Zierde gewesen war und dessen Andenken sie in Treue bewahren wird, der Wirkl. Geheime Rath Wilhelm Ernst Weber, Excellenz, geboren am 24. September 1804, Ehrenmitglied seit 1887, vorher ordentliches Mitglied der mathematischen Klasse seit 1831.

Ferner sind gestorben die auswärtigen Mitglieder

1. der Historisch-philologischen Klasse:

George Bancroft in Washington, den 17. Januar. Geboren den 3. Oktober 1800. Ausw. Mitglied seit 1868.

Franz Miklosich in Wien, den 7. März. Geboren 1813. Ausw. Mitglied seit 1868.

2. der Physikalischen Klasse:

Karl W. von Nägeli in München, den 11. Mai. Geboren den 30. März 1817. Ausw. Mitglied seit 1877.

Ferner die Korrespondenten

1. der Historisch-philologischen Klasse:

Ludwig Müller in Kopenhagen, den 6. Sept., Korrespondent seit 1871.

Xavier Heuschling in Brüssel, Korrespondent seit 1874. (Sein Tod ist erst seit kurzem zu unserer Kenntniß gekommen.)

An die erledigten Stellen wurden am 4. November einstimmig gewählt: L. Duchesne in Paris, Mitglied des Instituts, und

Max Müller, Professor in Oxford, seit 1861 Korrespondent, zu auswärtigen Mitgliedern der Historisch-Philologischen Klasse.

Dr. Karl Gegenbaur, Professor, Geh. Hofrath, in Heidelberg, zum auswärtigen Mitglied der Physikalischen Klasse, ferner

Wilhelm Fröhner in Paris, und

Dr. Charles Groß in Cambridge (Mass. U. St. A.) zu Korrespondenten der Philol. Historischen Klasse.

F. Fouqué, Mitglied des Instituts, Professor am College de France, in Paris, zum Korrespondenten in der Physikalischen, und

Dr. Friedrich Prym, Professor der Universität Würzburg, zum Korrespondenten in der Mathematischen Klasse.

Wilhelm Fraatz aus Göttingen ist am 15. Februar als Diener der Gesellschaft angenommen und verpflichtet worden.

Inhalt von Nr. 10.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

30. December. № 11. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. December.

Ueber den Stierdionysos.

Von

Friedrich Wieseler.

Ueber den Stierdionysos ist mehrfach im Zusammenhange gehandelt, am eingehendsten von Stephani im Compte rendu de la commission imp. archéol. pour l'ann. 1863, p. 110 fg., und Robert Schneider „Ueber zwei Bronzebilder des gehörnten Dionysos" in den Jahrb. der Kunstsammlungen des allerhöchsten Kaiserhauses Bd. II, S. 41 fg., zuletzt von A. W. Curtius „Der Stier des Dionysos" Inaugural-Dissertation der phil. Fac. zu Jena, 1882, und Thraemer „Dionysos in der Kunst" in W. H. Roschers Lexikon der Griech. u. Röm. Mythologie, von beiden ohne auf Stephani und Schneider Rücksicht zu nehmen.

Dionysos erscheint nach den bisherigen Annahmen 1) als vollständiger Stier, 2) als Stier mit Menschengesicht, 3) in menschlicher Gestalt mit Stierkopf, 4) in menschlicher Gestalt mit Stierhörnern und Stierohren, und 5) ganz besonders mit Stierhörnern allein, endlich 6) auch ohne Hörner mit großen Ohren oder ohne diese, mit anderen Theilen vom Stiere und mit angedeuteten oder verhüllten Hörnern.

1.

Die Auffassung des Gottes in der Gestalt eines vollständigen Stieres erhellt deutlich aus Schriftstellen, namentlich aus dem Gebet der Elischen Frauen bei Plutarch Quaest. Gr. 36 und de Isid. et Osir. 35. Der an erster Stelle vorkommende Umstand, daß Dionysos mit den Chariten kommen möge, macht es durchaus wahrscheinlich, daß der Stier auf dem schönen geschnittenen Steine in den Denkm. d. a. Kunst II, 33, 383, den Gott selbst darstellen solle. Dieses gilt ebenfalls wohl von dem ebenda unter n. 382 wiederholten geschnittenen Steine und den entsprechenden von Stephani a. a. O. S. 123, A. 1 angeführten. Wenn dann Stephani meint, daß der auf Münzen von Kyzikos „zwar ohne bakchische Attribute, aber doch in der Stellung des ὑβριστής“ angebrachte Stier wohl den Dionysos selbst darstellen könne, wie Panofka Ann. dell' Inst. T. V, p. 282 vermuthet, so ist diese Beziehung auch von Thraemer a. a. O. S. 114 für wahrscheinlich gehalten, und gewiß mit Recht. Auch auf der von Head Hist. num. p. 344 beschriebenen Drachme von Phlius, welche von ihm ungefähr zwischen 430—322 v. Chr. gesetzt wird, ist der ohne ein Bakchisches Attribut dargestellte Stier mit gesenktem Haupte sicherlich als Dionysos zu fassen. Der Flußgott Asopos, an den Head auch denkt, kann gegen jenen nicht in Betracht kommen. Münzen von Phlius aus der Kaiserzeit zeigen auf der Vorderseite den Kopf des Dionysos und auf der Rückseite einen stoßenden Stier und den Thyrsos oder auf der Vorderseite einen stoßenden Stier und auf der Rückseite Epheu und Trauben (Imhoof-Blumer und Percy Gardner Numism. commentary on Pausanias reprinted from the journal of Hellenic studies I, 1885, p. 32, n. 5). Für den letzteren Fall scheint es, daß der Stier als der Gott selbst zu fassen sei, hinsichtlich des ersten wird man wohl nicht anstehen den Stier als Attribut des Gottes zu fassen, wie auch den stoßenden Zebu auf dem Revers der Münze den Kibyraten mit der Büste des Dionysos auf dem Avers bei Imhoof-Blumer Griech. Münzen, in den Abhandlungen der philos.-philol. Classe der K. Bayer. Akad. d. Wissensch., München 1890, n. 72. Zu den Darstellungen des Dionysos in vollständiger Stiergestalt hat man auch den bekannten βοῦς θούριος auf den Münzen von Thurium gerechnet (auch Welcker Griech. Götterlehre II, S. 599). Aber die gehörige Aufmerksamkeit auf die Nebentypen (vgl. namentlich das in Catal. of the Greek coins in the Brit. Mus., Italy, p. 293, 70 beschriebene Exemplar) zeigt deutlich, daß es sich um den Flußgott Krathis

handelt. Vgl. auch Head Hist. num. p. 72. Als vollständiger Stier oder als Stier mit menschlichem Gesichte wurde er nach Plutarch de Iside et Osir. 35 zu urtheilen noch in späterer Zeit von den Hellenen gebildet; denn wenn es hier heißt *ταυρόμορφα Διονύσου ποιοῦσι ἀγάλματα πολλοὶ τῶν Ἑλλήνων*, so läßt sich das erste Wort unmöglich als nur „stierhörnige“ fassen, wie Thraemer a. a. O. S. 1151 will, und schon Welcker A. Denkm. V, S. 37 und Griech. Götterlehre II, S. 598 annahm, dem R. Schneider im Jahrb. a. a. O. S. 45, 6 sich anschließt.

2.

Ueber den Stier mit dem Menschengesichte auf den Münzen von Unteritalien und Sicilien hat in neuerer Zeit besonders ausführlich gesprochen Streber in den Abhandlungen der philos.-philol. Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften Bd. II, S. 453 fg., und später kürzer H. Nissen „Das Templum“, 1869, S. 132 fg., A. W. Curtius a. a. O. S. 23 fg. und Andere; vgl. Thraemer a. a. O. S. 1150. Es steht fest, daß die meisten Darstellungen dieser Art sich auf Flußgottheiten beziehen, namentlich die auf den Münzen Unteritaliens. So urtheilte schon O. Jahn in der Arch. Ztg. 1862, S. 313 fg. und nicht anders Stephani a. a. O. S. 115. Dennoch hat man noch in neuester Zeit betreffs der Darstellungen auf Münzen Campaniens, namentlich der Stadt Neapolis, an den Bachus Hebon gedacht, vgl. Head Hist. num. p. 33[1]). Selbst Stephani, der übrigens die in Rede stehende Bildung dem Dionysos nur als Wassergott zustehend betrachtet, ist a. a. O. S. 118 geneigt den Averstypus einer Münze von Katane auf diesen Gott zu beziehen. Die Münze ist die in der ersten Ausgabe der Denkm. d. a. Kunst II, 33, 380 nach Streber a. a. O. wiederholte. Der Typus wurde schon von Anderen auf den Stierdionysos bezogen,

1) Die von Head gegebene Deutung bezieht sich zunächst auf die von ihm abbildlich mitgetheilten Darstellungen des schreitenden Stiers mit Menschengesicht. Aber sollte dieser Stier eine andere Beziehung haben wie der schwimmende (Catal. of the Gr. coins in the Brit. Mus., Italy, p. 95, 104, 109, 112, 398), der einmal nicht bloß schwimmend, sondern auch Wasser speiend vorkommt (Arch. Ztg. 1862, Taf. CLXVIII, n. 7) und ohne Zweifel als Flußgott zu betrachten ist? Der Stern, welchen der im Catal. p. 109 abgebildete auf den angegebenen Wogen schwimmende Stier am Körper trägt, findet sich auch über dem p. 119 des Catal. abbildlich mitgetheilten schreitenden Stier. Daß bei Hebon Stierbildung nicht nachweisbar ist, hat Jahn in der Arch. Ztg. 1862, S. 326, A. 47 bemerkt. Vgl. über denselben auch Welcker Griech. Götterl. II, S. 66, A. 135.

von Eckhel, von Streber, zuletzt noch von Curtius a. a. O. S. 27. Eine ganz ähnliche Münze beschreibt Percy Gardner Cat. of the Greek coins in the Brit. Museum, Italy, p. 42, n. 4, der p. 41 fg. auch Abbildungen von entsprechenden Münztypen derselben Stadt giebt, vgl. auch Head Hist. num. p. 114. Ueber dem Stier gewahrt man den knieenden Silen, unterhalb des Stieres nach Gardner eine pistrix. Andere Nebentypen bestehen in dem Zweig einer Flußpflanze, einem Flußfisch, einem Wasservogel. Der Silen bezieht sich nicht auf einen Stierdionysos, sondern geht nur das Wasser an. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß es sich um den Flußgott Amenanos handelt, wenn auch Head diese Beziehung nur als der auf den tauriform Dionysos vielleicht vorzuziehende betrachtet.

Ein anderes Bildwerk, hinsichtlich dessen es wahrscheinlich ist, daß auf ihm ein Stier mit Menschengesicht dargestellt sei, welcher sich auf den Wassergott Dionysos beziehe, ist das Gemälde auf der aus Nola stammenden Vase, welche aus der Sammlung Blacas in das Britische Museum übergegangen ist. Sie ist in Musée Blacas pl. 32 abgebildet und von Ch. Newton in den Guide to the second vase room P. I, p. 8, n. 46 so beschrieben: A female figure holding a hydria and sitting on a bull with human face, which approaches a large marble laver; an Androgynous winged figure is crowning the female figure; on the left, another female figure, with a mirror and an oinochoè; in the upper right-hand cornes, a veiled female figure looking through a window. Leider hat Stephani nicht gesagt, welche Umstände ihm die Beziehung des Stieres auf Dionysos wahrscheinlich machten. Newton läßt dahingestellt sein, ob man den Dionysos oder einen Flußgott zu erkennen habe. Es kann schwerlich zur Erklärung beitragen, daß der Stier mit Menschengesicht auch auf Nolanischen Münzen vorkommt. Auch die Beziehung der ganzen Darstellung ist schwer zu ergründen. Daß ein gewöhnlicher nicht sagenberühmter Flußgott gemeint sei, ist nicht wohl glaublich. Unter den Flußgottheiten würde nur Acheloos passen. Der Platz der Handlung ist der Vorplatz eines Palastes, welcher durch das Fenster mit dem herausschauenden Weibe angedeutet wird. Es scheint sich um eine Liebesgeschichte zu handeln. Liebschaften hatte Acheloos mehrere.

Ein sicheres Beispiel des Dionysos als Stier mit Menschengesicht erkennt Stephani S. 115 fg. auf einem auch von Streber a. a. O. S. 533 fg. auf Dionysos als Herrn der feuchten Natur bezogenen Carneol der Florentiner Sammlung, der mehrfach, auch

in unsern Denkm. d. a. K. II, 45, 578, abgebildet ist, s. Stephani a. a. O., A. 8. „Man sieht einen Stier mit menschlichem Antlitz in wilder Wuth durch die Fluthen galoppiren. Eine Maenade mit flatterndem Gewand sitzt auf seinem Rücken und sucht ihn mit der Spitze ihres Thyrsos zu noch größerer Hast aufzustacheln“. Stephani glaubt diese Darstellung auf den Argivischen Cult des Dionysos zurückführen zu müssen. Es ist mir aber geradezu unglaublich, daß die Mänade den Dionysos so behandeln solle, während es durchaus nicht unglaublich ist, daß sie einen Flußdämon so behandeln könne. Diese Dämonen können aber ebensowohl als zum Bacchischen Thiasos gehörend betrachtet werden wie Silen und die Nymphen. Man vergleiche auch den von einer Mänade zu wilder Eile angetriebenen Kentauren in den Denkm. d. a. K. II, 46, 594.

Dagegen könnte man recht wohl in Betreff des Vordertheils eines Stiers mit Menschenantlitz auf Münzen von Kyzikos an Dionysos denken, welche Darstellung Head Hist. num. p. 452 erwähnt, indem er sie mit der auf Münzen von Gela p. 121, Fig. 75 vergleicht. Warum auf den Münzen von Kyzikos ein Flußgott dargestellt wurde, ist schwer einzusehen. Dagegen paßt Dionysos auf diese Münzen vortrefflich, s. oben S. 368. Wenn man sich aber daran erinnert, daß auf denselben Münzen manche rein Attische Typen vorkommen, so wird man es nicht für unmöglich halten, daß der bei den Athenern so hoch verehrte Flußgott Kephissos oder auch der dort gleichfalls einen Cultus habende Acheloos gemeint sein könne.

3.

Stephani meint, daß Dionysos auch als Mensch mit Stierkopf gebildet sei und führt als entscheidend für diese Ansicht zwei nur durch Beschreibung bekannte Bildwerke an S. 119 fg.: 1) eine früher im Palazzo Grimani befindliche, jetzt verschollene Marmorbasis, welche von Fr. Thiersch Reisen in Italien S. 257 verzeichnet ist. Man gewahrte an der einen Nebenseite, umgeben von vier Frauen, ein Kind mit Stierhaupt. Thiersch bezeichnete es als Minotauros. Dagegen bemerkt Stephani, daß die Geburt und Pflege des Minotauros von der Sage nirgends betont werde. Als n. 2 erwähnt er das Gemälde im Inneren einer Kylix, welche sich früher im Besitze des Duc de Luynes befand, jetzt in der Nationalbibliothek zu Paris aufbewahrt wird. Das Gemälde ist beschrieben von E. Braun im Bullett. arch. 1847, p. 121, vgl. Gerhard's Arch. Anzeiger 1847, S. 9*, von Panofka ebenda S. 22*,

n. 15, nach welchem die Pasiphae „mit Strahlenkrone geschmückt“ ist, und nach J. de Witte in der Arch. Zeitung 1850, S. 213, n. 9. Hier heißt es über das Innenbild: „Pasiphaë sitzend, mit dem kleinen stierköpfigen Minotaur auf ihrem Schoß; sie ist myrthenbekränzt und langbekleidet und drückt in Gesicht und Bewegung ihr Entsetzen über den Neugeborenen aus. Aufgehängt ist eine Cista; zu Pasiphae's Füßen ein Schwan“. Später ist das Innenbild abbildlich mitgetheilt und ausführlich besprochen von Fr. Lenormant in der Gazette archéol. cinq. année 1879, pl. 3 als naissance de Zagreus, wo auch die Außenbilder der Schale mitgetheilt sind auf pl. 4 und 5 p. 18 fg.[1]). Er folgt also der Deutung von Stephani. Dieser findet es unbegreiflich, daß in diesem Bilde allgemein die Geburt des Minotauros vorausgesetzt sei, nicht die des Dionysos; „denn nicht nur ist dem kleinen Gott eine Gans oder ein Schwan beigesellt, sondern es sind auch die in den Bildern der Außenseite auftretenden Personen sämmtlich vollkommen deutlich bezeichnete Satyrn und Maenaden, welche Thyrsos-Stäbe und Glieder eines Menschen in den Händen halten, den sie in wilder Raserei zerrissen haben“. Auch Rob. Schneider äußert im Jahrb. a. a. O. S. 45 in Bezug auf das Innenbild der Kylix: „man gab ihm (dem Dionysos) vielleicht auch die Form des Minotauros, auf dem Menschenleib das Stierhaupt“. Es ist allerdings aus mehreren Gründen wahrscheinlich, daß Dionysos Zagreus, nicht der Minotauros, gemeint sei. Das wesentlichste Bedenken gegen jenen erregt der Stierkopf. Doch glaubt Stephani diesen bei Dionysos auch durch Schriftstellen belegen zu können. Er bemerkt, daß von Dionysos bei Tzetzes z. Lykophr. 1237 gesagt werde: *ταυροκέφαλος φαντάζεται καὶ ζωγραφεῖται καὶ ἐν Εὐριπίδῃ· καὶ σῷ κέρατα κρατὶ προσπεφυκέναι*, und weiter: *ταυρόκρανος δὲ ζωγραφεῖται καὶ φαντάζεται ἢ κερασφόρος*. Aber die Worte des Euripides sind ohne Zweifel von menschlicher Gestalt mit Stierhörnern zu verstehen und an der zweiten Stelle soll das *ἢ* gewiß

1) Außer den obigen beiden Darstellungen giebt es noch eine dritte, welche auf den Minotauros als Kind bezogen ist. Dieselbe befindet sich auf einem Etruskischen Relief von einer Todtenkiste, über welches schon O. Jahn Arch. Beitr. S. 240 nach der Sammlung von Zeichnungen im Berliner Museum Mittheilung gemacht hat. Stephani meint aber S. 120, A. 4, man könne sich über das Relief gar keine Meinung bilden, so lange nicht einmal gewiß sei, ob das Kind einen Stierkopf habe oder nicht. Das ist sehr verwunderlich, da Jahn denselben ausdrücklich bezeugt. Auch Gerhard im Arch. Anz. 1847, S. 9* zweifelt nicht an dem Stierkopfe und bemerkt, daß schon Inghirami das Kind auf Minotauros gedeutet habe.

nicht so zu fassen sein als sei κερασφόρος von ταυρόκρανος verschieden. Vgl. auch Tzetzes zu Lykophr. 209: Ταύρῳ· τῷ Διονύσῳ, ὅτι κερατοφόρον αὐτὸν γράφουσιν, ὡς καὶ Εὐριπίδης καὶ σῷ κέρατα u. s. w. Die Stellen des Nonnos Dion. VII, 321 u. XVIII, 95, in denen Dionysos βούκραιρος genannt wird, will Stephani nicht auch veranschlagen, obgleich „man meinen sollte, daß Nonnos von einem vollständigen Stierkopf spreche“, weil dieser Dichter bei der Wahl seiner Ausdrücke mit so wenig Sorgfalt zu Werke gegangen sei, daß man nichts daraus schließen könne (was doch gewiß zu viel gesagt ist). Das Wort βούκραιρος ist ohne Zweifel von Stierhörnern zu verstehen, vgl. Nonn. Dion. XXVII, 24 ἰσόκραιρος. In dem Hymn. Orph. XLV (44) Herm. wird Dionysos als ταυρομέτωπος bezeichnet. Damit ist gewiß nicht gemeint, daß der Gott einen Stierkopf habe, sondern nur, daß er mit Stierhörnern an der Stirn versehen sei, und wesentlich dasselbe bedeutet auch ταυρόκρανος. Inzwischen steht es doch fest, daß Zagreus mit Hörnern am Kopfe gedacht wurde, vgl. Orph. hymn. XXX, 3, Nonn. Dion. VI, 165, 209. Außerdem heißt er ταῦρος Clemens Alexandr. Protrept. II, p. 14 Potter, vgl. auch Lycophr. Al. 209 und Nonn. Dion. V, 564, und ταυρόμορφος Clem. Al. Prot. II, p. 14; vgl. auch Arnobius adv. gentes V, 21.

4.

Außer den Hörnern erscheinen als einziger thierischer Bestandtheil am menschlich gebildeten Kopfe des Dionysos die Ohren.

Diese finden sich nicht bloß bei dem bärtigen Dionysos, sondern auch bei dem unbärtigen.

Bärtige Köpfe a) in Hermen: Ammon und Dionysos im Berliner Mus. (Conze Verzeichn. der ant. Skulpt. n. 11), abgebildet in Mon. inedit. inst. arch. IV, 49 und Ann. 1848, tav. J, jetzt auch in der Beschr. der ant. Skulpt. des Kgl.. Mus. zu Berlin S. 9 zu n. 11. Archaistische Herme im Lateranens. Mus. (vgl. Benndorf u. Schöne S. 402, n. 599). b) auf Etruskischen Bronzeschildern wie dem in den Denkm. a. Kunst I, 60, 303, in Betreff deren O. Jahn Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wissenschaften 1854 S. 49 an eine Satyrmaske denkt, während Stephani a. a. O. S. 114 fg. gewiß wahrscheinlicher eine Dionysosmaske annimmt, sowie an einem Bronzekopf bei E. v. Sacken die ant. Bronzen des K. K. Münz- und Ant.-Cab. in Wien Taf. XXVI, n. 6, in Betreff dessen Thraemer a. a. O. die Beziehung auf Dionysos abweist. Ein ähnlicher Kopf auf einer Münze stellt Acheloos dar (Arch. Ztg. 1862, T. CLXVIII, n. 10). c) in Terracotten wie die bei Pa-

nofka Terracotten des Berl. Mus. Taf. 47 und im Bull. arch. Napol. T. III, t. 5, vgl. Stephani a. a. O. d) auf geschnittenen Steinen: Raspe Cat. n. 4179, Toelken Erkl. Verz. III, 3, 927 = Denkm. d. a. K. II, 33, 379. Diese Köpfe sind von Raspe und Toelken für die eines Dionysos gehalten. Winckelmann bezieht jedoch den Berliner in der Descr. d. pierr. grav. de Stosch. p. 327 zu Cl. III, n. 75 auf den Minotauros und Stephani bemerkt gegen die Deutung auf Dionysos a. a. O., S. 114, daß man wenigstens mit gleichem Rechte auch an einen Flußgott denken könnte. Das ist allerdings richtig. Auch H. Blümner erklärt sich gegen einen Dionysos zu Lessing's Laokoon S. 121. Er ist wegen des Gesichtsausdruckes und des struppigen Bartes eher geneigt ein „satyrhaftes Wesen“ anzuerkennen, was minder wahrscheinlich ist. Desgleichen lehnt Thraemer a. a. O. S. 1150 die Beziehung auf Dionysos ab, weil der Kopf rohen Gesichtsausdruck und Stierohren zeige, die seines Wissens auf Doppelköpfe des Dionysos und Ammon beschränkt seien, von welchen beiden Gründen der erste unzulänglich, der andere irrig ist. Die Möglichkeit daß es sich um einen Dionysos handele, wird ebenso wenig in Abrede gestellt werden können wie die, daß ein Flußgott gemeint sei. — Wir erwähnen schließlich hier eine nur etwas bärtige Bronzebüste mit eigenthümlichem wilden Gesichtsausdruck zu Neapel (Bronzi d' Ercolano T. I, t. V) mit Stierhörnern und Stierohren. Sie wird von Welcker A. Denkm. V, S. 38 fg. ohne Bedenken auf Dionysos bezogen. Nach R. Schneider, Jahrb. a. a. O. S. 46, ist sie unter allen bekannten Bildern des Dionysos dasjenige, welches die Charakteristik desselben nach dem Thierischen hin am weitesten durchführt. „Der Kopf, welchem das mystische Attribut der um Rücken und Schultern sich ringelnden, von der erhobenen Rechten gefaßten Schlange noch phantastischeres Aussehen verleiht, ist nach rechts geneigt, heftig zurückgeworfen und richtet den Blick in die Höhe. Außer den aus dem struppigen Haupthaar hervorstehenden Hörnern und den schräg abstehenden Thierohren erinnert der Hals noch weit entschiedener als an der Maske aus Gizeh (s. u. S. 382 fg.) an die Wamme des Stiers; des ungeachtet setzt sich ein menschliches Bruchstück daran. Haar wächst auf der Stirn über der dicken Nasenwurzel, als kurzer Backenbart unter den Ohren, auf der Brust und um den Brustwarzen“. Stephani äußert im Compte rend. p. 1863, p. 103, minder bestimmt, man werde die Büste in Folge der als Attribut hinzugefügten Schlange vielleicht auf den jugendlichen Dionysos beziehen können [1]).

1) Daß gerade die Schlange für diesen beweiskräftig sein soll, erscheint be-

Unbärtige Köpfe. a) Doppelherme des Ammon und des jugendlichen Stier-Bacchus im Palazzo Giustiniani Orsato Recanati sulle Zattere in Venedig, 19 cm hoch („die Hörner des Dionysos liegen in dem aufstehenden mit der corona tortilis geschmückten Haare und sind gleich den Thierohren abgestoßen“, wie R. Schneider „Ueber eine Bacchische Maske aus Cilli“ in den Mitteilungen der K. K. Central-Commission zur Erhaltung und Erforschung der Kunst- und historischen Denkmäler. Jahrg. 1885, S. 86, A. 2 bemerkt). Doppelbüste beider Gottheiten früher im Besitz des Ritters Azara, jetzt unbekannten Aufbewahrungsortes, abgebildet im Mus. Pio-Clem. Vol. V, tav. A, n. 3. Desgleichen in Madrid, s. Overbeck Griech. Kunstmythol. I, S. 287 fg. n. 37. Drei Doppelhermenköpfe im Berliner Mus. (Conze Verzeichn. d. ant. Skulpt. n. 13. 14. 15). Der eine bärtige Kopf stellt ohne Zweifel den Ammon dar, der andere unbärtige mit thierischen Ohren und kurzen Stierhörnern nach den Meisten Dionysos, nach Einigen den Triton. Diese letztere Deutung wurde von K. Bötticher aufgestellt im Nachtrag zum Verz. der Bildhauerwerke in Berlin 1867 n. 985 fg. bes. 987. Overbeck, der im Atlas zur Kunstmyth. III, 12 Abbildung von einem Exemplare gegeben hat, bemerkt im Texte a. a. O. S. 287, wenngleich für diese neue Deutung auch keine zwingende Nothwendigkeit vorzuliegen scheine, so lasse sich nicht verkennen, daß Manches für dieselbe spreche. Auch Conze läßt unbestimmt, ob Dionysos oder Triton gemeint sei. Al. Thiele führt in dem Verz. der Sammlung Bergau mit vertieft geschnittenen Steinen die „Doppelherme des unbärtigen jugendlichen Ammon und des unbärtigen stiergehörnten Triton an, von welcher er auf Tafel I, n. 1 eine Abbildung giebt. Vermuthlich rührt die Benennung „Triton“ von den drei eben erwähn-

---

denklich, wenn Thraemer a. a. O. S. 1111 mit Recht behauptet, daß die Schlange neben der Gestalt des Dionysos keine Rolle spiele. Aber diese Behauptung ist irrig, wenn es auch wahr ist, daß die Schlange als Attribut des Gottes nur selten vorkommt. Als solches erscheint sie auf Vasenbildern (vgl. Gerhard Auserl. Vasenb. I, 63 = Denkm. d. a. K. II, 37, 433, und Fröhner Les musées de France pl. 6, welches in der zweiten Ausgabe der Denkm. II, 433 wiederholt ist), denn daß es sich hier um eine Andeutung der Verwandlung des Dionysos handele (Thraemer S. 1095 nach Robert), ist gewiß irrig. Auf einem Berliner geschnittenen Steine richtet sich nach Toelken Erkl. Verz. Kl. III, 3, 960 neben dem Bacchus am Boden eine Schlange auf. Die Marmorstatuette des Dionysos mit der Stierhaut bei Welcker A. Denkm. V, Taf. II hat eine Schlange neben sich, die sich um einen Baumstamm windet. Ich zweifle nicht daran, daß die Herculanensische Bronze sich auf Dionysos bezieht; an einen Sabazios wird schwerlich zu denken sein.

ten Doppelhermenköpfen her. Für die Beziehung der Berliner Köpfe auf Dionysos spricht sich aus einleuchtenden Gründen auch R. Schneider Jahrb. S. 47 aus. Der beste der Köpfe n. 14 ist nach Kekulé Beschr. S. 10 „von edlem Typus pathetisch erregt aufwärts blickend". Auch die Gemme Bergau stellt nach der Abbildung zu urtheilen gewiß nicht den Triton sondern den Dionysos dar. — Desgleichen in der Galler. geogr. des Vatican, vgl. Gerhard Beschr. d. Stadt Rom Th. II, 2, S. 281, n. 33, Stephani Compte rend. pour 1862, p. 77 fg., Overbeck a. a. O., S. 289 fg., ungenügende Abbildung bei Pistolesi Il Vaticano descr. ed illustr. Vol. VI, t. 103. Während Gerhard und Stephani an dem Dionysos nicht zweifeln, meint Overbeck, daß die Doppelbüste ganz aus diesem Kreise zu entfernen sei, gewiß mit Unrecht. Der stiergehörnte Kopf ist, wie R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 47 bemerkt, der auch an der Hiehergehörigkeit der Doppelherme nicht zweifelt, sehr breit, mit stark hervortretenden Backenknochen, von finsterem Ausdrucke; seine Ohren stehen aufrecht, seine Hörner sind im weiten Abstande von einander im struppigen Haare angebracht, nach vorne gerichtet und etwas gewunden; die Stirnleiste zwischen denselben scheint angedeutet zu sein. b) Bronzekopf: „Kopf des sehr jugendlichen gehörnten Dionysos mit Thierohren und mit einem Diadem geschmückt, oben ein Henkel", (R. Gaedechens die Antiken des Fürstl. Waldeck'schen Museums zu Arolsen n. 113. c) Antefix aus Terracotta aus Tarent: Journal of Hellenic studies IV, pl. 32. d) Geschnittener Stein und Paste: Catal. du mus. Fol, Antiq. P. II. Genève 1875, p. 156 fg., n. 1957 u. 1960.

5.

Viel häufiger wird Dionysos nur mit Hörnern versehen auf den Bildwerken gefunden, wenn auch lange nicht so oft als man nach den Schriftstellern erwarten sollte, und zwar namentlich der unbärtige und jugendliche, aber auch der bärtige.

Dieser letztere findet sich in der Doppelherme des Mus. Chiaramonti des Vaticans, welche bei Nibby Mus. Chiaram. Vol. III, t. VIII nicht eben getreu abgebildet ist und als „Zagreo e Dionysio" gefaßt wird.

Man findet den bärtigen gehörnten Dionysos ferner in Doppelmasken auf Gemmen. So auf einer Paste und einem Iaspis zu Göttingen, vgl. G. Hubo Originalwerke der arch. Abt. d. arch.-numism. Instituts der Georg-Augusts-Universität n. 1528 u. 396

und Bernhard Müller Dreizehn Gemmen der Göttinger Universitätssamml., Abbild. n. 2 u. 1. Von Al. Thiele Die Samml. Bergau S. 11, n. 206 wird ein „Doppelkopf des Silen und des bärtigen gehörnten Bacchus“ angeführt; doch nimmt sich der letztere Kopf in der Abbildung auf Taf. III eher als der des Pan aus.

Auch Münztypen gehören hierher. Freilich hat man einige früher mit Unrecht in Anschlag gebracht. Wenn Welcker A. Denkm. V, S. 39, A. 18 schrieb: „der bärtige Dionysos soll gehörnt nur auf Münzen von Naxos vorkommen“, so irrte er zwiefach. Bisher ist keine derartige Münze von Naxos bekannt geworden. S. auch Stephani im Compte rend. p. 1863, p. 113. A. W. Curtius nahm an dem bärtigen gehörnten Dionysos einer Boeotischen Münze, die nach Pellerin Rec. T. I, pl. 24, 8 in den Denkm. d. a. K. II, 33, 378 abgebildet ist, keinen Anstoß. Aber schon Stephani bemerkte a. a. O., es bleibe sehr ungewiß, in wie weit jener Abbildung Pellerin's Glauben beizumessen sei. Thraemer vermuthet a. a. O. S. 1150 mit größter Wahrscheinlichkeit, daß man das Horn in der Abbildung Pellerins nur für ein verkanntes (weil schlecht erhaltenes) Epheublatt (resp. Ranke) halten kann. Ohne Zweifel gehört diese Münze nicht hierher. Erst in neuester Zeit ist der bärtige gehörnte Dionysos mit Sicherheit auf Münzen nachgewiesen worden von Imhoof-Blumer „Griech. Münzen“ in den Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wissensch., München 1890, der S. 628 fg. sein Vorkommen auf Münzen von Skepsis dargethan und solche auf Taf. VIII, n. 6 fg. abbildlich mitgetheilt hat.

Ungemein viel größer ist die Zahl der Darstellungen des gehörnten unbärtigen Dionysos selbst nach Abzug der fälschlich oder unsicher hierhergezogenen Beispiele. Ueber alle ihm bekannten Fälle, deren Zahl aber von uns bedeutend vermehrt werden wird, hat Stephani a. a. O. p. 111 fg. gesprochen. Hier sind auch die verdächtigen oder unsicheren Beispiele als solche bezeichnet, doch hat auch er manche mit Unrecht hierhergezogen. So — um hier nur ein sicheres anzuführen — p. 111, A. 1 die ithyphallische Herme auf dem Vasenbilde bei Gerhard Hermenbilder Taf. V, n. 2 = Ges. Abhandl. LXXVII, 2, in welcher Gattung der Kunstübung überall kein stiergehörnter Dionysos nachzuweisen ist (vgl. auch Thraemer S. 1151). Die betreffende Herme stellt den Hermes dar, wie ich schon vorlängst einsah und nachher auch bei Thraemer a. a. O. S. 1122 u. 1151 bemerkt fand. Ueber einige andere vermuthlich auch nicht hierhergehörende Bildwerke wird besser im Folgenden gehandelt werden können.

Wir betrachten zunächst die Werke aus Marmor oder anderem Stein. Einen Kopf, „der vermuthlich einer Statue angehört hat und dessen Züge einen dem Apoxyomenos verwandten Typus tragen“, verzeichnen Benndorf und Schöne „Die ant. Bildw. des Lateran. Mus.“ S. 153, n. 236*. Eine „Doppelherme des bärtigen und des gehörnten unbärtigen Dionysos in der Galleria dei Candelabri des Vatican (n. 360)“ erwähnt mit dem Zusatze „das Gesicht des Letzteren ist breit, aber nicht satyresk; vom Haare hängen Lemnisken auf die Brust herab; das linke Horn ist ergänzt“ R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 48. Eine Doppelherme aus Marmor in Pompeji wird im Bull. dell' inst. arch. 1847 p. 138 = Arch. Ztg. 1847, S. 148 bezeichnet als „Bacchus Hebon und der jugendliche mit Stierhörnern“. Eine Marmorherme mit Stierhörnern zwischen den Haaren im Vatican ist nach Mus. Pio-Clement. T. VI, t. 6, n. 1 abgebildet in den Denkm. d. a. K. II, 33, 376 = 379 d. zweit. Ausg. Eine andere Abbildung in Hirt's Bilderbuch Taf. X, n. 3. Durch R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 48 erfahren wir: „der Mund ist etwas geöffnet, so daß die obere Reihe der Zähne sichtbar wird“. Schneider äußert ferner, in dem freundlich lächelnden Gesicht vermöge er nicht „fast satyrartige“ Züge zu erkennen und glaube, daß E. Q. Visconti a. a. O. p. 10 das Werk im Ganzen genommen getreuer charakterisiere, wenn er sage: il volto del dio di Nisa mantiene la sua bellezza e la sua gioventù, ma le sembianze di lui non han nulla di femminile ed una maschia venustà si diffonde sul suo volto e sulle sue forme, qual conviene a quella mescolanza di toro; della quale non solo ritiene le picciole corna, ma i capelli irti in mezzo alla fronte, e'l collo toroso e largo simigliante assai a quello d'Ercole: oltrediccið le labbra tumide alquanto, e rilevate più del dovere; acorescono anch' esse, senza altrarne gran fatto la beltà, quella rassomiglianza e il carattere di quel misto sì artificioso. Hirt erwähnt S. 79 nach Visconti eine ganz ähnliche Herme, an welcher die Hörner ursprünglich aus anderem Material eingesetzt gewesen zu sein scheinen. Er meint die in der Descr. de la Villa Albani aujourd'hui Torlonia, Rome 1869, p. 22, n. 119 (vgl. Beschr. der Stadt Rom III, 2, 460) als die d'un personnage inconnu bezeichnete Herme von „Griechischem Marmor“. Eine andere Wiederholung sah ich im Jahre 1846 zu Poggio Imperiale, über welche sich bei Dütschke Ant. Bildw. in Oberitalien II, S. 47 fg. keine Auskunft findet. Ich notirte mir „Büste des stiergehörnten Bacchus mit der corona tortilis, Haar vor der Stirn ganz gleich wie bei der in den Denkm. d. a. K. II, 33, 376, die Neigung des Hauptes nach links noch

etwas tiefer, das Gesicht (mit tief ausgeführten Augensternen) noch finstrer, die Hörner abgestoßen. Eine vierte Wiederholung fand ich im J. 1873 im Varvakion zu Athen, vgl. Fr. Wieseler Arch. Bericht über seine Reise nach Griechenland S. 52, welche im Sybel'schen Catalog nicht erwähnt ist. Auch der oben an erster Stelle der Marmorwerke aufgeführte Kopf des Lateran. Mus. gehört sicherlich hierher. Eine anscheinend ähnliche Herme des Lateran. Mus. beschr. von Benndorf und Schöne S. 348, n. 489* zeigt über der Stirn aus dem Haar statt der Hörner Epheutrauben hervorstehend. Auch an der früher als Ariadne, jetzt mit Recht als Dionysos gefaßten Büste des Capitolin. Mus. (Denkm. d. a. K. II, 33, 375 = 377 d. zw. Ausg.) aus hellenistischer Zeit wird noch jetzt das Vorhandensein von Hörnern als sicher angenommen, obgleich schon C. Friedrichs an dem Berliner Gipsabgusse die Hörner vergebens suchte, vgl. Bausteine zur Gesch. d. Griech.-Röm. Plastik I, n. 628. In der Ausgabe dieses Werkes von Wolters wird n. 1490 für möglich, wenn auch nicht sicher gehalten, daß der Künstler unter dem Haare versteckt kleine Stierhörner angebracht habe. Eine genaue Untersuchung des Originals, die ich im Anfang des J. 1846 in Gemeinschaft mit einem Freunde unternahm, zeigte, daß von Hörnern keine Spur vorhanden ist. Die Büste eines jugendlichen Dionysos mit Hörnern, die über der Stirn hervorsprießen (nicht „am Diadem befestigt“ sind, wie Blümner Lessing's Laokoon S. 104 angiebt) aus grünem Basalt im Berliner Mus. (Conze Verz. d. ant. Skulpt. S. 28 n. 120), abgebildet in Beger's Thes. Brandenburgicus III, p. 240, bei Hirt Bilderbuch S. 23, Vign. 2 und danach in der zw. Ausg. der Denkm. d. a. K. IV, 33, 378, so wie eben in der Beschr. d. ant. Skulpt. des K. Mus. zu Berlin zu n. 120, ist nach Conze „vielleicht moderner Arbeit“, wie auch Puchstein bei R. Schneider Jahrb. S. 48 sie als „des modernen Ursprungs nicht ganz unverdächtig“ bezeichnet, und Kekulé als „vielleicht moderne Arbeit“. Eine Marmorbüste des jugendlichen gehörnten Dionysos befindet sich in der Marciana zu Venedig, vgl. Nachrichten von der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1874, S. 587. Ein kleiner mit Epheu und Weintrauben bekränzter, mit Stierhörnern versehener Kopf zu Turin ist in denselben Nachrichten 1877, S. 671 verzeichnet, [in dem Dütschke'schen Verzeichniß habe ich ihn aber nicht finden können.

Auch in Reliefs kommt der jugendliche Dionysos gehörnt vor, wenn auch nur sehr selten. So, wie es scheint, auf dem Felsrelief von Philippi bei Heuzey et Daumet Mission arch. de Macédoine pl.

III, 2, Rev. arch. nouv. sér., Vol. XI, 1865, p. 450, einer spätern Griechischen Arbeit, vgl. Mission p. 79 fg. = Rev. arch. p. 449 fg., Thraemer a. a. O. S. 1111 fg.; vielleicht auch der in Hautrelief ausgearbeitete Kopf des Lateranens. Mus. bei Benndorf u. Schöne n. 240.

Ferner bringt man hierher mehrere Werke aus Thon. Stephani erwähnt im Compte rend. p. 1863, p. 111 ein Thongefäß, welches die Form eines jugendlichen mit Stierhörnern versehenen Kopfes habe, und bezieht diesen auf Dionysos. Es handelt sich um das in der Arch. Ztg. 1851, Taf. 32 abgebildete Gefäß. E. Gerhard hielt den Kopf für entschieden weiblich und war besonders geneigt ihn auf Kora zu beziehen (Arch. Ztg. 1851, S. 369 fg.). Aber wenn auch das Gesicht sich ganz weiblich ausnimmt, so erscheint doch das Haar mehr männlich und der Kalathos nebst anderem Kopfschmuck würde wohl zu einem Dionysos passen. Die Hauptsache ist, daß bei Annahme eines Weibes keine wahrscheinliche Deutung möglich ist. Das Gefäß soll nach Gerhard aus Unteritalien stammen. Dann glaubt Stephani a. a. O., daß die an den Voluten der unteritalischen großen Amphoren so häufig wiederkehrenden kleinen Köpfe mit weißen Stierhörnern den Dionysos darstellen, vgl. Stephani Vasensammlung der K. Ermitage Th. I, n. 351, S. 166, n. 354, S. 173, n. 423, S. 223, n. 778, S. 306, n. 787, S. 316, Th. II, n. 1286, S. 116. Die Köpfe sind regelmäßig dem Beschauer zugewendet. Uns scheinen Medusenköpfe gemeint zu sein, die in jenen späteren Zeiten auch mit Hörnern dargestellt wurden. Endlich nimmt Stephani im Compte rend. a. a. O. an, daß ein an einem kleinen schwarzen Thongefäße der Ermitage in flachem Relief dargestellter jugendlicher mit Weinlaub bekränzter und mit Stierhörnern versehener Kopf den Dionysos darstelle. Aber in dem später erschienenen Verzeichn. der Vasensammlung Th. I, n. 505 heißt es „ein jugendlicher Kopf mit reichem Haar, spitzen Ohren und kleinen Hörnern (Satyr)“. Sicher stehen folgende von Stephani meist nicht erwähnten Beispiele. Auf einer Lampe in den Lucernae fict. Mus. Passer. II, 37 ist die Büste des unbärtigen gehörnten Dionysos mit etwas in die Stirn herabfallendem Haare und finsterem Gesichtsausdruck dargestellt. Ein aus Kleinasien stammendes Terracottaköpfchen des jugendlichen gehörnten Dionysos im K. Antiquarium zu Berlin erwähnt nach Furtwängler R. Schneider a. a. O. S. 46, Anm. Eine Terracottenstatuette des gehörnten jugendlichen Dionysos mit Stierhörnern ist bei J. de Witte Rec. de terres cuites de Janzé pl. 23 abgebildet.

Mehr ist uns von hierhergehörenden Bronzen erhalten. Stephani erwähnt zwei Statuen Compte rend. p. 1863, p. 111 nebst

Anm. 4. „Die eine ist bei Clarac Mus. de sculpt. pl. 684, n. 1603“ oder vielmehr 1601, „die andere, an welcher sich die Hörner fast der Form von Ziegenhörnern nähern, in den Bronzi d' Ercolan. T. II, p. 203 und bei Piroli Ant. d' Hercul. T. V, pl. 27, Kayser Hercul. und Pomp. Th. V, 1, Taf. 101, Clarac Mus. de sc. pl. 770 A, n. 1919“, vielmehr 1909, „D abgebildet“. Aber die letztere betrachtet R. Schneider Jahrbuch a. a. O. S. 45 fg. A. 5 als entschieden nicht hierhergehörig; auch die andere wagt er nicht als sicher auf den gehörnten Dionysos bezüglich zu betrachten, „da in den beiden andern Abbildungen Bronzi di Ercolano Vol. II, t. XXXVI, Roux und Bouchet Herculanum et Pompêi T. V, Ser. 1, pl. XLVI die angeblichen Hörner wie zwei Haarlocken aussehen“. Dagegen kommt jedenfalls die Sitzfigur in der K. Ant.-Sammlung zu Wien aus der früheren Diadochenzeit in Betracht, welche E. v. Sacken in den arch.-epigraph. Mittheil. aus Oesterr. Jahrg. III, S. 128 fg., n. 2 auf den Stierdionysos bezieht, nachdem sie Furtwängler in den Mittheilungen des Deutschen arch. Instituts in Athen Bd. III, S. 294 Anm. für einen Diadochenkönig als Dionysos gehalten hatte. Die von Robert Schneider in dem Jahrb. a. a. O. S. 42 u. Taf. IV abbildlich mitgetheilte Figur wurde um 1877 im Peloponnes gefunden. „Sie zeigt uns den jugendlichen Gott, wie er sich auf ein Felsstück niedergelassen hat. Er ist nackt. Das um den linken Vorderarm gewickelte Gewand dient als weiche Unterlage auf dem rauhen Sitze und hängt über den nackten Oberschenkel herab. Der nach rechts gewendete Kopf, den gewohnten Bildungen des Dionysos wenig ähnlich, ist von breit und kräftig gebautem Knochengerüste und düsterem Ausdrucke. Eine tiefe von Schläfe zu Schläfe sich hinziehende Furche theilt die fleischige Stirne in zwei Hälften, deren untere ungefähr wie an den Köpfen des Zeus über der Nasenwurzel stark ausgebaucht ist. Die Nase ist klein, der Mund groß, die Lippen dick. Das Haar, aus dem rechts und links die kleinen Hörner des jungen Stiers hervorragen, schmiegt sich dem flachen, verhältnißmäßig kleinen Hinterhaupte an, umgiebt dasselbe mit den wirr durcheinander geworfenen Enden gleich einem Kranze, fließt rechts und links vom Gesichte in reicher Fülle über den starken Nacken herab und verleiht dem Kopfe, den es größer erscheinen läßt als er wirklich ist, ein fast majestätisches Ansehen. Blick und Wendung des Kopfes gelten offenbar der Figur, welche auf dem nach rechts sich fortsetzenden jetzt leeren Theile der Basis angebracht war. Am nächsten liegt es hier, an das Lieblingsthier des Dionysos, den Panther zu denken, der nach dem Becher oder nach der Traube

aufschaut, Dinge die vielleicht mit mehr Wahrscheinlichkeit in der erhobenen Rechten des Gottes vorausgesetzt werden dürften als Thyrsos oder Zepter". Sehr interessant ist das auf einem Throne sitzende Cultusbild des Dionysos aus vergoldeter Bronze, mit den Ansätzen (punte) zweier Hörner auf der Stirne (Sogliano Le pitt. murali Campane n. 241, in Pompei e la regione sotterrata dal Vesuvio Napoli 1879, P. 2, p. 131. Außerdem führt R. Schneider S. 48 an ein „Brustbild aus Bronze gefunden bei Essek um 1870, im Besitze des Herrn Julius Herz, 24 cm hoch und 26 cm breit. Es gehört der derberen Charakteristik des Weingottes nach sichtlich einer späteren Kunstepoche an. Der freundlichlächelnde Kopf ist nach rechts geneigt. Wangen und Kinn sowie die Brust sind von fast weiblicher Fülle. Das in der Mitte gescheitelte und mit einer Corona tortilis geschmückte Haar fällt in aufgelösten Strähnen auf die Schulter und ist mit Trauben schwer behangen. Winzige Hörnchen wachsen aus beiden Stirnhöckern heraus, und über dieselben zieht sich eine schmale Binde hin, welche sich jederseits im Haare verbirgt. Auf der linken Schulter ist das quer über die Brust laufende, mit besonderem Fleiß ausgeführte Ziegenfell geknüpft. Die Bronze ist vortrefflich erhalten, mit schöner Patina überzogen und obwohl nachhadrianischer Zeit angehörig, von guter, freilich etwas trokkener Arbeit. Sie ist hohl und war als Zierrath in senkrechter Lage an irgend einem Geräthe befestigt". Ein halblebensgroßer Kopf von Bronze mit sehr kleinen Stierhörnchen wird in dem Jahrb. d. K. Deutschen arch. Inst. Bd. V, Arch. Anz. 1890, 3, S. 91 erwähnt und abbildlich mitgetheilt von Furtwängler, der bemerkt, daß der Kopf in Kleinasien gefunden sei und eine Arbeit späterer hellenistischer oder frührömischer Zeit zu sein scheine. Zwei schöne Köpfchen auf einem durch die Künstlerinschrift interessanten Bronzeplättchen erwähnt Overbeck Pompeji S. 430 der vierten Aufl. Schönes Köpfchen aus der Gegend von Corneto Bull. d. inst. arch. 1866, p. 232. Besonders interessant ist der von R. Schneider im Jahrb. a. a. O. S. 44 abbildlich mitgetheilte und S. 43 fg. besprochene Bronzehenkel eines Gefäßes aus Aegypten im K. Mus. zu Wien: „Auf dem massiv gegossenen und trefflich erhaltenen, 25,5 cm hohen Henkel, erhebt sich in hohem Relief als ein ursprünglich in dem weichen Stoffe gesondert modellirtes Stück eine 9 cm hohe Maske des gehörnten Dionysos. Der nach rechts gewendete Kopf, dessen Bedeutung das Weinblatt außer Zweifel setzt, entnimmt außer den beiden Hörnern, welche spitziger und größer als an der peloponnesischen Figur, auch morpho-

logisch richtiger aus den Stirnhöckern hervorsprießen, dem Stiere noch die freilich nicht naturalistisch abstehenden, sondern mit der Spitze nach aufwärts gekehrten Ohren. Auch der Hals ahmt mit seiner schlaffen faltenreichen Haut entschieden die hängende Wamme des Stieres nach. In vollem Einklang mit der weitergehenden Aufnahme thierischer Formen sind auch die etwas finsteren Züge der Maske weit weniger edel als an dem Kopfe der Statuette. Im Gesichte überwiegen die unteren Theile, die Wangen sind voll, die Nase ist stumpf und fleischig. Die niedere Stirne ist zwar gleichfalls über Brauen und Nasenwurzel stark angeschwollen, giebt aber dem Kopf keineswegs das zeusartige Gepräge der peloponnesischen Figur. Das Haar ist spärlich und hinter Hörnern und Ohren unter Epheublättern verborgen [1]). „Masken des gehörnten Bacchus, wie es scheint“ am Schlusse der Henkel eines eimerförmigen Bronzegefäßes nach Friederichs Berlins ant. Bildw. II, S. 163, n. 679.

Von den hierher gehörenden Münzen ist sicher und belangreich die aus Bronze mit dem Brustbild des epheubekränzten unbärtigen Dionysos mit Stierhörnern an den Schläfen mit eigenthümlichem an die Marmore oben S. 374 fg. und die Lampendarstellung S. 380 erinnernden Gesichtsausdruck unter Seleukos I von Syrien geprägte, welche Percy Gardner The types of Gr. coins pl. XIV, n. 11 und Catal. of Gr. coins in the Brit. Mus., Seleucid. kings of Syria, pl. XXVIII, n. 1 herausgegeben hat und die zweite Ausg. d. Denkm. d. a. K. II, 33, 380 wiedergeben wird. Andere hierhergezogene Münztypen hat schon Stephani Compte rend. p. 1863, p. 112 fg. als nicht hierher gehörig oder unsicher bezeichnet. Anlangend die hier S. 113 erwähnten Bruttischen Münzen, so sind dieselben noch öfter besprochen oder abgebildet als er angiebt; zuerst von Eckhel Numi anecd. p. 41 u. t. III, 20, ferner von R. Stuart Poole Catal. of Gr. coins in the Brit. Mus., Italy, p. 321, welcher der betreffenden Figur in der Linken eine lange Fackel zuschreibt, von Friedländer und Sallet Münzkab. zu Berlin n. 548 = 752 d. 2. Aufl., welche angeben, daß die Figur in der Linken ein Scepter halte, von Garrucci, Mon. dell' Italia ant. t. CXXIV, n. 13 u. 14. Alle schreiben der Figur Hörner zu, Stephani bemerkt dagegen: „einige sehr wohl erhaltene Exemplare der kais. Eremitage lassen die vermeintlichen Hörner vielmehr als eine Zackenkrone erscheinen und so sind sie

---

1) Die obigen Beschreibungen R. Schneider's zeigen, daß die Angabe bei Friedrichs und Wolters a. a. O. n. 1730 irrig ist.

auch in den von Carelli gegebenen Abbildungen aufgefaßt". Das Attribut in der Linken ist weder als Fackel noch als Scepter aufzufassen, sondern als Speer. Die Figur ist früher theils als Dionysos theils als Flußgott aufgefaßt. Wenn Stephani äußert, es erscheine ihm sehr zweifelhaft, ob überhaupt an Dionysos zu denken sei, so kann ich nur zustimmen; vermuthlich ist Pan gemeint. Außer diesem Münztypus bezieht A. W. Curtius a. a. O. S. 20 den auf einer Münze von Gela (Streber a. a. O. S. 474. 477 und Kupfertaf.) dargestellten gehörnten jugendlichen Kopf, den Streber für den Flußgott Gelas ausgebe, für den jugendlichen Stierdionysos, während er den „Stiermenschen auf der Aversseite" für den Fluß Gelas hält. Aber das ist durchaus irrig, auch abgesehen davon, daß der Kopf gar nicht so aussieht, wie der eines Dionysos. Der unbärtige gehörnte Kopf kommt mehrfach auf der Vorderseite der Silber- und Kupfermünzen von Gela vor und ist als der Flußgott durch die Attribute und selbst durch Inschrift als Gelas bezeichnet. Der Typus auf der Rückseite der Kupfermünzen ist ausnahmsweise ein Stier mit menschlichem Gesicht, während sonst ein schreitender Stier vorkommt. Die Inschrift *ΓΕΛΣ* findet sich allerdings einige Male auf der Rückseite bei dem Stiere, aber dennoch ist dieser auch als der Flußgott Gelas zu betrachten, der also zwei Male, einmal als Mensch mit Stierhörnern, das andere Mal als vollständiger Stier dargestellt ist. Die Bildung als vollständiger Stier bezeugt Timäos in den schol. Pindar. Pyth. I, 135: *τὸν γὰρ ἐν τῇ πόλει δεικνύμενον (ταῦρον) μὴ εἶναι τοῦ Φαλάριδος, — ἀλλ' εἰκόνα Γέλα τοῦ ποταμοῦ.*

Von hierher gehörenden geschnittenen Steinen giebt es kein sicheres Beispiel. Vgl. Stephani Compt. rend. 1863, p. 113 fg. Wenn es hier p. 114, A. 1 heißt: „ein roh gearbeiteter Sard der Sammlung in Berlin (Toelken Verz. p. 186, n. 928) stellt vielleicht den jugendlichen Dionysos dar, allein die ihm gegebenen Hörner gleichen mehr den Ziegenhörnern als denen der Stiere", so erkannte schon Winckelmann Descr. d. pierr. grav. Stosch Cl. II, n. 1487, p. 239 die Ziegenhörner und bezog deshalb die Darstellung auf eine tête d'un Faune. Toelken, der von der Art der Hörner nichts sagt, zweifelt nicht an einem „Kopf des Bacchus". Er bemerkt indessen, daß der mit Epheu bekränzte Kopf einen strengen, fremdartigen Ausdruck habe und über der einen Schulter der Thyrsos, über der andern das Pedum erscheine. Dieses konnte allerdings auch dem Dionysos gegeben werden. Die Ziegenhörner sind aber unzweifelhaft. Stephani hat die oben S. 381 besprochene Bronzestatue aus Herculaneum, trotz seiner Wahrneh-

mung, „daß sich die Hörner fast der Form von Ziegenhörnern nähern“ unbedenklich als Dionysos gefaßt. Eine prächtige bärtige Bronzemaske aus Macedonien mit Ziegenohren bei Froehner Collect. J. Gréau, Catal. des bronzes ant. p. 36, n. 167 wird von dem Herausgeber p. 37 auf Dionysos bezogen. Er bemerkt, daß die Ziegenohren ein détail peu commun sei. Ich kenne es bei keinem anderen sicheren Dionysoskopf. Freilich hat Head Hist. num. p. 457 einen auf p. 456, F. 282 abgebildeten epheubekränzten unbärtigen Kopf mit Ziegenohren auf den jugendlichen Dionysos bezogen, aber er denkt auch an eine Bacchante und von Percy Gardner Types of Gr. coins zu pl. X, 40, wo derselbe Typus abgebildet ist, wird er nur auf eine Maenade bezogen. Man hat an eine Satyra zu denken, vgl. Nachr. der Kgl. Ges. d. Wissensch. 1890, S. 388. Die in Rede stehende früher im Besitz von Gréau befindliche Maske hat manche Aehnlichkeit mit der früher Milanischen und der von Cilli, welche R. Schneider zusammen herausgegeben hat. Auch diese haben thierische Ohren und sind wegen des Gesichtsausdrucks nicht auf Dionysos, sondern zunächst auf den Silen zu beziehen [1]. — Indessen wird im Cat. du mus. Fol. Ant., P. II, n. 1935 eine Paste als mit zwei kleinen Stierhörnern versehen bezeichnet, mit dem Zusatze la figure est rieuse, und n. 1941 das Fragment eines Onyx, an welchem man sur les tempes deux petites cornes gewahre.

Wie Philostratos Imag. I, 15 in der Beschreibung eines Gemäldes mit der Darstellung des Dionysos und der Ariadne jenem als sein Kennzeichen Hörner *ἐκ τῶν κροτάφων* (gewiß des Stieres) beilegt, so sehen wir auf einem Wandgemälde mit demselben Gegenstande (Bullett. Napol. nuov. ser. T. II, p. 67, Helbig Wandgem. d. verschütt. Städte v. 1239) den jugendlichen gehörnten Gott dargestellt. Ein anderes Pompejanisches Wandgemälde, das ihn als Cultusbild zeigt, ist schon oben S. 382 erwähnt. Auch Albricus Phil. de deor. imag. CXIX beschreibt ein Gemälde des Dionysos mit gehörntem Kopfe.

Auch ein aus Rom stammendes Mosaikbild ist bekannt durch die Abbildung bei Bartoli Le pitture ant. delle grotte di Roma tav. XX.

Darstellungen des Dionysos bloß mit Stierhörnern werden bei den Schriftstellern etwa seit der Mitte des fünften Jahrhunderts v. Chr. erwähnt. In Bildwerken sind sie vor der Zeit Alexanders des

---

1) Mit Unrecht werden diese beiden Masken bei Friedrichs-Wolters n. 2032 u. 2033 auf Dionysos bezogen.

Großen nicht nachzuweisen. Sie scheinen im Peloponnesos aufgekommen und namentlich durch Lysippos und dessen Schule ausgebildet zu sein, vgl. R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 50 fg., auch oben S. 378 fg.

In der Zeit der Diadochen finden wir auch diese mit Stierhörnern dargestellt, ohne Zweifel um sie als neue Dionysen zu bezeichnen. So zuerst Seleukos I von Syrien, vgl. die Münze in den Denkm. d. a. K. I, 49, 220 m = Catal. of the Gr. coins in the Brit. Mus., Seleucid. kings, pl. I, n. 6, und die ebenda n. 11 u. 13, die erste auch bei Head Hist. num. p. 638, F. 336. Dann Demetrios Poliorketes auf der Münze D. a. K. I, 50 p. 221 b, Head H. num. p. 202, F. 144, dem geschnittenen Steine des Brit. Mus. (Murray Cat. of engrav. gems pl. I. n. 1526, vgl. p. 171, und in der Bronzestatuette D. d. a. K. I, 50, 221 a, wenn dieselbe ihn wirklich darstellen soll. Ein gewiß nicht mit Recht auf Alexander bezogener Hermenkopf aus Herculaneum, abgebildet bei Comparetti e de Petra La villa dei Pisoni tav. XX, 3, stellt jedenfalls das heroisirte Porträt eines Diadochenkönigs dar. Dazu kommt noch der Marmorkopf eines gleichfalls unbestimmbaren Diadochen, zuletzt besprochen von Helbig „Die öffentlichen Sammlungen klassischer Alterthümer in Rom“ I, S. 173 fg., n. 247.

Von besonderem Interesse ist die Tetradrachme Seleukos' I. Der König trägt einen Helm von Stierleder mit dem Ohr und dem Horn eines Stieres daran (also auch hier wie oben S. 373 fg. die Verbindung von Stierhörnern und Stierohren). Wie kam der Künstler dazu, ihn so darzustellen? Nicht bloß A. W. Curtius a. a. O. S. 30, sondern nech Head a. a. O. S. 638 ist der Meinung, daß es geschehen sei in Rücksicht auf die Kraftprobe, welche Seleukos einst bei einem Opfer Alexanders ablegte, als er einen wilden den Fesseln entsprungenen Stier ganz allein aufhielt und mit den Händen tödtete (Appian. Syr. 57). Allerdings giebt Appian ausdrücklich an, daß deshalb der Statue des Seleukos Hörner beigegeben seien. Aber wer will das glauben? Alexanders siegreicher Zug nach Indien hatte die Sage von Dionysos' Siegen ebendort in Schwang gebracht. Dionysos wurde Kriegsgott und Triumphator, ein Schützer und Vorbild sieghafter Herrscher. Wie Alexander hatte auch Seleukos in Indien gesiegt. Daß er den Stierdionysos als seinen Schutzgott betrachtete, zeigt die oben S. 383 aufgeführte Münze, deren Revers den Seleukos darstellt, wie er zu Roß sitzend einen Feind niedergestoßen hat. Nun wurde auch Seleukos selbst als neuer Dionysos dargestellt. Auch Herrscher, die nicht in Indien gesiegt hatten, erhielten von den

Künstlern die Dionysischen Stierhörner. War doch der Gott überall siegreich und Verleiher des Sieges.

6.

E. von Sacken glaubt „Die ant. Bronzen des K. K. Münz- u. Ant.-Cab." in Wien S. 60, daß auch das Taf. XXIX, F. 14 abgebildete archaische Bronzewerk, welches ein Menschenantlitz mit Stiernacken zeigt, außerdem aufrechtstehende Ohren, aber ungehörnt ist, den Stierdionysos angehe. Ich kann unmöglich beistimmen, sondern bin überzeugt, daß ein Silen mit ὦτα μεγάλα ὄρθια gemeint ist.

Besonders interessant ist eine Münze von Skepsis, beschrieben und herausgegeben von Imhoof-Blumer in den Griech. Münzen, Abhandl. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch. München 1890, S. 629, n. 235 und Taf. VIII, n. 9. Während sonst auf den Münzen dieser Stadt der Kopf des bärtigen Dionysos gehörnt erscheint, trifft man das thronende Cultbild des Gottes dort nicht gehörnt, aber von zwei Stieren umgeben. Die Hörner am Kopfe des Gottes sind doch wohl nur deshalb weggelassen, weil die Beigabe der beiden Stiere auf den Stierdionysos hinwies.

Schon vorlängst ist darauf aufmerksam gemacht, daß in einer Berliner Marmorstatuette (Conze Verz. n. 93) die symbolische Beziehung des Stiers zu Dionysos dadurch bezeichnet wird, daß dem Gott als Anzug eine Stierhaut gegeben wird, vgl. Welcker Ann. d. inst. arch. 1857 p. 146 fg. = A. Denkm. V, S. 36 fg., Mon. ined. VI, t. VI, 1. 2 = A. Denkm. a. a. O. Taf. II.

Weiter hat man auch einen mit Wein bekränzten Kinderkopf aus rothem Marmor im Berliner Museum, der hinten in einen kleinen Stierkopf ausläuft, hierhergezogen; vgl. Arch. Ztg. 1851, Taf. XXXII, Welcker A. D. a. a. O., S. 39, Gaz. archéol. 1879, p. 27, Conze Verz. d. ant. Skulpturen d. Berl. Mus. n. 134, Kekulé Beschr. ders. n. 134.

Die Veranschlagung von Bildern des Dionysos mit angedeuteten oder verhüllten Hörnern rührt von R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 49 fg. her. Er führt unter dieser Kategorie auf die oben S. 379 erwähnte Herme des Lateranens. Mus. bei Benndorf und Schöne n. 489*, die oben S. 379 besprochene Büste des Capitol. Mus. [1]), die

1) Schon A. W. Curtius bemerkte a. a. O. S. 20 gegen Welcker's Ansicht: „Mit demselben oder mit noch mehr Recht könnte man dann auch den gelagerten Dionysos im Louvre Bouillon Mus. III, 9 und den Dionysos Mon. dell' Inst. VI, 6 für den gehörnten Dionysos ausgeben".

Herme des Dionysos Psilax im Berliner Mus.: „Die Buckel über der Stirne sollen zwar nach der Versicherung E. Brauns Kunstvorst. des gefl. Dionysos S. 3 nichts Anderes als die unter dem Tuche verborgenen Trauben des Epheukranzes sein, haben aber wie derselbe selbst zugesteht, fast „das Ansehen von Hörnern“. Conze spricht in den ant. Skulpt. des Berl. Mus. n. 119 von Resten einer Bekränzung von Epheu. Auch anderweitig wird die Braun'sche Angabe nicht bestätigt. Endlich veranschlagt R. Schneider das oben S. 379 fg. erwähnte Reliefbrustbild an der Felswand von Philippi, in welchem es sich aber um ein eigentliches Verhüllen der Hörner nicht handelt. Warum überall das Verhüllen der Hörner?

Die Hörner sind nicht stets und durchaus nöthig, sie können auch durch Gesichtsausdruck und sonstwie ersetzt werden.

Schließlich noch die Bemerkung, daß die Darstellungen des gehörnten Dionysos in Betreff des Gesichtsausdruckes und auch der Formen mannigfach wechseln. Der Ausdruck ist ein aufgeregter und mehr noch ein finsterer, aber nicht selten auch der gewöhnliche, ja auch ein freundlich lächelnder wie an dem Bronzebrustbilde aus der Gegend von Essek (oben S. 382) und vielleicht auch an der Paste Fol (oben S. 385). Vgl. dazu Schriftstellen, wie namentlich Ovid. Fast. III, 789: Mite caput, pater, huc placata que cornua vertas. Beispiele eigenthümlicher Formen oben S. 374, 378, 381, 382 fg.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November 1890.

(Fortsetzung.)

XV. Bericht der Naturforschenden Gesellschaft in Bamberg. Bamberg 1890.
Jahresbericht des Direktors des Kön. Geodätischen Instituts für April 1889 bis April 1890. Berlin 1890.
Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. 22. Heft. 1890. München 1890.
Jahrbücher der K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Officielle Publication. Jahrg. 1888. Neue Folge XXV. Bd. Wien 1889.
Die Wahrheit. Entwurf zu einer transcendentalen Logik von Anton Ganser. Graz 1890.
Skizzen zu einem werthvollen Luftschiff von J. Fr. Schön le Jeune in Wien. (2 Exempl.).

Anzeiger der Akademie d. Wissensch. in Krakau. 1890. Oktober. Krakau 1890.
Ungarische Revue. IX. Heft. 1890. Nov. 10. Jahrg. Budapest 1890.
Myriopoda Regni Hungariae. Elabor. Dr. Eugenius Daday de Deées. Budapest 1889.
Adatok a bor-és mustelemzés módszeréhez irta Dr. Ulbricht Richárd. Budapest 1889.
Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Band 15. Zürich 1890.
Nature. Vol. 43. Nr. 1096. 1100. (London 1890).
Proceedings of the London Mathematical Society (vol. XXI). Nos 388—390.
Collected mathematical papers of Arthur Cayley. Vol. III. Cambridge 1890.
Monthly notices of the R. Astronomical Society
a. Vol. L. N. 9. Supplementary number.
b. Appendix to Vol. L. London 1890.
Proceedings of the Cumbridge Philosophical Society. Vol. VII. Part. II. Cambridge 1890.
Proceedings ef the scientific meetings of the Zoological Society of London. Part. III. Mai and June 1890. October 1890.
Natural History of Victoria. Prodromus of the zoology of Victoria. Decade XX. by Fr. Mecoy. Melbourne & London 1890.
Académie Impériale de St.-Petersbourg. St.-Petersbourg 1890.
a. Bulletin Nouvelle série. I. (XXXIII). No. 4 et dernier.
b. Mémoires. Tome XXXVII. No. 11, 12, 13. Tome XXXVIII. No. 1.
Bidrag till kännedom of Finlands natur och folk. H. 48. Helsingfors 1889.
Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar. XXXI. 1888 — 1889. Helsingfors 1889.
Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique 60e année, 3e série, tome 20. N. 9—10. Bruxelles 1890.
Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. 9. deel. Nieuwe Reeks, 1. deel. 4. Aflevering. Leiden 1890.
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. No. 6. Coimbra 1889.
Note sur deux algues de la Méditerannée Fauchea et Zosterocarpus par M. Ed. Bornet. (Extrait de Bulletin de la Société botanique de France. Tome XXXVII, séanee du 28 mars 1890).
Acta mathematica 13: 1 ei. 2. Stockholm (Berlin, Paris) 1890.
Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. 17 u. 18 Argången 1888 u. 1889. Stockholm 1886—90.
Bergens Museums Aarsberetning for 1889. Bergen 1890.
Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Milano, Napoli, Pisa 1889. 90.
a. Rendiconti. Serie II. Vol. XXII.
b. Memorie. Classe di lettere e scienze storiche e morali. Vol. XVII — VIII della serie III. Fasc. II. Vol. XVIII — IX della serie III. Fasc. II.
c. Atti della Fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi. Vol. 9. 1889. Milano 1890.
Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze. Serie 3. Tomo VII. Napoli 1890.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. 2. semestre. fasc. 5, 6. Roma 1890.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1890. N. 116. 118. Nebst Indice. Bogen 7 u. 9. Firenze 1890.
Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. V. N. 2. Febbr. 1890. Roma 1890.
Smithsonian Institution:
a. Proceedings of the United States National Museum. Vol. 12. 1889. Washington 1890.
b. Bulletin of the U. St. National Museum N. 38. Washington 1890.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXII. N. 3. Sept. 1890. New York.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. X. N. 83. Baltimore Nov. 1890.
Resultados del Observatorio national Argentino en Cordoba. Vol. XII. Observaciones del año 1879. Buenos Aires 1890.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Oct. de 1890. Entrega IV. Tomo XXX. Buenos Aires 1890.
The Journal of the College of science, Imp. University, Japan. Vol. III, part. IV. Tōkyō Japan 1890.

Nachträge.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bericht Nr. 10 — 13 vom 31. Juli, 31. August, 30. Sept., 31. Okt. 1890.

Dezember 1890 und Januar 1891.

Sitzungsberichte d. K. Preuß. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. XLIX, L und Register von 1899. Berlin.
Jacobi, C. G. J., Gesammelte Werke. Herausgeg. auf Veranlassung d. K. Preuß. Akad. d. Wissensch. Band 5. Herausgeg. v. K. Weierstraß. Berlin 1890.
K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig:
a. Berichte über die Verhandlungen. Mathematisch-physische Classe 1890. II. Leipzig 1890.
b. Abhandlungen der philolog.-histor. Classe. Bd. XII. Nr. 1. Causa Nicolai Winter v. Friedr. Zarncke. Leipzig 1890.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 25. Jahrg. 3. Heft. Leipzig 1890.
Leopoldina. Heft XXVI. N. 21/22, 23/24 nebst Titel und Register zu Heft XXVI. Jahrg. 1890. Halle 1890.
Neues Lausitzisches Magazin. 66. Bd. 2. Heft. Görlitz 1890.
Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald. 22. Jahrg. 1890. Berlin 1891.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begr. v. C. Ohrtmann. Band XX. Jahrg. 1888. Heft 1. (Bog. 1—32). Berlin 1890.
Kölliker, A.: Zur feineren Anatomie des centralen Nervensystems. (Separatabdruck aus: Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. LI, 1. Leipzig 1890).
Jahrbücher d. Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 43. Wiesbaden 1890.
Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Neue Folge. 7. Bd. 3. Heft. Danzig 1890.
Vorlesungen über Geometrie unter besond. Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch. Bearb. v. Dr. F. Lindemann. 2. Bd. 1. Theil. Leipzig 1891.
Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur neunten Größe zwischen 80° nördl. und 2° südlicher Declination für das Aequinoctium 1875. 3. Stück. Zone + 65° bis + 70°. Beob. a. d. Sternwarte in Christiania. Leipzig 1890.
Neue Annalen d. K. Sternwarte in Bogenhausen bei München. Auf Kosten der K. Bayer. Akademie d. Wissensch. herausgeg. von Hugo Seeliger. Bd. I. München 1890.
Acta mathematica. Hrsg. von G. Mittag-Leffler. 13, 3 u. 4. Stockholm, Berlin, Paris 1890.
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band IX. Heft 1.
Brachiopoden der alpinen Trias von A. Bittner. Abhandlungen der K. K. Geologischen Reichsanstalt. Band XIV. Wien 1899.
Verhandlungen der K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1890. XL. Band. III. u. IV. Quartal. Wien 1890.
Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft. Neue Folge XI. Bd. (der ganzen Reihe 39. Bd.). Prag, Wien, Leipzig 1891.
Separatabdruck aus Tschermak's Mineralogischen und Petrologischen Mittheilungen. Herausgeg. v. F. Becke.
M. Hunter und H. Rosenbusch: Ueber Monchiquit . . . Wien (1890).
Mittheilungen d. historischen Vereines f. Steiermark. XXXVIII. Heft. Graz 1890.
Ungarische Revue. 1890 (X. Jahrg.) X. Heft Dez.
1891 (XI. Jahrg.) I. Heft: Jan. Budapest 1890 u. 91.
Értesitö az Erdélyi Muzeum-Egylet Orvos-természettudományi szakosztályából. 1890. XV. Évfolyam.

a. I. Orvosi szak. II. III. Füzet.
b. II. Természettudo mányi szak. III. Füzet.
c. III. Népszerü szak. II. Füzet. Kolosvárt 1890.

Das Datum auf den Philippinen. Von Jerolim Freiherrn v. Benko. Wien 1890. Seperatabdruck des 32. Capitels aus dem auf Befehl des k u. k. Reichskriegsministeriums verfaßten Werke „Die Schiffsstation der Kuk. Kriegsvereine in Ostasien".
Nature. Vol. 43. N. 1101—1109.
Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical Society. Fourth Series. Vol. III. XXXIII. Old. Manchester 1890.
Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. LI. Nr. 1. 2. Nov. u. Dez. 1890. (London 1890).
Proceedings of the Royal Society London. Vol. XLVIII. N. 295. (London 1891).
Journal of the R. Microscopical Society. 1890. Part 6. Dec. London and Edinburgh (1890).
Records of the Geological Survey of India. Vol. XXIII Part 4. Calcutta 1890.
Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. II (New Series). (Melbourne) 1890.
Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden:
a. Handelingen en mededeelingen over het jaar 1888—1889.
b. Levensberichten der afgestorvene Medeleden. Bijlage tot de Handelingen van 1889. Leiden 1889.
Annales de l'École Polytechnique de Delft. Tome VI. 1890. 1. Livr. Leiden 1890.
De Badoej's door Jul. Jacobs en J. J. Meijer. Uitgegeven door het Kön. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 'sGravenhage 1891.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks. 6. Deel. (Deel 40). 1. Aflev. 'sGravenhage 1891.
Annalen der Sternwarte in Leiden. Herausgeg. v. H. G. van de Sande Bakhuyzen 5. u. 6. Band. Haag 1890.
Verslag van den Staat der Sternenwacht te Leiden. 1886—88 u. 1888/89. Leiden 1888 u. 1889.
Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
a. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIV. Aflev. I. Batavia, 'sHage 1890.
b. Notulen van de algemeene en bestuars-vergaderingen. Deel XXVIII. 1890. Aflevering I. Batavia 1890.
Nederlandsch-indisch Plakaatboch 1692—1811, door J. A. van der Chijs. 7. Deel. 1755—1764. Batavia, 'sHage 1890.
Académie Royale de Copenhague:
a. Mémoires. 6me série. Classe des lettres. Vol. I. No. 1. Classe des sciences. Vol. V, No. 3. Vol. VII, No. 1. 2. Copenhague 1890.
b. Oversigt over d. Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1890. Kobenhavn (1890).
Aktstykker ag Oplysninger til Rigsraadets ag Staendermødernes Historie i Kristian IV's Tid udgivne ved Kr. Erslev af Selskabet for Udgivelse af Kilder til dansk Historie. 1. Bind 1. 2. Haefte. 2. Bind 1. 2. Haefte. 3. Bind 1. 2. Häfte. Kjøbenhavn 1883—90.
Repertorium für Meteorologie herausgeg. v. d. Kaiserl. Akademie der Wissensch. Redigirt von Heinr. Wild. Band XIII. St. Petersburg 1890.
Bulletin de la Société imp. des naturalistes de Moscou. Année 1890. N. 2. Moscou 1890.
Запуску новороссіискаго олшесмва есмесмвоусуымамелеы. Томч XI, XV, 1. 2. Одесса 1890.
Memoires de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie (Odessa). Tom. XI (Section mathem.), XV, 1. 2. Odessa 1890.
Akademie der Wissenschaften in Krakau:
a. Anzeiger. 1890. November, Dezember. Krakau 1890.
b. Rozprawy i Sprawozdania z Posiedzeń wydziatu matematyczno-przyrodniczego Akademii Unniejętności. Tom. XV, XVI. W Krakowie 1887.

c. Acta historica res gestas Poloniae illustrantia. Tom. IX. Cardinalis Hosii Epistolarum Tom. II. 1551 — 1558. Pars II. W Krakowie 1888.
d. Ibiór Wiadomości do Antropólogii Krajowej wydawany staraniem Komisyi Antropólogicznej . . . Tom. XI. Kraków 1887.
e. Pamiętnik. Wydziat matematyczmo-przyrodniczy. Tom. XIII. W Krakowie 1887.
Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie seconda. Tomo XL. Torino 1890.
Atti e rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. II. Fasc. 3°. Perugia 1890.
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV. Anno 1890. Fasc. VI. Nov. — Dec.. Palermo.
Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie Quarta. Rendiconti. Vol. VI°. 2° Semestre. Fasc. 7 — 12. Roma 1890.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:
a. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1889. 1. Titel und Index, 2. Tavola sinottica, 3. Indice alfabetico. Bogen 10.
b. 1890. N. 119, 120.
c. 1891. N. 121, 122. Firenze.
Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. V. N. 3, 4. Roma 1890.
Vicissitudes onomastiques de la globulaire vulgaire par Saint-Lager. Paris 1889.
La priorité des noms de plantes par Saint-Lager. Paris 1890.
Académie Royale de Belgique:
a. Bulletin. 60e année, 3e série, tome 20. N. 11. Bruxelles 1890.
b. Annuaire. 1891. Ibid. 1891.
Academia Real des sciencias de Lisboa:
a. Memorias. 1) Classe de sciencias mathematicas, physicas e naturales. Nova serie tomo VI, parte II. 2) Classe de sciencias moraes, politicas e bellas-lettras. Nova Serie tomò V, parte II; tomo VI, parte 1.
b. Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. Segunda serie tom. I. No. II – IV.
c. Elogio historico de Sua Magestade El-Rei o Senhor D. Fernando II. recitado pelo socio Viscoude de Benalcanfor. Lisboa 1886.
d. Historia dos estabelecimentos scientificos litterarios.
e. artisticos de Portugal por José Silvestre Ribeiro. Tomo X — XVI. Lisboa 1882 – 89.
f. A electricidade. Estudo de algumas dastnas principaes applicações por Virgilio Machado. Lisboa 1887.
g. Estudos sobre as provincias ultramarinas por João de Andrade Corvo. Vol. 1—4. Lisboa 1883 — 87.
h. Curso de silvicultura por Antonio Xavier Pereira Coutinho. Tomo I Botanica florestal. Tomo II Esboço de uma flora lenhosa Portugneza. Lisboa 1886 — 87.
i. Lições de pharmacologia e therapeutica geraes por Eduardo Augusto Motta. Lisboa 1888.
k. Portugaliae monumenta historica. Inquisitiones. Volumen I. Fasc. 1 e 2. Olisipone 1888. Lisboa.
U. S. Department of agriculture. Division of ornithology and mammalogy. North American Fauna. N. 3. 4. Washington 1890.
Astronomical Papers. Printed by authority of the congress. Vol. II. Part. V. Discussion of transits of Venus 1761 — 69 u. Vol. IV. Washington 1890.
The Boston Society of Natural History:
a. Memoirs. Vol. IV. Number VII – IX. Boston 1890.
b. Proceedings. Vol. XXIV, parts III and IV. Mai, 1889 – April, 1890. Boston 1890.
Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College:
a. Bulletin. Vol. XX. No. 3 – 6. Cambridge U. S. A. 1890.
b. Annual report of the curator for 1889 — 90. Cambridge U. S. A. 1890.
Johns Hophins University Circulars. Vol. X. No. 84. Baltimore. Dec. 1890.

Bulletin of the scientific laboratories of Denison University edited by W. G. Tight. M. S. Vol. V. Granville, Ohio, June 1890.
Report of the superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending 1890 June 30. Washington 1890.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXII. No. 4. Dec. 31, 1890. New-York.
Report for the year 1889—90, presented by the board of managers of the Observatory of Yale University to the president and fellows 1890.
Anales de la Sociedad científica Argentina. Tomo XXX, Entrega V, VI. Buenos Aires 1890.
Boletin mensual del Museo de productos Argentinos. Año III. No. 31. Dic. 1890. Buenos Aires 1890.

Februar 1891.

Sitzungsberichte der Kön. Preuss. Akademie der Wissensch. in Berlin. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.
Deutschlands Leistungen und Aussichten auf technischem Gebiete. Rede zum Geburtsfeste S. M. Wilhelm II. in der K. Technischen Hochschule zu Berlin geh. am 26. Jan. 1891 von F. Reuleaux. Berlin 1891.
Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Des XII. Bandes der Abhandlungen der philologisch-historischen Classe N. II. (Anganische Inschriften von F. H. Weissbach). Leipzig 1891.
K. b. Akademie der Wissenschaften zu München. Sitzungsberichte der math.-physikal. Classe 1890. Heft IV. München 1891.
Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1889. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. 1. Hälfte, Abtheilungen 1 u. 2. VII. Jahrg. 1889. Herausgeg. von Prof. Dr. Paul Schreiber. Chemnitz 1890.
Leopoldina. Heft XXVII. N. 1—2. Januar 1891. Halle a. S.
Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. 4. Bd. 4. Heft. Heidelberg 1891.
Acta Mathematica 14 : 3. Berlin, Stockholm, Paris 1891.
Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 35. Jahrgang. 2. Heft. Zürich 1890.
Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:
a. Denkschriften. 1) Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 56. Band. 2) Philosophisch-historische Classe. 37. Band.
b. Sitzungsberichte. 1) Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abtheil. I Band XCVIII. IV.—X. Heft. 1889. April-Dezember. Band XCIX. I—III. Heft. 1890. Jan.—März. 2. Abtheilung IIa. XCVIII. Band. IV—X. Heft. 1889. April —Dezember. XCIX. Band. I.—III. Heft. Jahrg. 1890. Jan.—März. 3. Abtheil. IIb. Band XCVIII. IV.—X.Heft. Jahrg. 1889. April—December. XCIX. Band. I.—III. Heft. Jahrg. 1890. Jan.—März. 4. Abtheilung III. XCVIII. Band. V.—X. Heft. Jahrg. 1889. Mai—December. XCIX. Band. I.—III. Heft. Jahrg. 1890. Jan.—März. 2) Philosophisch-historische Classe. CXIX. Bd. CXX. Bd. Jahrg. 1889. CXXI. Bd. 1890.
c. Archiv für österreichische Geschichte. 75. Bd. 1. u. 2. Hälfte. Wien 1889.
d. Fontes rerum austriacarum. 2. Abth. Diplomataria et acta. XLV. Band. 1. Hälfte. Wien 1890.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1890. N. 14—18. 1891. N. 1. Wien.
Publicationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureau. II. Bd. Längenbestimmungen. Prag, Wien, Leipzig 1890.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1891. Januar. Krakau 1891.
Ungarische Revue. II. Heft. Februar. 1891. 11. Jahrg. Budapest 1891.
Földtani Közlöny. XX Kötet. 5—12 Füzet. Budapest 1890.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche der Kön. Ungarischen geologischen Anstalt:
a. Die Pontische Stufe und deren Fauna bei Nagy Mányok im Comitate Tolna v. Dr. E. Lörenthey. Budapest 1890.

b. Das Delta des Nil v. Dr. J. Jankó. Budapest 1890.
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIV. 4me et 5me livraisons. Harlem 1891.
Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde, uitg. van wege de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. 10. Deel. Nieuwe Reeks. 2. Deel. 1. Aflever. Leiden 1891.
Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam. 1890.
Annales de l'École polytechnique de Delft. Tome VI, 1890. 2. livraison. Leide 1890.
Académie Royale de Belgique. Bulletin. 60e année. 3e série. tome 20. N. 12, 61e année. 3e série. tome 21. N. 1. Bruxelles 1890. 91.
Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVI. 2e livr. Tome XVII. 4e livr. Liège 1890.
Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. XX. Zoologi. Pycnogonidea ved G. O. Sars. Christiania 1891.
Annalen des physikalischen Central-Observatoriums herausgegeben v. H. Wild. Jahrgang 1889. Theil II. St. Petersburg 1890.
Nature. Vol. 43. N. 1110—1114.
Proceedings of the London mathematical society. N. 391—394.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. LI. N. 3. London 1891.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLIX. N. 296. London 1891.
Journal of the R. microscopical society 1891. Part 1. February. London and Edinburgh.
Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical society. Fourth series. Vol. 4. N. 1, 2. 1890—91. Manchester.
Reports from the laboratory of the R. college of physicians. Edinburgh. Vol. III. Edinburgh and London 1891.
Royal Irish Academy:
a. Proceedings. Third series. Vol. I. N. 4. Dublin 1891.
b. Transactions. Vol. XXIX. Part XIV. Dublin 1891.
Historia do Infante D. Duarte Irmão de El-rei D. João IV por José Ramos-Coelho. Tomo II. Lisboa 1890.
Annales du Musée Guimet:
Revue de l'histoire des religions. 11me année. Tome XXI. N. 2, 3. Tome XXII. N. 1, 2. Paris 1890.
Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. Tome VII. Paris 1890.
Mémoires de la société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. Tome XXVI. (Troisième série. Tome VI). Paris, Cherbourg 1889.
La société des antiquaires de Picardie:
a. Mémoires. Tome XII. Histoire de l'abbaye de Saint-Acheul-lez-Amiens. Amiens 1890.
b. Bulletin. Année 1889. N. 4. 1890. N. 1, 2. Amiens 1890.
Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVIII. 1891. Serie IV. Rendiconti. Vol. VII. 1° sem. fasc. 1, 2. Roma 1891.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXVI. Disp. 1, 2, 3. 1890—91. Torino.
Revista di matematica diretta da G. Peano. Fasc. 1. Gennaio 1891. Torino.
Annuario della società R. di Napoli. 1891. Napoli 1891.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze:
a. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. N. 123—124. 1891.
b. Indici del Bollettino 1890. I. Indice alfabetico delle opere. Bogen A—C.
Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Firenze 1891:
a. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. VI. N. 1. Gen. 1891. Roma 1891.
U. S. Geological Survey:
a. Mineral resources of the United States by David T. Day. 1888. Washington 1890.
b. Monographs. Vol. I. Lake Bonneville by Grove Karl Gilbert. Ebd. 1890.

c. Ninth annual report. 1887—88 by J. W. Powell. Ebd. 1889.
d. Bulletin. N. 58, 59, 60, 61, 63, 64, 66. Ebd. 1890.
Proceedings of the American pharmaceutical association. 38. annual meeting. Philadelphia 1890.
Bulletin of the Museum of comparative zoölogy at Harvard college. Vol. XX. N. 7. Cambridge, U.-S.-A. 1890.
Transactions of the Connectient Academy of arts and sciences. Vol. VIII. Part. 1. New Haven 1890.
Johns Hopkins University circulars. Vol. X. No. 85. Baltimore 1891.
Anales de la sociedad cientifica argentina. Enero de 1891. Entrega 1. Tomo XXXI. Buenos Aires 1891.

Nachträge.

Bulletin de la société mathématique de France. Tome XVIII. N. 5 et 6. Paris 1890.
Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg. Würzburg 1880:
a. Sitzungsberichte. Jahrg. 1890. N. 8, 9, 10.
b. Verhandlungen. N. F. XXIV. Band. N. 6.
Journal and proceedings of the Royal society of New South Wales. Vol. XXIII. 1889. Part II. Sidney, London.
The humming bird. Vol. I. N. 3. March 1. 1891. London.
Geological Survey of India:
a. Memoirs. 1) Ser. XIII. Salt-range fossils. Vol. IV. Part. 1. Geological results. 2) Vol. XXIV. Part. II. Middemiss: Physical Geology of the Sub-Himalaya of Garhwál and Kumann. Calcutta.
Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
a. Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen. Deel XXVIII. 1890. Aflever. II. Batavia 1890.
b. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIV. Aflevering II. Batavia, s'Hage 1890.
Königl. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
a. Sitzungsberichte 1890. 1) Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. II. 2) Philos.-histor.-philolog. Classe.
b. Jahresbericht für 1890. Prag 1891.

März und April 1891.

Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. X—XVIII. Berlin 1891.
Separatabzüge von Aufsätzen von L. Kronecker:
a. Ueber eine summatorische Function. (Aus den Sitzungsberichten d. K. Pr. Ak. d. W. zu Berlin 1889. XLII).
b. Zur Theorie der elliptischen Functionen (Art. XII—XXI). (Ebendaher. 1889. VI. X. XIV. XVIII. XIX. 1890. VI. VII. XIV. XVI).
c. Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten. Ueber orthogonale Systeme. Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. (Ebendaher. 1889. XXX. XXXI. 1890. XXVI. XXVIII. XXX. XXXVI. XL).
d. Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen. Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen. (Ebendaher. 1890. XLVIII. LIII. 1891. II. III).
e. Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat. Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten. (Ebendaher. 1888. XVI. XVIII).
f. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. Aus dem Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 100. Heft 4
g. Première partie du chapitre XIII de la Note sur la théorie des résidus quadratiques par A. Genocchi.
Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste von L. Kronecker, Paul du Bois-Reymond. (Ebendaher. Bd. 104. Heft 4).

h. Bemerkungen über die Jacobischen Thetaformeln. (Ebendaher. Bd. 102. Heft 3).
i. Ueber den Zahlbegriff. (Ebendaher. Bd. 101. Heft 4).
k. Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. (Ebendaher. Bd. 105. Heft 2).
Kgl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig:
a. Mathematisch-physische Classe:
1. Berichte über die Verhandlungen. 1890. III. IV. Leipzig 1891.
2. Abhandlungen. Bd. XVI. N. III. Bd. XVII. N. 1 u. 2. Ebd. 1891.
b. Philologisch-historische Classe:
Berichte über die Verhandlungen. 1890. II. III. Ebd. 1891.
K. b. Akademie der Wissenschaften zu München:
Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen u. historischen Classe. 1890. Bd. II. Heft III. München 1891.
Germanisches Nationalmuseum zu Nürnberg.
a. Anzeiger. Jahrg. 1890. Nürnberg 1890.
b. Mitteilungen. Jahrg. 1890. Ebd. 1890.
c. Katalog der im german. Museum befindl. Originalskulpturen. Ebend. 1890.
Festschrift hrsg. v. d. Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. Sonderabzug: Ueber die Dirichletsche Methode der Wertbestimmung der Gaussschen Reihen. Von L. Kronecker. Leipzig 1890.
Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Meissen. 2. Bd. 4. Heft. Meissen 1890.
Das Ausland. Wochenschrift für Erd- und Völkerkunde von Karl v. Steinen. 1891. N. 8. Stuttgart.
Leopoldina. Heft XXVII. N. 3—4. N. 5—6. Halle a. S. 1891.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XX. Jahrgang 1888. Heft 2. Berlin 1891.
Kriegsberichte des Königl. Dänischen General-Feldmarschalls Ernst Albrecht von Eberstein aus dem zweiten schwedisch-dänischen Kriege. Herausgeg. v. L. F. Freiherrn von Eberstein. 2. Ausg. Berlin 1891.
Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. 44. Band. IV. Heft. Leipzig 1890.
Societatum litterae. Hrsg. v. E. Huth. Jahrbuch 1890. Berlin 1891.
Monatliche Mittheilungen aus dem Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissenschaftl. Veseins des Reg. Bez. Frankfurt, hrsg. v. E. Huth. 6. Jahrg. 1888/89. Berlin 1889.
Reale Accademia dei Lincei. Roma:
a. Atti. Anno 288. 1891. Ser. IV. Rendiconti. Vol. VII. 1. Semestre fasc. 3, 4, 5, 6. Roma 1891.
b. Atti. Ser. IV. Classe di scienze morali, stor. e filologiche. Anno 283. 1886. Vol. II. Anno 284. 1887. Vol. III. Parte I. II. Anno 285. 1888. Vol. IV. Parte II. Memorie. Anno 285. 1888. Vol. V. Roma 1886—88.
Reale Accademia delle scienze di Torino:
a. Atti. Vol. XXVI. disp. 4ª, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª. 1890—91 u. Elenco degli accademici al 1° Marzo 1891. Torino 1891.
b. Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1890. Calcolate dal Dott. G. B. Rizzo. Torino 1891.
Le stazioni sperimentali agrarie italiane. Volume XX, fasc. II. Febbraio. Asti 1891.
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo V. Anno 1891. Fasc. I e II. Palermo 1891.
Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.
Rendiconto. Serie 2ª. Vol. IV. Anno XXIX. fasc. 1°—12°. Genn. Dic. 1890. Napoli 1890.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze.
Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1891. N. 125, 126, 127 u. Indice 1890. Bog. II. E. Firenze 1891.
Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma.
Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. VI. N. 2. 3. 1891. Roma 1891

Société mathématique de France. Bulletin. Tome XIX. N. 1. 2. Paris 1891.
Académie Royale de Belgique.
a. Bulletin. 61e année, 3e série, tome 21. N. 2, 3. Bruxelles 1891.
b. Classe des sciences. Programme de concours pour 1892. (Ibid. 1891).
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. X. No. 1. Coimbra 1891.
Société Impériale des naturalistes de Moscou:
a. Bulletin. Année 1890. N. 3. Moscou 1891.
b. Beilage: Meteorologische Beobachtungen ausgef. am Meteorologischen Observatorium der landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau. (1890. Erste Hälfte). Moskau 1890.
Mémoires de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Tab. IV. VI e VII zu Maximowiczii Diagnoses plantarum Asiatic. VII. 1890.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XLIX. N. 297, 298. London 1891.
Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. LI. N. 4, 5. London 1891.
Proceedings of the London Mathematical Society. No. 395–398, No. 399—403. London 1891.
Nature. Vol. 43. N. 1115–1121. London 1891.
Memoirs and proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. 1890—91. Manchester 1891.
The humming bird. Vol. 1. No. 3. London 1891.
The Cambridge Philosophical Society:
a. Proceedings. Vol. VII. Part. III. 1890. Cambridge 1891.
b. Transactions. Vol. XV. Part. 1. Ibid. 1891.
Journal of the Royal Microscopical Society. 1891. Part 2. London and Edinburgh 1891.
Proceedings of the Royal Physical Society. Session 1889—1890. Edinburgh 1891.
Transactions of the Royal Society of South Australia. Vol. XIII. Part II. Adelaide 1890.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5de Volgreeks. 6de Deel (Deel XL der geheele Reeks). 2e aflev. s'Gravenhage 1891.
Regenvaarnemingen in Nederlandsch-Indië. 11de Jaargang 1889, door Dr. J. P. van der Stok. Batavia 1890.
Observations made at the magnetical and meteorological observatory at Batavia. Published by order of the government of Netherlands India, under the direction of Dr. J. P. van der Stok. Vol. XII. 1889. Batavia 1890.
Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden:
a. Handelingen en Mededeelingen. 1889–1890. Leiden 1890.
b. Levensberichten. Bijlage tot de Handelingen van 1890. Ibid. 1890.
Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société hollandaise des sciences. Tome III. Correspondance 1660—1661. La Haye 1890.
Flora Batava 291. 292. Aflev. Leiden.
Christiania Videnskabs-Selskab:
a. Forhandlinger 1889. No. 1–12. Christiania 1889.
b. Oversigt over Videnskabs-Selskabets chøder i 1889. Ibid. 1890.
Acta Universitatis Lundensis. Tom. XXVI. 1889—90. I. II. Afdelningen. Lund 1889–90.
Norges gamle love indtil 1387. 5te Binds. 1ste Hefte ved Gustav Storm. Christiania 1890.
U. S. Coast and Geodetic Survey:
a. Report. June 1888. Part I. Text. Part II. Sketches. Washington 1889.
b. Bulletin. No. 19. March 1890. Ibid. 1891.
Pennsylvania geological survey:
a. Dictionary of Fossils of Pennsylvania. Vol. II. N—R. Vol. III. S—Z. Harrisburg 1889. 90.
b. Atlas Southern authracite field. Part III. A A. 1–12. 1889.
c. Seveuth report on the oil and gas fields for 1887, 1888. Ibid. 1890.
The California Academy of Sciences.
Occasional papers I. II. San Francisco 1890.
Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. Part. II. April—Sept. 1890. Philadelphia 1890.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. VII. Part. 1. Madison, Wis. 1890.
Journal of Comparative Neurology. Vol. 1. March 1891. Cincinnati Ohio. 1891.
Bulletin of the Museum of Comparative Zöology at Harvard College. Vol. XX. N. 8. Cambridge U.-S.-A. 1891.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXII. Supplement. 1890. Vol. XXIII. No. 1. 1891. New-York.
Proceedings of the American Philosophical Society. Vol. XXVIII. No. 134. Philadelphia.
Johns Hopkins Circulars. Vol. X. No. 86. Baltimore 1891.
Johns Hopkins University studies in historical and political science:
a. Eigth series V–VI, VII–VIII–IX. X, XI–XII. Ibid. 1890. [In je 2 Exempl.]
b. Studies from the Biological Laboratory. Vol. IV. No. 6. Ibid. 1890.
c. American Journal of mathematics. Vol. XIII. No. 1. 2. [In 2 Exempl.] Baltimore 1890. 91.
Revista Argentina de historia natural. Tomo I. Entrega 1, 2. 1891. Buenos Aires 1891.
Anales de la Sociedad cientifica Argentina. 1891. Tomo XXXI. Entrega 2. 3. Buenos Aires 1891.
Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. 45. Heft. Band 5. Seite 191—234. Yokohama 1891.
Mitteilungen aus der Medicinischen Fucultät der Kaiserlich-Japanischen Universität. Band I. No. 4. Tokyo 1891.

Nachträge.

Astronomische Mittheilungen von Rud. Wolf. Januar 1891. S. 249—280. (Zürich 1891).
„Fauna". Verein Luxemburger Naturfreunde. Mittheilungen aus den Vereinssitzungen. Jahrg. 1891. Heft 1. Luxemburg.
Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Nouvelle série II. (XXXIV). No. 1. Feuilles 1–12. St. Pétersbourg 1891.
Tifliser physikalisches Observatorium:
a. Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1889. Tiflis 1890.
b. Magnetische Beobachtungen im Jahre 1888—89. Ebd. 1890.
Ungarische Revue. 1891. Elfter Jahrgang. Heft III. IV. Budapest 1891.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1891. Februar. März. Krakau 1891.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1891. No. 2, 3, 4. (Wien 1891).
Verein für siebenbürgische Landeskunde:
a. Archiv. Neue Folge. 23. Bd. 2. Heft. Hermanstadt 1891.
b. Jahresbericht für 1889/90. Ebd. 1890.
Die Freiheit des Willens, die Moral und das Uebel von Anton Ganser. Graz 1891.
The Canadian Institute. Transactions. Oktober 1890. Vol. 1. Part 1. Toronto 1890.
Математическій Сборникъ издаваемый Московскимъ математическимъ обществомъ.
[Sammlung mathemat. Arbeiten hrsg. v. d. Moskauer mathemat. Gesellschaft.]
Tom. (1.) 2—14. 15. No. 1—3. Москва 1866—91.

Inhalt von Nr. 11.

Friedrich Wieseler, über den Stierdionysos. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

